ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-SIXIÈME — ANNÉE 1949

(85e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1949

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΤΕ ΩΜΕΤΡΕΙ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-SIXIÈME — ANNÉE 1949

(85e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1949

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

Reprinted by permission of the original publishers

KRAUS REPRINT
A Division of
KRAUS-THOMSON ORGANIZATION LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1971

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

ADMINISTRATION :

Directeur : M. PAUL MONTEL,
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : Mlle P. GAUTHIER-VILLARS.

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

COURBES ALGÉBRIQUES DE CLASSE p DONT UNE p-SECTRICE DE CHAQUE SYSTÈME DE TANGENTES CONCOURANTES PASSE PAR UN POINT FIXE

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. *Introduction.* — J'ai étudié précédemment (1) *les courbes algébriques de classe p, telles que tout système de tangentes concourantes ait ses p-sectrices de direction fixe chacune* (autrement dit, chacune des p-sectrices passe en un point fixe rejeté à l'infini). Cette question avait été suggérée par M. Hadamard à propos de l'hypocycloïde à trois rebroussements. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe possède cette propriété sont : *la droite de l'infini est tangente double, les points cycliques étant points de contact; les tangentes isotropes coïncident toutes avec la droite de l'infini.* On constate qu'*une courbe solution fournit, avec une valeur en général différente de la classe, des solutions nouvelles constituées par ses développées de tous ordres et par les courbes qui lui sont parallèles.*

Le problème traité dans ce travail consiste en la recherche *des courbes algébriques de classe p, telles que tout système de tangentes concourantes possède une p-sectrice passant en un point fixe* O, *situé, cette fois, à distance finie.* Les conditions nécessaires et suffisantes sont : *les droites isotropes issues de* O *touchent la*

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, LXVI, novembre-décembre 1947.

courbe aux points cycliques et sont les seules tangentes isotropes (d'où résulte que la droite de l'infini n'est pas tangente). *Les courbes parallèles à une courbe solution sont encore des solutions (pour une valeur différente ou égale de la classe); la développée n'est solution que si la courbe est unicursale.* Le degré de la courbe varie entre le maximum $p(p-1)$ et un minimum, atteint par les courbes unicursales, qui est $2(p-1)$ si les tangentes doubles ne sont pas tangentes inflexionnelles et si I, J sont points multiples d'ordre $p-1$; ce minimum peut s'abaisser beaucoup pour certaines courbes, telles que les épicycloïdes.

On voit que les critères relatifs à ces deux espèces de courbes s'excluent mutuellement, malgré l'analogie des énoncés. Dans le second énoncé, il ne peut exister qu'une p-sectrice passant en un point fixe; mais, dans le premier, dès qu'une p-sectrice passe par un point fixe, *rejeté à l'infini*, il en est de même de toutes les autres, en vertu de la relation angulaire qui nous sert encore ici,

$$(D_1, \delta)+(D_2, \delta)+\ldots+(D_p, \delta)=0 \quad \text{ou} \quad p(Ox, \delta)=(Ox, D_1)+\ldots+(Ox, D_p)$$

définissant la direction δ d'une p-sectrice des directions $D_1, D_2, \ldots, D_p$; les angles en jeu sont des angles orientés de droites non orientées, définis à $k\pi$ près, de sorte qu'il existe p directions de p-sectrices, inclinées les unes sur les autres d'un angle $\frac{\pi}{p}$ ou multiple de $\frac{\pi}{p}$.

Une solution très générale du *premier problème* est fournie par les *hypocycloïdes algébriques*; une solution très générale du second est fournie par les *épicycloïdes algébriques. Nous donnerons explicitement les coordonnées tangentielles des tangentes aux courbes unicursales de notre problème actuel.*

Les courbes de classe 3 et genre 1 méritent qu'on signale la distribution de leurs points de rebroussement; cela revient d'ailleurs à indiquer une propriété curieuse, que je crois inédite, des points d'inflexion de la cubique générale de genre 1.

2. *Coordonnées isotropes et p-sectrices.* — Par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy le point Ω a des coordonnées x, y; nous appelons *coordonnées ponctuelles isotropes* les quantités X, Y telles que

$$(1) \qquad X=x+iy, \quad Y=x-iy, \quad x=\frac{X+Y}{2}, \quad y=i\frac{Y-X}{2}.$$

L'équation de droite $ux+vy+w=0$ devient, en *coordonnées tangentielles isotropes*, $UX+VY+W=0$ avec

$$(2) \quad U=\frac{u-iv}{2}, \quad V=\frac{u+iv}{2}, \quad u=U+V, \quad v=i(U-V), \quad w=W.$$

Une droite D d'équation cartésienne $y=mx+p$ a pour équation isotrope

$(i-m)\,Y=(i+m)\,X+2p$; nous posons $M=(i+m):(i-m)$ de façon à écrire $Y=MX+P$ et, posant $\varphi=(Ox, D)$,

$$(3)\qquad \operatorname{tg}\varphi=m=i\frac{M-1}{M+1},\qquad M=e^{-2i\varphi}.$$

Soient donc p droites $D_1, D_2, \ldots, D_p$ et δ l'une de leurs p-sectrices; posons $\varphi_i=(Ox, D_i)$, $\psi=(Ox, \delta)$; appelons M_i, μ les coefficients isotropes attribués à D_i et δ; on a

$$(4)\qquad p\psi=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_p \pmod{\pi},$$

$$(5)\qquad \mu^p=M_1M_2\ldots M_p=e^{-2ip\psi}=e^{-2i(\varphi_1+\ldots+\varphi_p)}.$$

On remarquera que si *l'une ou plusieurs des droites* D_i *sont isotropes et parallèles, aucune des autres n'étant isotrope, toutes les p-sectrices sont confondues avec la droite isotrope en jeu; si deux des droites* D_i, D_j *sont isotropes et non parallèles, les directions de p-sectrices sont indéterminées.*

Nous nous bornons aux courbes réelles ou, du moins, ayant, par rapport à un système d'axes réels, une équation à coefficients réels. Si les tangentes issues du point Ω de coordonnées isotropes (X_0, Y_0) ont des coefficients $M_1, M_2, \ldots, M_p$, et si l'une des p-sectrices passe en O, nous avons

$$(6)\qquad \left(\frac{Y_0}{X_0}\right)^p=M_1M_2\ldots M_p.$$

Nous découvrons sans peine les conditions *nécessaires :* la courbe admet au moins une tangente isotrope T; prenons un point Ω sur cette tangente : toutes les p-sectrices des tangentes issues de Ω sont confondues avec T; *donc* O *est sur* T; *il ne peut exister d'autre tangente* T′ *parallèle à* T, car il faudrait que O, qui est à distance finie, soit aussi sur T′. *Il existe de même une tangente isotrope et une seule* T_1 (*de direction autre que* T) *et* O *est le point commun à* T *et* T_1; il ne peut exister d'autre point fixe par lequel passerait une autre p-sectrice, car les deux tangentes isotropes T, T_1 sont uniques et déterminent un seul point O. *La droite de l'infini ne peut être tangente,* sinon tout système de tangentes parallèles aurait ses p-sectrices rejetées toutes à l'infini : p-droites parallèles ont, en effet, une p-sectrice, et une seule, à distance finie que l'on obtient en coupant les p-droites par une sécante arbitraire, puis prenant le centre de gravité G des p points d'intersection obtenus, supposés de même masse : la p-sectrice est la parallèle aux droites menée par G; si l'une des droites parallèles est rejetée à l'infini, ou même plusieurs, la p-sectrice est elle-même rejetée à l'infini.

Nous avons ainsi obtenu un ensemble de conditions *nécessaires :* un calcul fort simple les prouvera *suffisantes.*

3. *Équation tangentielle des courbes.* — Nous définissons la courbe (C) par son équation tangentielle isotrope $F(U, V, W) = 0$

$$(7)\quad \begin{cases} F(U, V, W) \equiv F_p(U, V) + W F_{p-1}(U, V) + \ldots + W^{p-r} F_r(U, V) + \ldots + W^p F_0, \\ F_r \equiv \alpha_{r,0} U^r + \alpha_{r,1} U^{r-1} V + \ldots + \alpha_{r,r} V^r. \end{cases}$$

Si $Y - Y_0 = M(X - X_0)$ est l'équation isotrope d'une tangente issue du point $\Omega(X_0, Y_0)$, en remplaçant U par M, V par (-1) et W par $Y_0 - MX_0$, l'équation $F = 0$ devient une équation de degré p en M dont le produit des racines s'obtient aisément, et l'équation (6) devient

$$(8)\quad \frac{\alpha_{p,p} - Y_0 \alpha_{p-1,p-1} + Y_0^2 \alpha_{p-2,p-2} \ldots + (-1)^p Y_0^p F_0}{\alpha_{p,0} - X_0 \alpha_{p-1,0} + X_0^2 \alpha_{p-2,0} \ldots + (-1)^p X_0^p F_0} = \frac{Y_0^p}{X_0^p}.$$

Cette relation est satisfaite, quels que soient les nombres X_0, Y_0; on a donc

$$(9)\quad \alpha_{p,p} = \alpha_{p,0} = 0, \qquad \alpha_{p-1,p-1} = \alpha_{p-1,0} = 0, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{1,1} = \alpha_{1,0} = 0,$$

Autrement dit, tous les polynomes F_p, F_{p-1}, ..., F_2 contiennent UV en facteur; F_1 disparait; quant à la constante F_0, si elle est nulle, la courbe se décompose en *l'ensemble des deux points cycliques et une courbe de classe* $p - 2$; nous savons qu'alors les p-sectrices sont indéterminées, puisque deux tangentes sont isotropes; nous écartons ce cas et il reste la vraie solution où nous supposerons $F_0 = 1$

$$(10)\quad W^p + UV\Phi_{p-2}(U, V, W) = 0 \qquad \text{ou} \qquad w^p + (u^2 + v^2)\varphi_{p-2}(u, v, w) = 0.$$

Nous avons ainsi vérifié que *les conditions nécessaires trouvées au paragraphe précédent sont suffisantes.* On peut remarquer que φ_{p-2} peut contenir w^r en facteur; *il y a alors décomposition de la courbe en l'origine comptée r fois et une courbe de classe* $p - r$, *solution de notre problème pour la classe* $p - r$. On remarque que les tangentes issues de l'origine à la courbe $\varphi_{p-2} = 0$ sont aussi tangentes à la courbe C : un certain nombre d'entre elles peuvent être isotropes et avoir, sur OI ou OJ, un point de contact quelconque.

Chaque point cyclique I *ou* J *est sur la courbe et point de contact de* OI *ou* OJ *avec la courbe* : il peut arriver que OI n'ait pas d'autre point de contact ou, au contraire, touche la courbe en d'autres points, ou même la coupe en d'autres points, sans la toucher en ces points. Cherchons en effet *le* ou *les* points de contact de la droite isotrope $Y = 0$ dont les coefficients sont $U = 0$, $V = 1$, $W = 0$; les coordonnées du point de contact sont (si la tangente est simple)

$$(11)\quad \begin{cases} V\Phi_{p-2} + UV\dfrac{\partial}{\partial U}\Phi_{p-2}(U, V, W) \\ U\Phi_{p-2} + UV\dfrac{\partial}{\partial V}\Phi_{p-2}, \\ pW^{p-1} + UV\dfrac{\partial}{\partial W}\Phi_{p-2}, \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} \Phi_{p-2}(0, 1, 0), \\ 0, \\ 0. \end{cases}$$

Explicitons

$$(12)\qquad \begin{cases} \Phi_{p-2}(U, V, W) \equiv \varphi_{p-2}(U, V) + W\varphi_{p-3}(U, V) + \ldots + W^{p-2}\varphi_0, \\ \varphi_r(U, V) \equiv \alpha_{r,0}U^r + \alpha_{r,1}U^{r-1}V + \ldots + \alpha_{r,r}V^r. \end{cases}$$

En faisant $V = 1$, nous avons entre U et W la relation

$$(13)\qquad W^p + U[\alpha_{p-2,0}U^{p-2} + \alpha_{p-2,1}U^{p-3} + \ldots + \alpha_{p-2,p-2} + W(\ldots)] = 0$$

et cette relation, pour $W = 0$, se réduit à

$$(14)\qquad U[\alpha_{p-2,0}U^{p-2} + \ldots + \alpha_{p-2,p-2}] = 0.$$

On voit que, si $\alpha_{p-2,p-2} \neq 0$, l'équation (14) admet une racine simple $U = 0$, de sorte que la tangente $Y = 0$, de coordonnées tangentielles isotropes $(0, 1, 0)$ est tangente simple et a pour point de contact le point de coordonnées tangentielles $(\alpha_{p-2,p-2}, 0, 0)$, c'est-à-dire le point cyclique situé sur la tangente isotrope en jeu; de plus la racine de l'équation (13) en U qui s'annule pour $W = 0$ est développable en série

$$(15)\qquad U = \frac{-W^p}{\alpha_{p-2,p-2}} + \lambda_1 W^{p+1} + \lambda_2 W^{p+2} + \ldots,$$

de sorte que, suivant la terminologie de G. Halphen, le point isotrope est l'*origine d'un cycle de degré* $p - 1$ *et classe* 1; *la tangente isotrope en jeu est tangente simple, mais son point de contact est multiple d'ordre* $p - 1$ *pour la courbe.*

Si nous restons provisoirement dans ce cas, qui doit être estimé le plus général quand les valeurs numériques des divers coefficients sont choisies au hasard, si la courbe n'a aucune tangente multiple, elle est de degré $p(p-1)$. La droite de l'infini coupe la courbe C en I, J qui comptent chacun pour $p - 1$ intersections et en $(p-2)(p-1)$ autres points que nous allons déterminer; si $(\alpha, \beta, 0)$ sont les coordonnées isotropes d'un point de la droite de l'infini, nous obtenons les tangentes issues de ce point en adjoignant à l'équation (10) l'équation $\alpha U + \beta V = 0$, ce qui nous permet de remplacer U par β, V par $-\alpha$ et donne l'équation en W

$$(16)\qquad W^p - \alpha\beta\Phi_{p-2}(\beta, -\alpha, W) = 0.$$

Si cette équation a une racine multiple, deux cas sont possibles et deux seulement :

a. le point $(\alpha, \beta, 0)$ *appartient à la courbe;*
b. le point $(\alpha, \beta, 0)$ *est le point à l'infini d'une tangente multiple.*

On devra donc égaler à zéro le discriminant de l'équation (16) et, si la courbe est effectivement de genre $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$, nous aurons les points à l'infini: l'équation obtenue est homogène en α et β et, en supprimant les facteurs α^{p-1}, β^{p-1}, est de degré $(p-2)(p-1)$ en $\alpha : \beta$. Si la courbe admet une tangente

double non inflexionnelle, le genre diminue d'une unité, le nombre des points à l'infini de deux unités; si la courbe devient unicursale grâce à l'existence de $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ tangentes doubles ordinaires, le degré s'abaisse au minimum $2(p-1)$; nous pouvons remarquer que, *dans le cas précis où nous nous sommes placés*, $\alpha_{p-2,\,p-2} \neq 0$, *si la courbe est unicursale grâce uniquement à la présence de tangentes doubles, aucune ne peut être inflexionnelle, puisque le degré est au moins* $2(p-1)$, I *et* J *étant multiples d'ordre* $(p-1)$ *chacun.*

Si $\alpha_{p-2,\,p-2}$ est nul, les résultats sont différents; *mais la droite* OI (*ou* OJ) *reste tangente à la courbe en* I (*ou* J), *avec d'autres points de contact ou de sécance éventuels;* pour ne pas allonger ce travail, nous nous bornerons, en fin d'étude, à donner quelques détails relatifs aux épicycloïdes, aux courbes unicursales et aux courbes de classe 3.

On voit aisément qu'*une courbe* C, *parallèle à une courbe* C *solution de notre problème, est une nouvelle solution*, la classe p étant remplacée par $2p$, si C n'est pas courbe de direction, et restant p si C est de direction. Cela se conçoit géométriquement, en remarquant que les parallèles à la distance a d'une droite (D), $ux+vy+w=0$ ont pour équation $ux+vy+w \pm a\sqrt{u^2+v^2}=0$ et coïncident avec D uniquement si D est isotrope; de sorte que C′ est elle aussi une courbe algébrique ayant pour tangentes isotropes seulement OI, OJ, ce qui est notre critérium. Analytiquement, l'équation

$$W^p + UV\Phi_{p-2}(U, V, W) = 0$$

est remplacée par la nouvelle

$$(W + a\sqrt{UV})^p + UV\Phi_{p-2}[U, V, W + a\sqrt{UV}] = 0,$$

qui devient rationnelle sous la forme

$$[W^p + C_p^2 a^2 UVW^{p-2} + \ldots + UV\psi_{p-2}(U, V, W)]^2 = UV[C_p^1 a W^{p-1} + \ldots + \psi_{p-1}(U, V, W)]^2,$$

où ψ_{p-2}, ψ_{p-1} sont certains polynomes homogènes de degré égal à leur indice (1).

La développée d'une courbe C *étudiée ici n'appartient pas en général au type étudié ici :* si C admet des points à l'infini autres que I, J, la développée C′ admet, en chacun d'eux, la droite de l'infini comme tangente particulière, ce qui exclut C′ [Ainsi, pour l'exemple $w^3+(u^2+v^2)u=0$, la développée a pour

(1) Il est facile de voir pourquoi, si la courbe est de direction, la courbe parallèle se décompose en deux courbes, distinctes, de même classe que la courbe de départ. Prenons l'exemple de la courbe de classe 4. $W^2 - \varepsilon\sqrt{UV}(AU+BV+CW)=0$ où ε signifie ± 1; en remplaçant W par $W + a\varepsilon_1\sqrt{UV}$ où ε_1 signifie encore ± 1, on obtient l'équation

$$(W^2 + a^2 UV - Ca\varepsilon\varepsilon_1 UV)^2 - UV[2aW - \varepsilon\varepsilon_1(AU+BV+CW)]^2 = 0,$$

qui définit, suivant que $\varepsilon\varepsilon_1 = +1$ ou -1, deux nouvelles courbes de classe 4, analytiquement distinctes.

équation $27v_1^2w_1^3+(u_1^2+v_1^2)u_1^3=0$]. *Si la courbe* C *ne recoupe pas la droite de l'infini, en dehors de* I *et* J, *la développée* C' *appartient elle aussi au type étudié ici :* c'est le cas pour les courbes unicursales que nous avons indiquées précédemment.

4. *Courbes de classe* 2 *et de classe* 3. — *Pour la classe* 2, la solution est évidente et constituée : *dans le cas de dégénérescence, par les deux points cycliques, dans le cas normal par un cercle quelconque de centre* O.

Pour la classe 3, *les cas de dégénérescence sont constitués soit par l'ensemble des points cycliques et d'un point quelconque, soit par l'ensemble d'un cercle de centre* O *et son centre.* Pour le cas normal, nous obtenons l'équation à trois paramètres

$$w^3+3(u^2+v^2)(Au+Bv+Cw)=0. \tag{17}$$

A et B sont supposés non nuls tous deux ; *la courbe possède trois tangentes simples de rebroussement* obtenues en joignant à $w=0$ l'une des équations $u+iv=0$, $u-iv=0$, $Au+Bv+Cw=0$.

Les points de contact sont respectivement I, J et K (A, B, C). Une rotation des axes autour de O permet de supposer B nul : K est alors sur Ox. Pour la clarté, séparons d'abord les cas où le genre est un ou zéro; appliquons la méthode exposée au paragraphe précédent pour obtenir soit les points à l'infini, soit les tangentes doubles; en remplaçant (u, v) par $(\beta, -\alpha)$, nous avons l'équation en w,

$$w^3+3(\alpha^2+\beta^2)(Cw-A\beta)=0,$$

qui admet une racine double si l'on a

$$(\alpha^2+\beta^2)^2[4C^3(\alpha^2+\beta^2)+9A^2\beta^2]=0;$$

la solution $\alpha^2+\beta^2=0$ fournit I, J qui sont points de rebroussement ($w=0$ est alors racine triple); étudions donc le cas où le rapport $\alpha:\beta$ est racine de $4C^3(\alpha^2+\beta^2)+9A^2\beta^2=0$; si C est nul, on trouve $\beta^2=0$ et nous obtenons le point de rebroussement K situé à l'infini sur Ox. Écartant $C=0$ et $\alpha^2+\beta^2=0$, nous avons l'équation $4C^3(\alpha^2+\beta^2)+9A^2\beta^2=0$, qui fournit deux valeurs opposées, distinctes, de $\beta:\alpha$, *si* $9A^2+4C^3$ *n'est pas nul; la courbe est alors de degré* 6 *et genre* 1; les deux points à l'infini, autres que I et J, sont réels si $C(9A^2+4C^3)$ est négatif, imaginaires conjugués si ce produit est positif. Mais si A, C varient d'une façon continue, de sorte que $9A^2+4C^3$, d'abord non nul, tende vers zéro, deux asymptotes de la courbe, d'abord distinctes, se confondent en une seule droite Δ, parallèle à l'axe Oy; la courbe se décompose en cette droite Δ comptée deux fois et un résidu de degré 4, tangent deux fois à Δ; nous savons qu'*une courbe de degré* 4, *qui est de classe* 3 *et admet* I, J *comme rebroussements, est une cardioïde.* Vérifions-le : on peut, en vertu de $9A^2+4C^3=0$,

exprimer A, C au moyen d'un paramètre R par les formules $A = \frac{R^2}{12}$, $C = -\frac{R^4}{4}$; si l'on pose $u = \cos 3\varphi$, $v = \sin 3\varphi$, l'équation tangentielle cartésienne devient

$$4\left(\frac{w}{R}\right)^3 + \cos 3\varphi - 3\left(\frac{w}{R}\right) = 0,$$

qui se résoud aussitôt par division de l'angle 3φ par 3, car l'équation de degré 3 en w équivaut à $\frac{w}{R} = -\cos\varphi$ (l'angle 3φ a été déterminé à 2π près et l'on a bien, pour w, trois déterminations); l'équation de la tangente est obtenue sous la forme paramétrique

$$x\cos 3\varphi + y\sin 3\varphi - R\cos\varphi = 0. \tag{18}$$

Le paramètre unicursal à employer est $t = \operatorname{tg}\varphi$.

Supposons maintenant (avec B = 0, obtenu par rotation des axes autour de O), $9A^2 + 4C^3 \neq 0$; *la courbe* (C) *est de classe* 3, *degré* 4, *genre* 1. *L'axe* OK (*devenu* Ox) *est axe de symétrie de la courbe*, car chaque solution (u, v, w) est accompagnée de la solution (u, $-v$, w). Rappelons la propriété classique : *une courbe de classe* 3 *et genre* 1 *possède neuf tangentes de rebroussement; le point de concours de deux quelconques d'entre elles appartient à une troisième, de sorte que sur chaque tangente de rebroussement, il y a quatre points de cette espèce; sur les neuf rebroussements, un ou trois seulement sont réels* (*si trois rebroussements sont réels, les tangentes correspondantes sont concourantes*).

Soient (L, L′), (L_1, L_1'), (L_2, L_2') les six points de rebroussement autres que I, J, K, les points d'un même groupe étant symétriques par rapport à OK; deux de ces couples (L_1, L_1'), (L_2, L_2') sont sûrement imaginaires, l'autre (L, L′) est formé soit de deux points réels, soit de deux points imaginaires conjugués. Les trois tangentes à la courbes issues de l'un quelconque L des six points de rebroussement sont confondues avec la tangente de rebroussement, de sorte que *cette tangente est l'une des p-sectrices, donc fait avec* OL *un angle égal à* $\pm\frac{\pi}{3}$. Or la tangente en L doit porter quatre points où se croisent trois tangentes de rebroussement : trois de ces points sont à la rencontre avec OI, OJ, OK; le quatrième correspond à un point commun à cette tangente et aux tangentes en L_1, L_2 (on peut en effet choisir les notations pour qu'il en soit ainsi); appelons-le λ; les trois angles (OL, λL), (OL_1, λL_1), (OL_2, λL_2), d'après un résultat précédent, sont égaux à $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$, de sorte que deux d'entre eux sont certainement égaux : or ces trois points L, L_1, L_2 *jouent le même rôle, de sorte que les trois angles sont égaux et que les points* O, λ, L_1, L_2, L_3 *sont sur un même cercle* Γ (ceci sera vérifié analytiquement, de façon à dissiper tout doute sur la rigueur du raisonnement) De chaque point l du cercle Γ, le vecteur $\overrightarrow{O\lambda}$ est vu sous un angle (Ol, $l\lambda$) égal à $\varepsilon\frac{\pi}{3}$ ($\varepsilon = +1$ ou -1) et les points (O, λ', L′, L_1', L_2') symé-

triques des précédents par rapport à OK sont sur le cercle Γ' tel que de chacun des points l' de ce cercle le vecteur $\overrightarrow{O\lambda'}$ soit vu sous l'angle $(Ol', l'\lambda')$ constamment égal à $-\frac{\varepsilon\pi}{3}$. Or chaque cercle Γ ou Γ' coupe la courbe C en douze points, dont cinq, à savoir (I, J, L, L_1, L_2) ou (J, I, L', L'_1, L'_2) sont des rebroussements; il reste donc deux points d'intersection à trouver qui sont sûrement des points remarquables de C : *nous allons voir que ces deux points sont réunis en* K (*aussi bien pour* Γ *que pour* Γ') *et que* (O, λ, λ') *sont les sommets d'un triangle équilatéral dont* K *est le centre de gravité*. Les droites λL, λL_1, λL_2 admettent λO comme trisectrice.

On sait que les rebroussements de (C) s'obtiennent en adjoignant à l'équation

$$(19) \qquad (C) \equiv w^3 + 3(u^2 + v^2)(Au + Cw) = 0,$$

l'équation de la hessienne (H), courbe ayant les mêmes tangentes de rebroussement, et que quatre courbes du faisceau tangentiel $(C) + \lambda(H) = 0$ dégénèrent en trois points, de façon à obtenir ainsi le total des 12 points où il y a concours de trois tangentes de rebroussement. On a

$$(20) \qquad (H) \equiv C^2 w^2 + 4AC u w^2 + [(3A^2 - C^2)u^2 - (A^2 + C^2)v^2]w - AC^2 u(u^2 + v^2) = 0,$$

$$(21) \qquad C^2(C) + 3(H) \equiv [(2Cw + 3Au)^2 - 3A^2 v^2]w = 0$$

(cette dernière combinaison est facile à obtenir, puisque l'un des 12 points de concours des tangentes de rebroussement est l'origine, qui a $w = 0$ pour équation tangentielle). Les facteurs $2Cw + Av\sqrt{3} + 3Au = 0$ donnent les points λ, λ', à distance finie, si $C \neq 0$

$$\lambda\left(\frac{3A}{2C}, \frac{A\sqrt{3}}{2C}\right), \qquad \lambda'\left(\frac{3A}{2C}, \frac{-A}{2C}\sqrt{3}\right).$$

L'angle $(Ox, O\lambda)$ vaut $\frac{\pi}{6}$, $O\lambda = O\lambda' = \frac{A\sqrt{3}}{C}$, $OK = \frac{A}{C}$, de sorte que $O\lambda\lambda'$ est un triangle équilatéral de centre K; le cercle Γ a pour centre le point μ, symétrique de K par rapport à $O\lambda$ et pour rayon $\frac{A}{C}$; μ et μ' sont les sommets des deux triangles équilatéraux dont O, K sont deux sommets et ont pour coordonnées

$$\mu\left(\frac{A}{2C}, \frac{A}{2C}\sqrt{3}\right), \qquad \mu'\left(\frac{A}{2C}, \frac{-A}{2C}\sqrt{3}\right).$$

Les coordonnées tangentielles des six tangentes de rebroussement autres que OI, OJ, OK s'obtiennent en adjoignant à l'équation de (C) les équations

$$3Au \pm Av\sqrt{3} + 2Cw = 0.$$

Pour faire toutes les vérifications, supposons $C \neq 0$, de façon que K soit à distance finie; en faisant une homothétie de pôle O, les coefficients A, C sont

remplacés par $A:\lambda^3$ et $C:\lambda^2$; on peut donc supposer, pour simplifier, $C=1$; le cercle Γ doit donc avoir pour équation $x^2+y^2-Ax-A\sqrt{3}y=0$; l'équation tangentielle de λ est $3Au+A\sqrt{3}v+2w=0$; en remplaçant w par la valeur déduite de cette équation, l'équation de (C) devient

$$A^2[3u+v\sqrt{3}]^3+12(u^2+v^2)(u+v\sqrt{3})=0. \tag{22}$$

Les coordonnées du point de contact d'une tangente issue de λ s'obtiennent en calculant

$$3Au^2+Av^2+2uw, \qquad 2Auv+2vw, \qquad w^2+u^2+v^2,$$

remplaçant w par $-\frac{A}{2}(3u+v\sqrt{3})$ et divisant les deux premières expressions par la dernière, on a ainsi

$$x=\frac{Av(v-u\sqrt{3})}{u^2+v^2+\frac{A^2}{4}(3u+v\sqrt{3})^2}, \qquad y=\frac{-vA(u+v\sqrt{3})}{u^2+v^2+\frac{A^2}{4}(3u+v\sqrt{3})}. \tag{23}$$

Si l'on calcule x^2+y^2, $A(x+y\sqrt{3})$, on obtient

$$x^2+y^2=\frac{4A^2v^2(u^2+v^2)}{\left[u^2+v^2+\frac{A^2}{4}(3u+v\sqrt{3})^2\right]^2}, \qquad Ax+Ay\sqrt{3}=\frac{-2A^2v(u\sqrt{3}+v)}{u^2+v^2+\frac{A^2}{4}(3u+v\sqrt{3})^2} \tag{24}$$

et l'on constate sans peine que l'équation $x^2+y^2-Ax-Ay\sqrt{3}=0$, une fois le facteur v enlevé, équivaut à l'équation (22), de sorte que nous avons bien vérifié que le cercle (Γ) contient I, J, K, O, λ, et les trois points de contact des tangentes de rebroussement issues de λ; on peut remarquer que les tangentes à (Γ) en O et λ concourent en λ'. Nous avons ainsi vérifié toutes les circonstances prévues.

Si C *est nul*, les points λ, λ' sont à l'infini sur les droites issues de O et inclinées de l'angle $\pm\frac{\pi}{6}$ sur Ox; les six tangentes de rebroussement autres que Ox, OL, OJ ont pour équation $x\pm\sqrt{3}y-\sqrt[3]{12}A=0$, où la racine cubique est prise successivement avec ses trois déterminations. Chaque cercle Γ ou Γ' est devenu une droite, issue de O, faisant avec Ox un angle égal à $\pm\frac{\pi}{6}$ et porte trois points de rebroussement; *avec la droite de l'infini, on a aussi trois droites contenant chacune trois points de rebroussement, tandis que les sommets du triangle qu'elles forment sont points de concours de trois tangentes de rebroussement.*

Il y a lieu maintenant de tirer les conséquences de ces résultats au point de vue des cubiques planes générales de genre 1 *ou de courbes de classe* 3 *et genre* 1. Les courbes de classe 3 et genre 1 que nous venons d'étudier sont, *projectivement parlant*, les courbes les plus générales de cette classe 3 et, par suite, les propriétés que nous venons de signaler sur l'ensemble des points et tangentes

de *rebroussement* (s'il s'agit de courbes de classe 3 et genre 1), ou d'*inflexion* s'il s'agit de cubiques de genre 1) ne sont qu'une forme *métrique* d'une propriété *projective* qu'il s'agit de mettre en évidence; contrairement à la règle générale, c'est la propriété projective qui revêt l'énoncé le plus simple, tandis que l'énoncé métrique, tout en ayant l'avantage de faire découvrir l'énoncé projectif, risque de le masquer au premier abord,

Énonçons la propriété projective pour les cubiques Γ de genre 1; *soit une répartition des neuf points d'inflexion* (A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3), (C_1, C_2, C_3) *sur trois droites* A, B, C; *il y a quatre répartitions de cette nature. Les six tangentes d'inflexion* B_i, C_j *et les deux droites* B, C *sont tangentes à une même conique* Γ *que* B, C *touchent aux points où* A *les rencontre.* (Je ne puis garantir que cette propriété soit inédite, mais je ne l'ai trouvée signalée nulle part; elle rentre dans la catégorité de ces propriétés qui sont presque évidentes, dès qu'elles sont signalées, et qui, souvent, ne sont découvertes que par hasard, à propos d'un problème plus ou moins éloigné (1). En effet, chaque point tel que A_i est pôle d'une homologie involutive, dont l'axe est la polaire de A_i par rapport au couple B, C, transformant Γ en elle-même et les tangentes aux B_i en les tangentes aux C_j (dans un ordre inutile à préciser ici); ces six tangentes touchent donc une même conique γ coupant B en deux points qui, par l'homologie précédente, deviennent les points où γ coupe C; mais ce raisonnement est aussi valable pour chaque point A_2 ou A_3 et sa polaire par rapport au couple B, C, de sorte que les deux points communs à γ et B sont confondus avec le point (A, B), les points communs à γ et C confondus avec le point (A, C). Ce théorème fournit ainsi huit tangentes d'une certaine conique et les points de contact de deux d'entre elles, ce qui fait, somme toute, l'équivalent de dix droites tangentes à une même conique.

On transforme sans difficulté ce théorème par polarité : *soit une courbe* (C) *de genre* 1 *et classe* 3, *et une répartition des neuf tangentes de rebroussement* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *en trois groupes de trois droites concourant en un point* α, β *ou* γ; *il y a quatre répartitions de cette nature; les six points de rebroussement relatifs aux deux groupes* β, γ *sont, avec ces deux points* β, γ, *situés sur une même conique dont les tangentes en* β, γ *sont* $\alpha\beta$ *et* $\alpha\gamma$.

Nous pouvons remarquer que la répartition signalée des neuf points d'inflexion sur trois droites A, B, C nous a fait découvrir trois coniques que nous appellerons (B, C), (C, A) (A, B) : les tangentes communes à (C, A) et (A, B) sont la droite A et les trois tangentes d'inflexion en A_1, A_2, A_3. Or il y

(1) Au cours de la correction des épreuves, M. B. Segre me communique très aimablement que ce résultat a été, partiellement, obtenu par Laguerre (*Journal de Math.*, II, 17, 1872, p. 15) : le procédé de Laguerre, fondé sur l'emploi des invariants et covariants, prouve que les 6 tangentes aux B_i et C_j ainsi que les droites B et C sont tangentes à une même conique, sans préciser que le point de contact de B ou C et celui où A les rencontre.

a un cas spécial à signaler, c'est celui où la conique (A, B) par exemple, qui est définie *tangentiellement*, dégénère *en deux points*, ce qui ne peut arriver que si *les tangentes en* A_1, A_2, A_3 *concourent* : d'après ce que nous avons dit sur les quatres tangentes communes à (C, A) et (A, B), *il en résulte que* (C, A) *dégénère aussi; donc aussi* (B, C), et l'on voit aussitôt que les sommets du triangle de côtés, A, B, C fournissent les couples de points en lesquels dégénèrent les coniques : *les tangentes en* B_1, B_2, B_3 *concourent au point commun à* C *et* A, *les tangentes en* C_1, C_2, C_3 *concourent au point commun à* B *et* A. C'est ce qui arrive pour la cubique d'équation $(x^2+y^2)x+1=0$; nous avons vérifié la propriété corrélative pour la courbe de classe 3 $w^3+(u^2+v^2)u=0$.

Si nous réfléchissons aux propositions qui précèdent, nous voyons sans peine qu'une transformation homographique simple réduit l'équation tangentielle de la courbe (C) générale de classe 3 et genre 1 à la forme

$$w^3+3(u^2+v^2)(Au+Cw)=0.$$

Il suffit en effet de considérer deux tangentes de rebroussement, prises au hasard parmi les neuf tangentes de cette espèce : soient I, J les points de contact et O le point commun à ces deux tangentes; par homographie, nous pouvons convertir I, J en les points cycliques et l'équation tangentielle de (C) prend la forme annoncée. Mais alors la propriété *métrique* que nous obtenons sur (C) après la transformation, propriété des trisectrices des tangentes concourantes, doit correspondre à une propriété *projective* commune à tout système de tangentes concourantes menées à une courbe arbitraire de classe 3 et genre 1 ; par dualité, il y a une propriété *projective* commune à tous les systèmes de points alignés que l'on peut obtenir sur une cubique plane Γ de genre 1. Énonçons-la : *étant donné une droite quelconque* D *coupant* Γ *en* M_1, M_2, M_3 *et la droite* $A(A_1, A_2, A_3)$, *portant les trois points d'inflexion* A_1, A_2, A_3, *en un point d, projetons* M_1, M_2, M_3 *sur* (A) *en* m_1, m_2, m_3 *à partir du point* o *commun aux tangentes en* A_1 *et* A_2 : *le produit des trois birapports* (A_1, A_2, o, m_i) *est égal à l'unité*; pour retrouver la forme métrique, supposons qu'une homographie fasse coïncider A_1, A_2, avec les points cycliques I, J et α_3 avec O : nous avons l'énoncé suivant : *soit une cubique* Γ *admettant* I *et* J *comme points d'inflexion; soit* O *le point commun aux deux asymptotes inflexionnelles isotropes; coupons* Γ *par une droite quelconque* D : *les droites* OM_1, OM_2, OM_3 *joignant le foyer* O *aux points d'intersection ont l'une de leurs trisectrices parallèle à* D. Si maintenant nous transformons ce dernier énoncé par polarité relativement à l'une des coniques $x^2 \pm y^2 = \pm 1$, nous trouvons une courbe de classe 3, et genre 1, admettant I, J comme points de rebroussement, et OI, OJ comme tangentes en ces points.

5. *Courbes de classe p ou de degré p.* — Autrement dit les équations

$$(26) \qquad w^p+(u^2+v^2)f_{p-2}(u, v, w)=0, \qquad z^p+(x^2+y^2)f_{p-2}(x, y, z)=0$$

sont, par rapport à un système d'axes cartésiens rectangulaires, les équations, tangentielles ou ponctuelles, homogènes d'une courbe algébrique de classe p ou degré p, telles que :

pour la première, tout système de tangentes concourantes admette pour p-sectrice la droite joignant leur point commun à l'origine;

pour la seconde, les rayons, joignant l'origine aux points communs à la courbe et à une droite D *quelconque, admettent la droite* D *comme direction de p-sectrice.*

Cette seconde propriété se déduit en effet de la première par polarité relativement à une conique d'équation $x^2 - y^2 = K$, où K est une constante quelconque ; si l'on prend, par exemple, $x^2 + y^2 + 1 = 0$, chaque tangente issue d'un point donné P a pour transformée un point commun à la seconde courbe et à une droite arbitraire, le rayon vecteur étant perpendiculaire à la tangente relative à la première courbe.

Ce que nous venons d'expliquer donne le moyen d'énoncer *la propriété possédée par une courbe* (C) *de classe p possédant un certain point* I *telle que la tangente en* I *à* (C) *soit la seule tangente à* (C) *issue de ce point* I *et un autre point* J *de même définition;* O *étant le point commun aux tangentes en* I *et* J, *et si* $m_1, m_2, \ldots, m_p$ *sont les points de contact avec* (C) *des tangentes issues d'un point* M *quelconque, le produit des p birapports* (MI, MJ, MO, Mm_i) *est égal à l'unité* et c'est d'ailleurs ce qu'exprime l'égalité (6) qui nous a servi de point de départ.

La propriété corrélative s'énonce ainsi : *si une courbe algébrique* Γ *de degré p possède deux points* I, J *tel que les tangentes en* I *ou* J *coupent la courbe en p points réunis en* I *ou* J, *soit* O *le point de concours des tangentes en* I, J; *coupons la courbe par une droite quelconque* D *qui la rencontre en* $m_1, m_2, \ldots, m_p$; D *coupe la droite* I J *en* μ : *le produit des p birapports* (OI, OJ, Oμ, Om_i) *est égal à l'unité.*

Si nous appliquons ces principes au cas de $p = 2$, nous retrouvons des théorèmes classiques : soient deux points I, J d'une conique et O le point commun aux tangentes en I et J; d'un point M menons les tangentes Mm_1, Mm_2 touchant la conique en m_1, m_2 : MO est rayon double de l'involution définie par les couples (MI, MJ) et (Mm_1, Mm_2). Coupons la conique par une droite D quelconque qui donne deux points d'intersection d_1, d_2 et coupe I J en d : le point d est point double de l'involution définie par les couples (OI, OJ) et (Om_1, Om_2).

6. *Épicycloïdes algébriques.* — Sur le cercle de centre O et rayon R, joignons les points ($R\cos m\varphi$, $R\sin m\varphi$), ($R\cos q\varphi$, $R\cos q\varphi$, $R\sin q\varphi$) où m, q sont deux entiers *positifs, premiers entre eux.* La corde obtenue a pour équation

$$x\cos\frac{m+q}{2}\varphi + y\sin\frac{m+q}{2}\varphi - R\cos\frac{m-q}{2}\varphi = 0, \tag{27}$$

ou encore, en posant $X = x + iy$, $Y = x - iy$, $t = \cos\varphi + i\sin\varphi$,

$$X + Yt^{m+q} - R(t^m + t^q) = 0. \tag{28}$$

La droite $X = 0$ est obtenue pour $t = 0$ et il n'y a pas d'autre tangente qui lui soit parallèle ; de même pour la droite $Y = 0$ et $t = \infty$; la droite de l'infini n'est jamais obtenue; nous avons ainsi prouvé que toute épicyloïde algébrique est solution de notre problème. Les coordonnées du point de contact sont

$$X = \frac{R(mt^q + qt^m)}{m+q}, \qquad Y = \frac{R(mt^{-q} + qt^{-m})}{m+q}. \tag{29}$$

La courbe est de classe $p = m + q$, de degré $2m$ si $m > q$. La courbe ne coupe la droite de l'infini qu'en I et J, qui sont des points multiples d'ordre m; la tangente $X = 0$ coupe la courbe aux points donnés par $qt^{m-q} + m = 0$ situés à distance finie et en nombre $m - q$; il y a donc $m + q$ points d'intersection réunis au point de contact. On remarquera, conformément à ce qui a été indiqué en introduction, que le degré, au lieu d'être égal à $2(m + q - 1)$, n'est égal qu'à $2m$; cela tient aux caractéristiques du cycle $t = 0$ et du cycle $t = \infty$. Si l'on prend la courbe C′ parallèle, à la distance a, la tangente générale a pour équation

$$X + Yt^{m+q} - R(t^m + t^q) + at^{\frac{m+q}{2}} = 0. \tag{30}$$

Si m et q sont impairs tous deux, cette équation est rationnelle en t, car l'épicycloïde est alors courbe de direction, de sorte que C′ est elle aussi courbe de direction et de classe $m + q$. Si m et q sont l'un pair, l'autre impair, en posant $t = \theta^2$, on a une représentation, impropre de C et propre de C′ qui, cette fois, est de classe $2(m + q)$; de toutes façons C′ est elle aussi une solution de notre problème.

7. *Courbes unicursales.* — Supposons la courbe réelle et rapportée à un paramètre réel; l'équation isotrope de la tangente générale est

$$Xf(t) + Y\varphi(t) + \psi(t) = 0,$$

où $\psi(t)$ est un polynome à coefficients réels et f, φ deux polynomes à coefficients respectivement imaginaires conjugués. Il n'y a pas d'autres tangentes isotropes que $X = 0$ ou $Y = 0$: donc toute racine de f (ou φ) est racine de ψ sans être racine de φ (ou f); puisque la droite de l'infini n'est pas tangente, f et φ ne peuvent avoir de racine commune et, de plus, le degré de ψ est au plus égal au degré commun de f, φ. Comme toute racine de $(f\varphi)$ est racine de ψ, et que les degrés de multiplicité des racines n'ont pas été invoqués jusqu'ici, puisque le degré de ψ est au plus égal à celui de f. et φ, on en conclut que parmi les racines de f (ou φ) il y en a une ou plusieurs qui ont un degré de multiplicité supérieur à celui qu'elles ont dans ψ. D'ailleurs, comme le point de

contact d'une tangente (t) est donné par les coordonnées isotropes homogènes

$$\varphi\psi' - \psi\varphi', \quad \psi f' - f\psi', \quad f\varphi' - \varphi f',$$

un nombre t racine d'ordre n de φ, et n_1 de ψ fournit la tangente $X = 0$ avec le point de contact à l'infini si $n > n_1$, à l'origine si $n < n_1$, en un point de $X = 0$ distinct de l'origine et du point à l'infini si $n = n_1$; donc, puisque nous avons vu que φ a au moins une racine de degré de multiplicité supérieur à celui qu'elle a dans ψ, le point cyclique situé sur $X = 0$ est le point de contact d'une certaine branche de la courbe avec cette droite (ou de plusieurs branches). Aucune racine de f ni φ ne peut être réelle, car elle serait commune à f, φ et aussi à ψ.

D'après cela, $t_1, t_2, \ldots t_h$ étant des nombres *imaginaires* quelconques, en nombre h supérieur ou égal à 1, on aura

$$f \equiv (t - t_1)^{\alpha_1}(t - t_2)^{\alpha_2} \ldots (t - t_h)^{\alpha_h},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ sont des entiers dont l'un au moins est supérieur à l'unité. Le polynome φ est le polynome conjugué de f; enfin ψ admet *toutes* les racines $t_1, t_2, \ldots, t_h$ et les racines conjuguées $t'_1, t'_2, \ldots, t'_h$ avec des exposants *non nuls*, $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_h$, au plus égaux respectivement au nombre correspondant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$, un ou plusieurs des α' étant inférieur à l'α correspondant; ψ peut admettre d'autres racines arbitraires, avec la restriction que le degré de ψ soit au plus égal à $\alpha_1 + \ldots + \alpha_h$; on a donc

$$\psi \equiv [(t - t_1)(t - t'_1)]^{\alpha'_1}[(t - t_2)(t - t'_2)]^{\alpha'_2} \ldots [(t - t_h)(t - t'_h)]^{\alpha'_h} X(t),$$

où $X(t)$ est un polynome entier dont le degré est au plus égal à la différence *positive ou nulle* $\Sigma\alpha_i - 2\Sigma\alpha'_i$; si nous posons $\alpha'_i = \alpha_i - \beta_i$, on a $0 \leq \beta_i < \alpha_i$ et l'on doit avoir $2\Sigma\beta_i - \Sigma\alpha_i \geq 0$. Nous obtenons ainsi la courbe unicursale générale solution de notre problème.

Nous allons maintenant déduire de courbes épicycloïdales algébriques, ayant toutes leur foyer en O, de même classe p (ou diviseur de p), une courbe que nous pourrons déclarer *transformée de ces épicycloïdes par parallélisme moyen*, de même classe p et solution de notre problème. Choisissons un nombre d *entier positif, inférieur à p, de même parité que p*; calculons les entiers m, q par les relations

$$m + q = p, \qquad m - q = d, \qquad m = \frac{p + d}{2}, \qquad q = \frac{p - d}{2},$$

et sur le cercle du centre O, rayon R, joignons les points M, M', tel que $(Ox, OM) = \beta + m\psi$, $(Ox, OM') = \beta + q\psi$, β désignant un angle fixe choisi arbitrairement. La corde MA' a pour équation

$$x\cos\left(\beta + \frac{m+q}{2}\psi\right) + y\sin\left(\beta + \frac{m+q}{2}\psi\right) - R\cos\frac{m-q}{2}\psi = 0.$$

En posant

$$\psi = \varphi - \frac{2\beta}{m+q} = \varphi - \frac{2\beta}{p}, \qquad \alpha = \frac{2\beta}{p},$$

nous avons l'équation

$$(22) \qquad x\cos\frac{p\varphi}{2} + y\sin\frac{p\varphi}{2} - R\cos\frac{d}{2}(\varphi - \alpha) = 0.$$

La droite (22) enveloppe une épicycloïde de classe p, déduite de l'épicycloïde enveloppe de (19) par une rotation d'angle β autour de O; le nombre de rebroussements est égal à d : du moins, ces résultats sont exacts si les deux entiers p, d (de même parité) sont premiers entre eux s'ils sont impairs ou, s'ils sont pairs, si $\frac{p}{2}$ et $\frac{d}{2}$ sont premiers entre eux; dans le cas où les entiers en jeu $\left(p \text{ et } d, \frac{p}{2}\right.$ et $\left.\frac{d}{2} \text{ suivant le cas}\right)$ ont un plus grand commun diviseur D non égal à 1, la classe et le nombre de rebroussements seraient $\frac{p}{D}$, $\frac{d}{D}$; mais en conservant le paramètre φ, nous avons une représentation impropre de la courbe qui la fournit parcourue D fois quand φ varie de zéro à 2π et nous regarderons cette courbe, parcourue D fois, comme étant de classe p encore. Considérons diverses valeurs d_k, α_k, R_k de l'entier d et des paramètres α, R, l'entier k pouvant prendre les valeurs $1, 2, \ldots, N$ (d_k est inférieur à p et de même parité que p).

Chacune des droites

$$(23) \qquad x\cos\frac{p\varphi}{2} + y\sin\frac{p\varphi}{2} - R_k\cos\frac{d_k}{2}(\varphi - \alpha_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

est tangente à une certaine épicycloïde E_k; nous allons, pour une direction déterminée, Oy par exemple, mener à chaque courbe E_k une tangente (et une seule) parallèle à cette direction; on peut supposer que, pour chacune de ces tangentes, le paramètre φ est égal à *zéro* $\left(\text{car, sans changer la courbe, on peut}\right.$ remplacer α_k par $\alpha_k + \frac{2\lambda\pi}{p}$, où λ est un entier arbitraire, et φ par $\left.\varphi + \frac{2\lambda\pi}{p}\right)$ si nous faisons varier φ de zéro à 2π, chacune des tangentes choisies pour chaque E_k varie et, pour chaque valeur de φ, nous avons N tangentes parallèles; la droite d'équation

$$(24) \qquad x\cos\frac{p\varphi}{2} + y\sin\frac{p\varphi}{2} - \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} R_k\cos\frac{d_k}{2}(\varphi - \alpha_k) = 0$$

enveloppe une courbe E′ solution de notre problème; *la tangente de paramètre* φ *est parallèle aux tangentes* (φ) *des diverses courbes* E_k, *son point de contact est le centre de gravité des points de contact de ces tangentes et la distance algébrique de cette droite à l'origine est la moyenne arithmétique des distances algébriques de ces droites à l'origine.*

Puisque, pour la valeur initiale de φ, nous avons pu choisir *ad libitum* pour

chaque courbe E_k l'une des p tangentes parallèles à cette direction, nous avons N^{p-1} courbes algébriquement distinctes déduites de $E_1, E_2, \ldots, E_N$ (ou du moins le quotient de N^{p-1} par le produit des plus grands communs diviseurs de chaque couple $\frac{p+d_k}{2}, \frac{p-d_k}{2}$). Quel que soit le nombre N, chacune des courbes E′ ainsi obtenues peut être regardée comme enveloppe d'une droite

$$X + Yt^p - \sum_d \left\{ (a_d + ib_d)t^{\frac{p+d}{2}} + (a_d - ib_d)t^{\frac{p-d}{2}} \right\} = 0,$$

où l'entier d prend toutes les valeurs de même parité que p et inférieures ou égales à $\frac{p}{2}$.

Les courbes parallèles à une épicycloïde s'obtiennent par ce procédé : si l'épicycloïde est de classe $2p$, elle est courbe de direction; si elle est de classe impaire, on lui donne la classe apparente double en remplaçant le paramètre t qui figure dans l'équation (28) par 0, avec $t = 0^2$; cela fait, la seconde courbe épicycloïdale est simplement le cercle de centre O que l'on considère comme enveloppe de la droite

$$x\cos p\varphi + y\sin p\varphi - a = 0,$$

pendant que l'épicycloïde est l'enveloppe de la droite

$$x\cos p\varphi + y\sin p\varphi - R\cos d(\varphi - \alpha) = 0.$$

8. *Courbes*

$$f_p(u, v) + w(u^2 + v^2)f_{p-3}(u, v, w) = 0 \quad \text{et} \quad f_p(x, y) + z(x^2 + y^2)f_{p-3}(x, y, z) = 0,$$

— J'ai rappelé les propriétés des premières dans l'Introduction; les secondes, déduites des premières par polarité relativement à un cercle $x^2 + y^2 \pm z^2 = 0$ (ou par rapport à une hyperbole équilatère $x^2 \pm y^2 = 1$) sont telles que, coupant la courbe par une droite quelconque D, les rayons vecteurs joignant O aux points d'intersection, forment un système dont les p-sectrices sont fixes, indépendantes du choix de la droite D. Par transformation homographique, on obtient, pour la première série, des courbes de classe p ayant une tangente double T touchant la courbe en deux points I, J tels que toutes les tangentes issues de I ou J coïncident avec T; la seconde série donne des courbes de degré p ayant un point double O tel que les points communs à la courbe et à chacune des tangentes en O soient tous confondus avec O. L'interprétation projective se fera comme au paragraphe 5.

CLASSES DE SATURATION

DE

CERTAINS PROCÉDÉS D'APPROXIMATION

DES

SÉRIES DE FOURIER DES FONCTIONS CONTINUES

ET APPLICATIONS

A QUELQUES PROBLÈMES D'APPROXIMATION

PAR M. M. ZAMANSKY.

INTRODUCTION.

Le problème particulier qui fut à l'origine de ce travail consistait à trouver un exemple de classe de saturation attachée à un procédé d'approximation. Le problème a été posé par M. Favard (1) et nous donnons quelques réponses dont celle relative au procédé de Fejér. On sait que ce procédé ne peut donner d'approximation meilleure que $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Nous avons alors cherché quelle était l'approximation fournie par les sommes de Fejér d'une fonction continue périodique f, en un point, lorsque la meilleure approximation trigonométrique était $O\left(\frac{1}{n}\right)$. L'importance de cette classe de fonctions a été mise en évidence en 1945 par M. Zygmund.

Dans la solution de ce problème nous avons utilisé d'une part les propriétés de la suite des dérivées de polynomes trigonométriques convergeant uniformément vers f et d'autre part une méthode de calcul. Nous avons appliqué ces propriétés et cette méthode à quelques autres problèmes. La solution de certains d'entre eux résulte de la connaissance de classes de saturation.

Le théorème de M. S. Bernstein sur la majoration de la dérivée d'un polynome trigonométrique intéresse l'ensemble de ces polynomes. Lorsqu'il s'agit

(1) *Voir* par exemple *Colloque d'Analyse harmonique* (Publications du C. N. R. S., Paris).

d'une classe particulière de polynomes trigonométriques il peut être précisé. Ainsi l'hypothèse $|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ entraîne $|P'_n| = O(\log n)$, et ce dernier ordre de grandeur peut effectivement être le meilleur; mais $|P''_n| = O(n)$ alors que le théorème de Bernstein donnerait seulement $|P''_n| = O(n \log n)$.

Les propriétés des dérivées de sommes trigonométriques convenablement choisies ont donné une autre condition nécessaire et suffisante pour que f fût approchée à $O\left(\frac{1}{n}\right)$ près par ses sommes de Fejér, à savoir que la fonction conjuguée f^* appartînt à la classe Lip 1. Nous en avons déduit la condition pour que $f^* \in \text{Lip } 1$, exprimée par une intégrale portant sur f.

Nous indiquons aussi les classes de saturation attachées à d'autres procédés d'approximation. En introduisant des différences d'ordre pair et symétriques, nous obtenons un procédé d'approximation auquel correspond une approximation de saturation $O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$, p étant un entier positif donné. De leur étude nous avons déduit une infinité de conditions toutes équivalentes permettant de reconnaître que la meilleure approximation d'ordre n, $E_n(f)$ est $O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$.

Nous avons montré que les procédés obtenus par les moyennes de Cesaro d'ordre entier possèdent la même classe de saturation que celle attachée au procédé de Fejér. Enfin le procédé de Jackson a permis, une fois sa classe de saturation déterminée, d'indiquer deux conditions nécessaires et suffisantes pour que $f(x)$ possédât une dérivée $f'(x)$ qui appartînt à la classe Lip 1, condition exprimée à partir de $f(x)$ seulement et dont l'une est que $\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ fût bornée uniformément en x et h.

Dans la troisième Partie, nous avons appliqué la méthode précédente à divers problèmes. En particulier dans l'hypothèse où f est continue, nous généralisons le théorème de Young qui donne la condition nécessaire et suffisante de convergence de la série conjuguée lorsque f est à variation bornée, nous indiquons la condition nécessaire et suffisante de convergence de la série de Fourier à $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ près $(0 < \alpha \leq 1)$ exprimée au moyen des dérivées des sommes de Fourier, et nous donnons la solution du problème des dérivées d'ordre non entier.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

1. Classes de fonctions Lip α, C_A. — Lorsque $f(x)$ satisfait uniformément à une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha (0 < \alpha \leq 1)$, c'est-à-dire lorsque $\frac{|f(x)-f(x')|}{|x-x'|^\alpha}$ est borné uniformément en x et x', nous écrirons $f \in \text{Lip } \alpha$.

Nous désignerons par C_A la classe des fonctions telles que

$$\left| \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} \right|$$

soit uniformément borné en x et t par A.

2. Polynomes ou sommes trigonométriques. — Sauf mention expresse contraire nous désignerons par $P_n(x)$ un polynome trigonométrique d'ordre n, c'est-à-dire une expression de la forme $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$. Soit $f(x)$ une fonction continue de période 2π; nous écrirons sa série de Fourier

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

et la série conjuguée $\sum_{1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$. $S_n(x)$ désignera la somme des $2n+1$ premiers termes de la série de Fourier de $f(x)$. C'est un polynome d'ordre n.

(N.1) $$\sigma_n(x) = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}$$

est la $n^{\text{ième}}$ somme de Fejér de $f(x)$. C'est une somme *d'ordre* $n-1$.

(N.2) $$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{\sin t} \sin(2n+1)t \, dt,$$

(N.3) $$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{\sin t} \sin(2n+1)t \, dt,$$

(N.4) $$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+2t)+f(x+2t)}{t^2} \sin^2 nt \, dt \quad (^1),$$

(N.5) $$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2} \sin^2 nt \, dt.$$

---

(1) On a aussi

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{\sin^2 t} \sin^2 nt \, dt.$$

Nous désignerons par $f^{\cdot}$ la fonction conjuguée d'une fonction f de période 2π, lorsqu'elle existe. On a

$$(N.6) \qquad S_n^{\cdot}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{\sin t}(\cos t - \cos(2n+1)t)\,dt.$$

Lorsque $f^{\cdot}$ existe,

$$(N.7) \qquad f^{\cdot} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x-2t)]\operatorname{cotgt}\,dt,$$

et lorsque l'intégrale suivante a un sens,

$$(N.8) \qquad f^{\cdot} - \sigma_n^{\cdot} = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{t^2}\sin 2nt\,dt.$$

Nous poserons

$$(N.9) \qquad V_n = 2\sigma_{2n} - \sigma_n.$$

L'expression

$$(N.10) \qquad J_{pn}(x) = \frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{t^{2p}}\sin^{2p} nt\,dt$$
$$= \frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+2t)}{t^{2p}}\sin^{2p} nt\,dt$$

est une somme trigonométrique d'ordre pn. Nous les appellerons sommes de Jackson-de la Vallée-Poussin [6].

On a

$$\alpha_p = \frac{1}{2\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2p} t}{t^{2p}}\,dt}$$

et

$$(N.11) \quad J_{2n}(x) - f(x) = \frac{3}{2\pi n^2}\int_0^{+\infty} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}\sin^4 nt\,dt,$$

$$(N.12) \quad J_{pn}(x) - f(x) = \frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^{2p}}\sin^{2p} nt\,dt.$$

3. Meilleure approximation trigonométrique. — $E_n(f)$ ou E_n lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, désignera la meilleure approximation trigonométrique d'ordre n de $f(x)$ continue de période 2π.

Nous rappelons quelques résultats.

Si $f(x)$ possède une dérivée $p^{\text{ième}}$ et si $f^{(p)} \in \operatorname{Lip}\alpha (0 < \alpha \leq 1)$,

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha}}\right) \quad [6].$$

Réciproquement si f peut être quel que soit n approchée par des polynomes

d'ordre n à une quantité $\frac{K}{n^{p+\alpha}}$ près où K est une constante, p entier >0 et $0<\alpha<1$, f possède une dérivée d'ordre p appartenant à la classe Lip α.

Pour $\alpha=1$, cette réciproque est inexacte. On a dans ce cas le résultat suivant [8] :

Pour que $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^p}\right)$, il faut et il suffit que $\left|\frac{\delta_p(f,x,t)}{t^{p-1}}\right|=O(1)$ uniformément en x et t et pour que $E_n=o\left(\frac{1}{n^p}\right)$, il faut et il suffit que

$$\left|\frac{\delta_p(f,x,t)}{t^{p-1}}\right|=o(1),$$

où

$$\delta_p(f,x,t)=f(x+pt)-C_p^1 f(x+(p-1)t)+C_p^2 f(x+(p-2)t)\ldots\pm f(x).$$

En particulier, la condition $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ est équivalente à

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right|=O(1)$$

et la condition $E_n(f)=o\left(\frac{1}{n}\right)$ est équivalente à

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right|=o(1).$$

En d'autres termes pour que $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$, il faut et il suffit que $f\in C_A$.

Si $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ $\left(\text{ou } o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, $E_n(f')=O\left(\frac{1}{n}\right)$ $\left(\text{ou } o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ [8],

si $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ $(0<\alpha<1)$, $E_n(f')=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

4. Module de continuité. — Le module de continuité de $f(x)$, soit

$$\max_{|x-x'|\leq h} f(x)-f(x')$$

sera désigné par $\omega(f,h)$ ou $\omega(h)$. Nous rappelons que $\omega(h)$ est une fonction continue non décroissante de h; que si m est >0 entier, $\omega(mh)\leq m\omega(h)$ et si $m>0$ n'est pas entier $\omega(mh)\leq(m+1)\omega(h)$.

5. Dérivées des sommes trigonométriques précédentes. — *a. Calcul de* σ_n'. — $a_0,\ldots,a_n,\ldots,b_n,\ldots$ désignant les coefficients de Fourier de $f(x)$ et

$$A_n=a_n\cos nx+b_n\sin nx,\qquad A_n'=b_n\cos nx-a_n\sin nx\qquad(n=1,2,\ldots),$$

on a

$$\sigma_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)A_k.$$

D'où

$$\sigma'_n=\sum_{k=1}^{n-1}k\left(1-\frac{k}{n}\right)A_k=\sum_{k=1}^{n-1}kA_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k^2A_k.$$

Au moyen de la transformation d'Abel on obtient, après réduction,

$$\sigma'_n=(n-1)\sigma_n-\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k\sigma_k. \tag{N.13}$$

b. Calcul de σ''_n. — Nous utiliserons σ''_n sous la forme obtenue à partir de

$$\sigma_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{t^2}\sin^2nt\,dt=\frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x+2t)\sin^2nt}{t^2}\,dt.$$

On pose $x+2t=u$ et l'on a

$$\sigma_n=\frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\frac{\sin^2n\dfrac{u-x}{2}}{\left(\dfrac{u-x}{2}\right)^2}\frac{du}{2}.$$

D'où

$$\frac{d\sigma_n}{dx}=\frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2n\dfrac{u-x}{2}}{\left(\dfrac{u-x}{2}\right)^2}\right)\frac{du}{2}.$$

Or

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2n\dfrac{u-x}{2}}{\left(\dfrac{u-x}{2}\right)^2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2nt}{t^2}\right).$$

En revenant à nouveau à la variable d'intégration t, il vient

$$\sigma'_n(x)=-\frac{1}{2n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+2t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin^2nt}{t^2}\right)dt.$$

De même pour $\sigma''_n(x)$; mais comme $\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{\sin^2nt}{t^2}\right)$ est une fonction paire de t, on a :

$$\begin{aligned}\sigma''_n(x)&=\frac{1}{4n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+2t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^2nt}{t^2}\right)dt\\&=\frac{1}{4n\pi}\int_0^{+\infty}[f(x+2t)+f(x-2t)]\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^2nt}{t^2}\right)dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma''_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty}&[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]\\&\times\left[\frac{n^2\cos2nt}{t^2}-\frac{2n\sin2nt}{t^3}+\frac{3\sin^2nt}{t^4}\right]dt\end{aligned} \tag{N.14}$$

car $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^2nt}{t^2}\right)dt=0$ puisque si $f\equiv1$, $\sigma''_n\equiv0$.

c. Calcul de $S_n''(x)$. — De $S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n A_k$, on tire $S_n'' = -\sum_1^n k^2 A_k$. En appliquant la transformation d'Abel, on a

$$S_n'' = -n^2 S_n + \sum_1^{n-1} (2k+1) S_k$$

et en l'appliquant une seconde fois on obtient

$$S_n'' = -n^2 S_n + n(2n+1)\sigma_n - 2(\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n). \tag{N.15}$$

d. Calcul de J_{2n}', J_{2n}''. — Comme pour le calcul de σ_n', on a

$$J_{2n}' = -\frac{3}{4\pi n^3} \int_0^{+\infty} [f(x+2t) - f(x-2t)] \frac{d}{dt}\left[\frac{\sin^4 nt}{t^4}\right] dt,$$

car $\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin^4 nt}{t^4}\right)$ est fonction impaire de t.

$$J_{2n}'(x) = -\frac{3}{\pi n^3} \int_0^{+\infty} [f(x+2t) - f(x-2t)] \frac{\sin^3 nt}{t^3} \left[\frac{n\cos nt}{t} - \frac{\sin nt}{t^2}\right] dt$$

ou encore

$$J_{2n}'(x) = -\frac{3n}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[f\left(x + \frac{2t}{n}\right) - f\left(x - \frac{2t}{n}\right)\right] \frac{\sin^3 t}{t^3} \left(\frac{t\cos t - \sin t}{t^2}\right) dt. \tag{N.16}$$

Puis, $\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 nt}{t^4}\right)$ étant une fonction paire de t,

$$J_{2n}''(x) = \frac{3}{8\pi n^3} \int_0^{+\infty} [f(x+2t) + f(x-2t)] \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 nt}{t^4}\right) dt;$$

comme $J_{2n}'' \equiv 0$ lorsque $f \equiv 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 nt}{t^4}\right) dt = 0,$$

d'où

$$J_{2n}''(x) = \frac{3}{8\pi n^3} \int_0^{+\infty} |f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 nt}{t^4}\right) dt;$$

enfin en changeant t en $\frac{t}{n}$,

$$J_{2n}''(x) = \frac{3n^2}{4\pi} \int_0^{+\infty} \left[f\left(x + \frac{2t}{n}\right) + f\left(x - \frac{2t}{n}\right) - 2f(x)\right] \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 nt}{t^4}\right) dt. \tag{N.17}$$

e. Calcul de $V_n' = 2\sigma_{2n}' - \sigma_n'$. — D'après (N.13) on a

$$V_n' = -\frac{2}{n} \sum_n^{2n-1} k\sigma_n' + 2(2n-1)\sigma_{2n}' - (n-1)\sigma_n'. \tag{N.18}$$

Nous utiliserons une autre forme de V'_n que nous calculerons à partir de

$$V_n = 2\sigma_{2n} - \sigma_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty} [f(x+2t) + f(x-2t)] \frac{\sin^2 2nt - \sin^2 nt}{t^2}\, dt.$$

Nous supposerons que $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, ce qui sera le cas où nous nous placerons, de façon à assurer l'existence des intégrales qui suivent et la continuité de f'.

On aura encore

$$V'_n = -\frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty} [f(x+2t) - f(x-2t)] \frac{d}{dt}\left[\frac{\sin^2 2nt - \sin^2 nt}{t^2}\right] dt.$$

Or

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin^2 2nt - \sin^2 nt}{t^2}\right] = 2n\frac{\sin 4nt}{t^2} - \frac{n\sin 2nt}{t^2} - \frac{2}{t^3}[\sin^2 2nt - \sin^2 nt]$$

et d'après (N. 8) :

$$(N.19) \qquad V'_n = 2n[\sigma'_{2n} - f'] + n[2\sigma'_{2n} - \sigma'_n - f'] + \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{t^3} (\sin^2 2nt - \sin^2 nt)\, dt.$$

6. Dans la suite nous poserons

$$(N.20) \qquad \varphi_x(t) = \varphi(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x).$$

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS DE LA SUITE DES DÉRIVÉES DE POLYNOMES TRIGONOMÉTRIQUES CONVERGEANT UNIFORMÉMENT VERS UNE FONCTION CONTINUE PÉRIODIQUE.

I. — Théorème général.

$f(x)$ étant une fonction continue de période 2π, $P_n(x)$ un polynome trigonométrique d'ordre n, si, quels que soient x et n, $|P_n(x) - f(x)| < \frac{\varphi(n)}{n^{k-1}}$ où k est entier > 0 et $\varphi(x)$ une fonction continue, positive, non croissante, les dérivées d'ordre k des polynomes $P_n(x)$ satisfont à l'inégalité

$$(1) \qquad |P_n^{(k)}(x)| < A + Bn\varphi(n) + C\int_1^n \varphi(x)\, dx,$$

où A, B, C sont des constantes.

Considérons la suite $\{P_{a^p}\}$ où a est un entier fixe ≥ 2 et où p prend la suite des valeurs entières. On a

$$P_{a^p} - P_{a^{p-1}} < \frac{\varphi(a^p)}{a^{p(k-1)}} + \frac{\varphi(a^{p-1})}{a^{(p+1)(k-1)}} \leq \frac{2\varphi(a^p)}{a^{p(k-1)}}.$$

$P_{a^p} - P_{a^{p-1}}$ étant un polynome d'ordre a^{p+1}, le théorème de Berstein donne

$$|P^{(k)}_{a^p} - P^{(k)}_{a^{p-1}}| < 2a^{k(p+1)} \frac{\varphi(a^p)}{a^{p(k-1)}} = 2a^k a^p \varphi(a^p).$$

D'où

$$|P^{(k)}_{a^p} - P^{(k)}_{a^{p_0}}| < 2a^k a^p \varphi(a^p) + 2a^{k+1} \sum_{m=p_0}^{p-1} a^{m-1} \varphi(a^m)$$

$$= 2a^k a^p \varphi(a^p) + \frac{2a^{k+1}}{a-1} \sum_{m=p_0}^{p-1} (a^m - a^{m-1}) \varphi(a^m) < 2a^k a_p \varphi(a^p) + \frac{2a^{k+1}}{a-1} \int_{a^{p_0-1}}^{a^{p-1}} \varphi(x)\, dx.$$

Si n est un entier quelconque et p tel que $a^p \leqq n < a^{p+1}$,

$$|P^{(k)}_n - P^{(k)}_{a^p}| < n\varphi(n) + a^k a^p \varphi(a^p) = n\varphi(n) + \frac{a^{k+1}}{a-1} [a^p - a^{p-1}] \varphi(a^p).$$

et

$$|P^{(k)}_n| < \max_x |P^{(k)}_{a^{p_0}}| + n\varphi(n) + \frac{a^{k+1}}{a-1} \int_{a^{p-1}}^{a^p} \varphi(x)\, dx + \frac{2a^{k+1}}{a-1} \int_{a^{p_0-1}}^{a^{p-1}} \varphi(x)\, dx.$$

ou encore

$$|P^{(k)}_n| < A + Bn\varphi(n) + C \int_1^n \varphi(x)\, dx.$$

Si $P_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$, on peut poser

$$\max_x |P_n - f| = \rho(n) \qquad \text{et} \qquad \sup_{p \geq n} \rho(p) = \varphi(n).$$

Cas particuliers. — *a. Si* $P_n(x)$ *converge uniformément vers* $f(x)$, $\frac{P'_n(x)}{n}$ *tend uniformément vers zéro avec* $\frac{1}{n}$.

Pour $k = 1$ on a en effet

$$\frac{|P'_n|}{n} < \frac{A}{n} + \varphi(n) + C \frac{1}{n} \int_1^n \varphi(x)\, dx \qquad \text{où} \quad \lim_{x=\infty} \varphi(x) = 0.$$

Or

$$\frac{1}{x} \int_1^x \varphi(x)\, dx = \frac{1}{x} \int_1^X \varphi(x)\, dx + \frac{1}{x} \int_X^x \varphi(x)\, dx \qquad (1 < X < x)$$

$$< \frac{X-1}{x} \varphi(1) + \left(1 - \frac{X}{x}\right) \varphi(X),$$

quantité qui est moindre que ε donné si l'on choisit X de façon que $\varphi(X) < \frac{\varepsilon}{2}$, puis x pour que $\frac{X-1}{x} \varphi(1) < \frac{\varepsilon}{2}$. On peut prouver cette propriété directement. Si pour $n \geqq N$ on a $|P_n - f| < \varepsilon$, alors $|P_n - P_N| < 2\varepsilon$ et d'après le théorème de Bernstein, $|P'_n - P'_N| < 2n\varepsilon$ d'où

$$\left| \frac{P'_n}{n} - \frac{P'_N}{n} \right| < 2\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \frac{|P'_n|}{n} < 2\varepsilon + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

b. Si $|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|P_n''(x)| = O(n)$ *uniformément en* x.

Il suffit de prendre $\varphi = \text{const.}$ et $k = 2$.

Lorsque $f(x)$ peut être approchée à $O\left(\frac{1}{n}\right)$ près, l'inégalité (1) fournit pour les dérivées premières : $|P_n'| = O(\log n)$ lorsque $|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi soit

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{\sin px}{p^2} \qquad \text{et} \qquad P_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin px}{p^2}.$$

On a

$$|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad P_n' = \sum_{p=1}^{n} \frac{\cos px}{p}$$

admet pour maximum $\sum_1^n \frac{1}{p} \sim \log n$. Si on applique alors le théorème de Bernstein à P_n' en partant de P_n' on trouve $|P_n''| = O(n \log n)$ alors que (1) donne $|P_n''| = O(n)$. Nous utiliserons souvent cette propriété dans la suite. Nous préciserons donc la constante qui intervient dans la majoration de P_n'' en utilisant les sommes de Jackson-de la Vallée-Poussin.

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ est que $f \in C_\Lambda$ [8]. Soit

$$A = \sup_{x,t} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right|.$$

J_{2n} désignant la somme de Jackson-de la Vallée-Poussin d'ordre $2n - 1$, on a, d'après (N. 17) et (N. 20),

$$J_{2n}''(x) = \frac{3n^2}{4\pi} \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 t}{t^4}\right) dt.$$

D'où lorsque $f \in C_\Lambda$,

$$|J_{2n}''(x)| < \frac{3\Lambda n^2}{2\pi} \int_0^{+\infty} t \left| \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 t}{t^4}\right) \right| dt = k\Lambda n,$$

où

$$k = \frac{3}{2\pi} \int_0^{+\infty} t \left| \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 t}{t^4}\right) \right| dt.$$

Un calcul rapide prouve que $k < 8$, d'où $|J_{2n}''| < 8An$. Cette constante n'est certainement pas la meilleure pour la classe C_Λ.

c. Si $|f - P_n| = o\left(\frac{1}{n}\right)$ *alors pour* $k = 2$ *et* $\varphi(x)$ *tendant vers zéro avec* $\frac{1}{x}$ *on a, d'après* (1),

$$|P_n''| < A + Bn\varphi(n) + C\int_1^n \varphi(x)\,dx = o(n) \qquad \text{car} \qquad \int_1^n \varphi(n)\,dx = o(n) \quad \text{d'après } (a).$$

d. Si $f(x) \in \text{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ *et si* $|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $|P_n'| = O(n^{1-\alpha})$.

Dans l'inégalité (1) on prend $k=1$ et $\varphi(x)=\frac{\lambda}{x^\alpha}$ où λ est une constante. On peut encore préciser ici les constantes. Si en effet $|f(x)-f(x')|<M|x-x'|^\alpha$, on peut trouver une suite de polynomes P_n tels que $|f(x)-P_n(x)|<\frac{kM}{n^\alpha}$. Si pour une autre suite $\{Q_n(x)\}$ on a $|f(x)-Q_n(x)|<\frac{k'M}{n^\alpha}$, de $|P_n-Q_n|<\frac{k+k'}{n^\alpha}M$, on tire $|P'_n-Q'_n|<(k+k')Mn^{1-\alpha}$. On peut donc chercher une majoration d'une suite particulière $\{P_n(x)\}$ et en utilisant les sommes de Jackson, on trouve $|P'_n|<\frac{C_\alpha}{1-\alpha}Mn^{1-\alpha}$, où $C_\alpha\to\frac{2}{\log 2}$ quand $\alpha\to 1$. Ces constantes ne sont certainement pas les meilleures.

e. Si $f(x)\in$ Lip 1 *et si* $|P_n-f|=O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|P'_n(x)|$ *est uniformément borné.*

L'inégalité (1) ne donne dans l'hypothèse $|f(x)-f(x')|<M|x-x'|$, que $|P'_n|=O(\log n)$. En utilisant encore les sommes J_n, on a (N. 10)

$$\left|\frac{J_{2n}(x+h)-J_{2n}(x)}{h}\right|=\left|\frac{3}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{f\left(x+\frac{2t}{n}+h\right)-f\left(x+\frac{2t}{n}\right)}{h}\right]\frac{\sin^4 t}{t^4}\,dt\right|<M.$$

Donc $|J'_{2n}(x)|<M$ et le raisonnement fait en *d.* prouve que si $|P_n-f|=O\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsque $f\in$ Lip 1, P'_n est uniformément borné.

Réciproquement si une suite de polynomes $P_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ continue et si la suite des dérivées $P'_n(x)$ est uniformément bornée en n et x, $f\in$ Lip 1, car

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{n\infty}\frac{P_n(x+h)-P_n(x)}{h}\quad\text{et}\quad\frac{P_n(x+h)-P_n(x)}{h}=P'_n(x+\theta h),$$

où $0<\theta<1$, est uniformément borné.

II. — Majoration au moyen du module de continuité.

Théorème. — *Si quel que soit* x,

$$|P_n(x)-f(x)|=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

où $\omega(h)$ *est le module de continuité de* $f(x)$,

$$|P'_n(x)|=O\left[n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

En effet $|J_{2n}-f|=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ [4]. Si $|P_n-f|=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$, on a également

$$J_{2n}-P_n|=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

et par suite

$$|J'_{2n} - P'_n| = O\left[n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Il suffit donc de démontrer la proposition pour les dérivées des sommes J_{2n}.

On a (N. 16)

$$J'_{2n}(x) = -\frac{3n}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[f\left(x+\frac{2t}{n}\right)-f\left(x-\frac{2t}{n}\right)\right]\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\,dt,$$

d'où

$$|J'_{2n}(x)| < \frac{3n}{\pi}\int_0^{+\infty}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\left|\frac{\sin^3 t}{t^3}\cdot\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\right|dt.$$

Or $\omega\left(\frac{2t}{n}\right) < \omega\left(\frac{1}{n}\right)(2t+1)$ (Notations, 4). Désignant par α la constante absolue $\int_0^{+\infty}(2t+1)\left|\frac{\sin^3 t}{t^3}\,\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\right|dt$, on obtient

$$|J'_{2n}(x)| < \frac{3\alpha}{\pi}\,n\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

III. – Propriétés de $f(x)$, déduites de l'ordre de grandeur des dérivées $P'_n(x)$.

Nous avons vu que l'inégalité (1) peut fournir un ordre de grandeur exact de $\max|P'_n|$ et que cet ordre de grandeur peut être donné soit par l'intégrale $\int^n \varphi(x)\,dx$, soit par $n\varphi(n)$. L'exemple suivant montre que cet ordre de grandeur peut être plus faible que $n\varphi(n)$.

Soit

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin a^p x}{p^\alpha},$$

où α est >1 et a un entier impair ≥ 3. $\Pi_{a^N} = \sum_{1}^{N}\frac{\sin a^p x}{p^\alpha}$ est un polynome trigonométrique d'ordre a^N et l'approximation fournie est

$$f - \Pi_{a^N} = \sum_{N+1}^{\infty}\frac{\sin a^p x}{p^\alpha}.$$

Or si $x_k^N = \frac{1}{a^{N+1}}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)(k=0,\ 1,\ ,\ldots,\ a^{N+1}-1)$, $\sin a^p x_k^N = 1$ pour $p = N+1,\ N+2,\ \ldots$ parce que a est impair. De même $\sin a^p x_k^N = -1$ $(p = N+1, \ldots)$, si $x_{k'}^N = \frac{1}{a^{N+1}}\left(\frac{3\pi}{2}+2k'\pi\right)(k'=0, \ldots, a^{N+1}-1)$. En ces $2a^{N+1}$ points l'approximation est donc alternativement $\pm\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{p^\alpha}$. $\Pi_{a^N}(x)$ est donc

polynome de meilleure approximation d'ordre a^N, a^N+1, ..., $a^{N+1}-1$ et fournit une approximation $O\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$.

D'ailleurs

$$\Pi'_{a^N}(x)=\sum_1^N \frac{a^p}{p^\alpha}\cos a^p x \qquad \text{et} \qquad \max_x |\Pi'_{a^N}(x)|=\sum_1^N \frac{a^p}{p^\alpha}.$$

Je dis que $\frac{\sum_1^N \frac{a^p}{p^\alpha}}{\frac{a^N}{N^{\alpha-1}}} \to 0$ pour $N\infty$. En effet, on a par la transformation d'Abel

$$\sum_1^N \frac{a^p}{p^\alpha}=O(1)+O\left(\frac{a^N}{N^\alpha}\right)+\sum_1^{N-1} a^{p+1}O\left(\frac{1}{p^{\alpha+1}}\right)$$

et dès que p est assez grand, $\frac{a^{p+1}}{p^{\alpha+1}}$ croît avec p, donc

$$\sum_1^N \frac{a^p}{p^\alpha}=O(1)+O\left(\frac{a^N}{N^\alpha}\right)+O\left(\frac{Na^N}{N^{\alpha+1}}\right).$$

D'où

$$\frac{\sum_1^N \frac{a^p}{p^\alpha}}{\frac{a^N}{N^{\alpha-1}}}=O\left(\frac{N^{\alpha-1}}{a^N}\right)+O\left(\frac{1}{N}\right)+O\left(\frac{1}{N}\right)=O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Soit alors $\Pi_n(x)$ le polynome de meilleure approximation d'ordre n de $f(x)$, $\mu_n=\max_x |\Pi'_n(x)|$. Nous supposons que $\lim_{n\infty}\frac{\mu_n}{nE_n}=0$. Cette hypothèse fournit les résultats suivants :

THÉORÈME. — *$f(x)$ étant une fonction continue non constante :*

A. *Si pour une suite $\{n_p\}$, $\lim_{p\infty}\frac{\mu_{n_p}}{n_p E_{n_p}}=0$, alors :*

1° $E_{n_p}\approx\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n_p}\right)$;

2° $\lim_{p\infty}\frac{\omega\left(\frac{\theta\pi}{n_p}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n_p}\right)}=1$ *uniformément en* θ $(1\leq\theta\leq\theta_0)$.

B. *Si* $\lim_{n\infty}\frac{\mu_n}{nE_n}=0$, *quel que soit* $r>0$, $\lim_{n\infty}\frac{n^{1-r}E_n}{\mu_n}=0$.

C. *Si* $\frac{n_{p+1}}{n_p}<+\infty$ *et si* $\lim_{p\infty}\frac{\mu_{n_p}}{n_p E_{n_p}}=0$ *(en particulier si* $\frac{\mu_n}{nE_n}\to 0$*)*, *$f(x)$ n'appartient à aucune classe* Lip α.

Démonstration. — Posons $\lambda_n=\frac{nE_n}{\mu_n}$ et soit $\omega(\Pi_n, h)$ le module de continuité

de $\Pi_n(x)$, $\omega(h)$ celui de f. Sur une période, $f(x)-\Pi_n(x)$ prend alternativement les valeurs E_n, $-E_n$ aux $2n+2$ points $\xi_n^i (i=1, 2, \ldots, 2n+1)$ énumérés dans l'ordre des abscisses croissantes. Soit $\delta_n = \min_i |\xi_n^i - \xi_n^{i+1}|$. Comme $(2n+2)\delta_n < 2\pi$ on a $\delta_n < \frac{\pi}{n}$. Soit alors (ξ_n^i, ξ_n^{i+1}) un couple de points distants de δ_n. On a

$$|f(\xi_n^i) - f(\xi_n^{i+1})| = |f(\xi_n^i) - \Pi_n(\xi_n^i) + \Pi_n(\xi_n^i) - \Pi_n(\xi_n^{i+1}) + \Pi_n(\xi_n^{i+1}) - f(\xi_n^{i+1})|$$

et

$$|\Pi_n(\xi_n^{i+1}) - \Pi_n(\xi_n^i)| \leq \omega(\Pi_n, \delta_n) \leq \delta_n \mu_n \leq \frac{\pi}{n}\mu_n.$$

Dès que n est assez grand, $2E_n - \delta_n \mu_n \geq 2E_n - \frac{\pi}{n}\mu_n$ est >0 car

$$2E_n - \frac{\pi}{n}\mu_n = 2E_n\left(1 - \frac{\pi}{2\lambda_n}\right).$$

Comme

$$f(\xi_n^i) - \Pi_n(\xi_n^i) = \pm E_n \qquad \text{et} \qquad f(\xi_n^{i+1}) - \Pi_n(\xi_n^{i+1}) = \mp E_n$$

on a

$$|f(\xi_n^i) - f(\xi_n^{i+1})| > 2E_n - \delta_n\mu_n \geq 2E_n - \frac{\pi}{n}\mu_n,$$

d'où

$$2E_n < \frac{\pi}{n}\mu_n + \omega(\delta_n) < \frac{\pi E_n}{\lambda_n} + \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad \text{ou} \qquad 2E_n\left(1 - \frac{\pi}{2\lambda_n}\right) < \omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

D'ailleurs A étant une constante positive

$$\omega\left(\frac{A}{n}\right) < 2E_n + \omega\left(\Pi_n, \frac{A}{n}\right) \leq 2E_n + \frac{A}{n}\mu_n = 2E_n\left(1 + \frac{A}{2\lambda_n}\right),$$

d'où

$$(1') \qquad 2E_n > \omega\left(\frac{A}{n}\right)\frac{1}{1 + \frac{A}{2\lambda_n}} > \omega\left(\frac{A}{n}\right)\left(1 - \frac{A}{2\lambda_n}\right).$$

Prenant $A = \pi$, nous obtenons

$$\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 + \frac{\pi}{2\lambda_n}} < 2E_n < \omega\left(\frac{\pi}{\pi}\right)\frac{1}{1 - \frac{\pi}{2\lambda_n}}$$

et, par suite, θ_n désignant un nombre compris entre $-\frac{1}{2}$ et 1, on a pour n assez grand,

$$(2) \qquad 2E_n = \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[1 + \frac{\theta_n \pi}{\lambda_n}\right].$$

Cette égalité prouve la partie (A 1°). Remarquons maintenant que si $\theta \geq 1$, $\omega\left(\frac{\theta\pi}{n}\right) \geq \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Donc

$$\left(1-\frac{\pi}{2\lambda_n}\right)2E_n<\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)<\omega\left(\frac{0\pi}{n}\right)<2E_n\left(1+\frac{\theta\pi}{2\lambda_n}\right)$$

et, par suite,

$$(3)\qquad 1\leq\frac{\omega\left(\frac{0\pi}{n}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}\leq\frac{2E_n}{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}\left(1+\frac{\theta\pi}{2\lambda_n}\right)$$

ce qui démontre (A 2°).

Démontrons que si $\frac{\mu_n}{nE_n}\to 0$,

$$\lim_{n=\infty}\frac{n^{1-r}E_n}{\mu_n}=0\quad(r>0)\qquad\text{ou}\qquad\lim_{n=\infty}\frac{\lambda_n}{n^r}=0.$$

Nous remarquons que si $P_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$,

$$\lim_{n=\infty}\max_{x}|P'_n(x)|>0.$$

En effet si pour une suite n_p on avait $\lim_{p=\infty}|P'_{n_p}(x)|=0$, de

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|=\lim_{p=\infty}\left|\frac{P_{n_p}(x+h)-P_{n_p}(x)}{h}\right|,$$

on conclurait que $f(x+h)-f(x)=0$ quels que soient x et h. Donc

$$\mu_n>\mu>0\qquad\text{et}\qquad\frac{1}{\lambda_n}=\frac{\mu_n}{nE_n}>\frac{\mu}{nE_n}>\frac{\mu}{n}$$

dès que $E_n<1$; la série $\sum\frac{1}{\lambda_n}$ est divergente.

D'autre part on ne peut pas extraire de la série $\sum\frac{1}{\lambda_n}$, une série $\sum\frac{1}{\lambda_{n_p}}$ convergente si $\frac{n_{p+1}}{n_p}<a<+\infty$, lorsque $\lambda_n\to+\infty$.

En effet, de (2) et (3) on tire dès que n_p est assez grand,

$$(4)\qquad\frac{\omega\left(\frac{0\pi}{n_p}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n_p}\right)}\leq\left(1+\frac{\pi}{\lambda_{n_p}}\right)\left(1+\frac{0\pi}{2\lambda_{n_p}}\right)<\left(1+\pi\frac{\theta+2}{\lambda_{n_p}}\right).$$

Or

$$(5)\qquad\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n_p}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n_{p+1}}\right)}=\frac{\omega\left(\frac{n_{p+1}}{n_p}\frac{\pi}{n_{p+1}}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n_{p+1}}\right)}<\frac{\omega\left(a\frac{\pi}{n_{p+1}}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n_{p+1}}\right)}<1+\pi\frac{a+2}{\lambda_{n_{p+1}}}.$$

En écrivant les inégalités (5) pour $p=0, 1, \ldots, p+1$, on obtient en multipliant membre à membre

$$\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n_{p_0}}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n_{p+1}}\right)}<\prod_{m=1}^{p+1}\left[1+\frac{\pi(a+2)}{\lambda_{n_m}}\right].$$

Comme $\lim_{p\infty}\omega\left(\frac{\pi}{n_{p+1}}\right)=0$, on en déduit que le produit infini $\prod_{p=1}^{\infty}\left(1+\frac{\pi(a+2)}{\lambda_{n_p}}\right)$ est divergent, donc que $\sum\frac{1}{\lambda_{n_p}}$ diverge.

Soit alors une suite n_p telle que $1<a'<\frac{n_{p+1}}{n_p}<a<+\infty$. On a

$$n_p>a'^p n_0 \qquad \text{et} \qquad p<\frac{\log\frac{n_p}{n_0}}{\log a'}.$$

$\sum\frac{1}{\lambda_{n_p}}$ étant divergente, quel que soit $\alpha>0$, $\lim_{p\infty}\left(\frac{\lambda_{n_p}}{p^{1+\alpha}}\right)=0$.

On a alors, r étant un nombre positif quelconque donné,

$$\frac{\lambda_{n_p}}{n_p^r}<\frac{1}{(\log a')^{1+\alpha}}\frac{\left(\log\frac{n_p}{n_0}\right)^{1+\alpha}}{n_p^r}\frac{\lambda_{n_p}}{p^{1+\alpha}}.$$

Comme

$$\lim_{p\infty}\frac{\left(\log\frac{n_p}{n_0}\right)^{1+\alpha}}{n_p^r}=0, \qquad \lim_{p\infty}\left(\frac{\lambda_{n_p}}{p^{1+\alpha}}\right)=0,$$

on en conclut $\lim_{p\infty}\frac{\lambda_{n_p}}{n_p^r}=0$. Ce qui prouve que si $\frac{\mu_n}{nE_n}\to 0$, $\lim_{n\infty}\frac{n^{1-r}E_n}{\mu_n}=0$ quel que soit $r>0$.

Démontrons C. Posons $\varphi(h)=\frac{\omega(h)}{h^\alpha}$ et supposons $\frac{n_{p+1}}{n_p}<a<+\infty$. L'inégalité (4) donne

$$\frac{\varphi\left(\frac{\theta\pi}{n_p}\right)}{\varphi\left(\frac{\pi}{n_p}\right)}<\frac{1}{\theta^\alpha}\left(1+\pi\frac{\theta_1+2}{\lambda_{n_p}}\right),$$

θ variant continûment depuis $\theta_0>1$ jusqu'à $\theta_1>a^2$. Dès que p est suffisan ment grand $\frac{1}{\theta_0^\alpha}\left(1+\pi\frac{\theta_1+2}{\lambda_{n_p}}\right)\leq k<1$. D'où

$$\varphi\left(\frac{\pi}{n_{p-1}}\right)\leq k^{q+1}\varphi\left(\frac{\pi}{n_{p+q+1}}\right).$$

Si l'on suppose alors que $f\in\operatorname{Lip}\alpha$,

$$\varphi(h)<A \qquad \text{et} \qquad \varphi\left(\frac{\pi}{n_{p-1}}\right)\leq k^{q+1}A.$$

Pour $q\infty$ on obtiendrait donc

$$\varphi\left(\frac{\pi}{n_{p-1}}\right)=0 \qquad \text{donc} \qquad \omega\left(\frac{\pi}{n_{p-1}}\right)=0,$$

ce qui entraînerait $f=\text{const.}$

La fonction $f(x)=\sum \frac{\sin a^p x}{p^2}$ jouit des propriétés indiquées dans ce théorème.

IV. — Nouvelle majoration de $P'_n(x)$.

THÉORÈME. — *Si* $|P_n(x)-f(x)|=O[E_n(f)]$ *et si la fonction conjuguée* f^* *existe et est continue,*

$$|P'_n(x)|=O[n E_n(f)]+O\Big[n \max_{x,p=0,1,\ldots,n} |\sigma^*_{n+p}-f^*|\Big],$$

$\sigma^*_n(x)$ *étant la* $n^{ième}$ *somme de Fejér de* f^*.

Il suffit de prouver ce résultat pour une suite particulière $\{P_n\}$ telle que $P_n-f|=O(E_n)$ car si $|Q_n-f|=O(E_n)$, on a aussi

$$|P_n-Q_n|=O(E_n) \qquad \text{et} \qquad |P'_n-Q'_n|=O(nE_n).$$

On sait [6] que $V_n=2\sigma_{2n}-\sigma_n$ donne de f une approximation comprise entre E_{2n} et $4E_n$.

En vertu de (N. 13)

$$\sigma'_n=(n-1)\sigma^*_n-\frac{2}{n}\sum_{1}^{n-1} k\sigma^*_k$$

on a (N. 18)

$$V'_n=2\sigma'_{2n}-\sigma'_n=-\frac{2}{n}\sum_{n}^{2n-1} k\sigma^*_k+2(2n-1)\sigma^*_{2n}-(n-1)\sigma^*_n$$

et comme la somme des coefficients est nulle on a bien

$$V'_n=O\Big[n \max_{p=0,\ldots,n} \max_{x} |\sigma^*_{n+p}-f^*|\Big].$$

En échangeant les rôles de f et f^* et désignant par $P_n(f^*;x)$ un polynome qui donne de f^* une approximation $O[E_n(f^*)]$, on a

$$|P'_n(f^*;x)|=O[n E_n(f^*)]+O\Big[n \max_{x,p=0,\ldots,n} |\sigma_{n+p}-f|\Big]. \tag{6}$$

CONSÉQUENCE. — *Pour que* $|\sigma_n-f|=O\left(\frac{1}{n}\right)$ *il faut et il suffit que* $f^* \in \mathrm{Lip}\,1$.

En effet si $|\sigma_n-f|=O\left(\frac{1}{n}\right)$, $E_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ et l'on a aussi $E_n(f^*)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ [8].

Soit alors $\{P_n(f^*;x)\}$ une suite de polynomes convergeant uniformément vers f^*, de sorte que

$$|P_n(f^*;x)-f^*|=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'après (I, c), $|P'_n(f^*;x)|$ est uniformément borné en n et x et $f^* \in \mathrm{Lip}\,1$.

La réciproque est connue [1]. Nous la démontrons à nouveau au Chapitre III, théorème 14. Nous donnons plus loin une autre condition nécessaire et suffisante pour que $|\sigma_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

CHAPITRE II.

CLASSES DE SATURATION ATTACHÉES A CERTAINS PROCÉDÉS D'APPROXIMATION.

Soit

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

une fonction continue et γ un procédé de sommation de sa série de Fourier, définie par une suite de constantes $\gamma_k^n (k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$, c'est-à-dire que nous considérons la suite de polynomes trigonométriques

$$P_n^\gamma(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n \gamma_k^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

S'il existe alors une fonction $\varphi_\gamma(n)$ croissante telle que, quel que soit n, on ait $\max_x \varphi_\gamma(n) |P_n^\gamma - f| > a$, où a désigne une constante positive qui dépend de f, et que, de plus, il existe des fonctions f pour lesquelles on ait

$$\max_x \varphi_\gamma(n) |P_n^\gamma - f| < b$$

(où b est une autre constante dépendant aussi de f), nous dirons que le procédé d'approximation γ se sature. Nous appellerons classe de saturation attachée au procédé γ l'ensemble des fonctions continues non constantes telles que

$$|P_n^\gamma - f| = O\left(\frac{1}{\varphi_\gamma(n)}\right).$$

Le but de ce Chapitre est d'indiquer les classes de saturation attachées à certains procédés. En raison de l'importance que présente pour la suite la connaissance de la classe de saturation attachée au procédé de Fejér, nous ferons de ce procédé une étude spéciale.

I. — Procédé d'approximation de Fejér.

Soit $\sigma_n(x)$ la $n^{\text{ième}}$ somme de Fejér de $f(x)$ continue de période 2π. $\sigma_n(x)$ est un polynome d'ordre $n-1$. Je dis que ce procédé est saturé avec l'approxima-

tion de saturation d'ordre $\frac{1}{n}$. En effet, si l'on suppose que pour une suite d'entiers n_p, $|\sigma_{n_p} - f| = o\left(\frac{1}{n_p}\right)$, de

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} (\sigma_{n_p} - f)\cos kx\, dx = \frac{k}{n_p} a_k, \qquad \text{où} \quad n_p > k,$$

on tirerait

$$\left|\frac{k}{n_p} a_k\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |\sigma_{n_p} - f|\, dx = o\left(\frac{1}{n_p}\right), \qquad \text{d'où} \quad k a_k = 0.$$

Donc $a_k = 0$ quel que soit $k = 1, 2, \ldots$ et de même $b_k = 0$. Donc si l'on suppose que f n'est pas constante, on a quelle que soit f

$$\lim_{n\infty}\left\{\max_x n\,|\sigma_n - f|\right\} > 0.$$

Pour chercher la condition à laquelle doit satisfaire f pour que

$$|\sigma_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

il suffit de connaître l'approximation donnée par σ_n d'une fonction f dont la meilleure approximation trigonométrique est $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. On sait [8] que la condition nécessaire et suffisante pour que $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ est que $\left|\frac{f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)}{t}\right|$ soit uniformément borné en x et t, autrement dit que f appartienne à la classe C_λ. C'est donc dans la classe C_λ que nous chercherons la classe de saturation attachée au procédé de Fejér.

1. Théorème 1. — *Si quels que soient x et t, $\left|\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t}\right| \leq A$, l'approximation de $f(x)$ par ses sommes de Fejér $\sigma_n(x)$ au point x, satisfait à l'inégalité suivante*

$$(7) \qquad \left|\sigma_n(x) - f(x) - \frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)}{t^2}\, dt\right| < \lambda\frac{A}{n},$$

où α est une constante qui ne dépend pas de n et λ une constante dépendant de α. $\left(On\ a\ \lambda < \frac{7}{2}\ si\ \alpha = \frac{\pi}{2}.\right)$

D'après (N. 5),

$$\sigma_n - f = \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\sin^2 nt\, dt.$$

On suppose $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| \leq 2A$. On a

$$(8) \qquad \left|\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\sin^2 nt\, dt\right| \leq 2A\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin^2 nt}{t}\, dt < 2A\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{t}\, dt < 3A$$

Puis

$$\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} \sin^2 nt\, dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)\cos 2nt}{t^2}\, dt.$$

Posons

$$u_n = \int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} \cos 2nt\, dt.$$

Changeant t en $t + \frac{\pi}{2n}$, il vient

$$u_n = -\int_0^{+\infty} \frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} \cos 2nt\, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2n}} - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}$$

Or

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} \cos 2nt\, dt \right| < 2A \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{dt}{t+\frac{\pi}{2n}} = 2A \log 2.$$

Donc, à une quantité moindre que $2A \log 2$ en valeur absolue près, on a

$$u_n = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \left[\frac{\varphi(t)}{t^2} - \frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} \right] \cos 2nt\, dt.$$

Or

$$\frac{\varphi(t)}{t^2} - \frac{\varphi(t+h)}{(t+h)^2} = \frac{\varphi(t)-\varphi(t+h)}{(t+h)^2} + 2h\frac{\varphi(t)}{t}\frac{1}{(t+h)^2} + h^2\frac{\varphi(t)}{t}\frac{1}{t(t+h)^2}$$

et par suite

$$u_n = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} \cos 2nt\, dt$$
$$+ \frac{\pi}{2n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} \frac{\cos 2nt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} dt + \frac{\pi^2}{8n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} \frac{\cos 2nt}{t\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} dt.$$

Considérons les deux dernières intégrales. On a

$$\left| \frac{\pi}{2n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} \frac{\cos 2nt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} dt \right| < 2A\frac{\pi}{2n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{dt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} \leq A,$$

$$\left| \frac{\pi^2}{8n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} \frac{\cos 2nt}{t\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} dt \right| < 2A\frac{\pi^2}{8n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{dt}{t\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} \leq \frac{A}{2}.$$

Démontrons maintenant que $\frac{1}{2}\int_{\frac{2n}{\pi}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt$ est borné.

On a

$$\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)=f(x+2t)+f(x-2t)-f\left(x+2t+\frac{\pi}{2n}\right)-f\left(x-2t-\frac{\pi}{2n}\right)$$

et $f(x)$ peut être approchée par un polynome P_n à moins de $k\frac{A}{n}$; k est une constante absolue dont il nous suffit de savoir qu'elle est moindre que $\frac{3}{\pi}$ lorsque P_n est convenablement choisi. Par exemple avec les sommes de Jackson-de la Vallée-Poussin l'erreur est

$$\left|\frac{3}{2\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^4}\sin^4 nt\,dt\right|<\frac{3A}{\pi n}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 t}{t^3}\,dt<\frac{3A}{\pi n}.$$

$\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)$ diffère donc de

$$P_n(x+2t)+P_n(x-2t)-P_n\left(x+2t+\frac{\pi}{n}\right)-P_n\left(x-2t-\frac{\pi}{n}\right)$$

de $\frac{12A}{\pi n}$ au plus. L'erreur commise dans la dernière intégrale où l'on remplace f par P_n, est donc moindre que

$$\frac{6A}{\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{dt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}<\frac{6A}{\pi^2}.$$

D'ailleurs, si l'on pose $Q_n(t)=P_n(x+2t)+P_n(x-2t)$ on a en vertu de

$$Q_n(t)-Q_n\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4n^2}Q_n''\left(t+\frac{\theta\pi}{2n}\right)-\frac{\pi}{2n}Q_n'(t)\qquad(0<\theta<1),$$

$$P_n(x+2t)+P_n(x-2t)-P_n\left(x+2t+\frac{\pi}{n}\right)-P_n\left(x-2t-\frac{\pi}{n}\right)$$
$$=-\frac{\pi}{n}[P_n'(x+2t)-P_n'(x-2t)]-\frac{\pi^2}{2n^2}\left[P_n''\left(x+2t+\frac{\theta\pi}{n}\right)+P''\left(x-2t-\frac{\theta\pi}{n}\right)\right].$$

Comme $|P_n-f|=O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|P_n''|=O(n)$ et l'on a vu qu'on peut supposer (Chap. I, § 1, b) $|P_n''|<4An$. Donc

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt$$

diffère de

$$-\frac{\pi}{2n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{P_n'(x+2t)-P_n'(x-2t)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt.$$

d'une quantité qui, en valeur absolue, est au plus égale à $\frac{\pi^2}{4n^2} 4An\frac{n}{\pi} = \pi A$.
Considérons alors

$$-\frac{\pi}{2n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{-\infty} \frac{P'_n(x-2t)-P'_n(x-2t)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\, d\left(\frac{\sin 2nt}{2n}\right).$$

En intégrant par parties et en tenant compte de ce que $\frac{\pi}{2n}$ est un zéro de $\sin 2nt$, on obtient

$$\frac{\pi}{2n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{P''_n(x+2t)+P''_n(x-2t)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\sin 2nt\,dt - \frac{\pi}{4n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{-\infty} \frac{P'_n(x+2t)-P'_n(x-2t)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^3}\sin 2nt\,dt.$$

On a alors

$$\left|\frac{\pi}{2n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{P''_n(x+2t)+P''_n(x-2t)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\sin 2nt\,dt\right| < \frac{\pi}{2n^2} 8An\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{dt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} < 4A,$$

$$\left|\frac{\pi}{4n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{P'_n(x+2t)-P'_n(x-2t)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^3}\sin 2nt\,dt\right| < \frac{\pi}{4n^2} 8An\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{dt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} < 2A.$$

En définitive lorsque $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left|\frac{f(x+h)-f(x-h)-2f(x)}{h}\right| \leq A$,

$$\left|\sigma_n - f - \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right| < \frac{3A}{\pi n} + \frac{A\log 2}{\pi n} + \frac{A}{2n\pi}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi^2}+\pi+4+2\right] < \frac{7}{2}\frac{A}{n}.$$

Pour une fonction f de la classe C_A on écrira donc

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{-\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mais d'autre part

$$\left|\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right| < 2A\left|\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2n}} \frac{dt}{t}\right| = 2A\left|\log\frac{\pi}{2\alpha}\right|.$$

Donc

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{9}$$

où α est une constante quelconque.

Enfin si $\left|\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right| = O(1)$, $\left|\int_{\varepsilon}^{-\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right| = O(1)$ quel que soit $\varepsilon > 0$.

En effet si n désigne l'entier positif tel que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \leq \frac{1}{n}$, on a

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi}{t^2} dt \right| < \left| \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left| \frac{\varphi}{t^2} \right| dt \right| < 2A \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{t} = 2A \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

En remplaçant $2t$ par t, on en déduit le résultat suivant qui définit la classe de saturation attachée au procédé de Fejèr :

THÉORÈME 2. — *Pour que* $|\sigma_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, *il faut et il suffit que* $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)}{t^2} dt$ *soit uniformément borné en* x *et* ε.

2. Pour prouver le théorème précédent il n'est pas nécessaire de savoir que la condition $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ est équivalente à $\left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right|$ uniformément bornée en x et t. Il suffit de savoir (Chapitre I, § 1) que si

$$|f - P_n| = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad |P_n''| = O(n).$$

En effet l'hypothèse $\left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right| \leq A$ a été utilisée pour prouver que les quantités suivantes sont bornées :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\varphi(t)}{t^2} \sin^2 nt\, dt, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\varphi\left(t + \frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t + \frac{\pi}{2n}\right)^2} \cos 2nt\, dt,$$

$$\frac{\pi}{2n} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} \frac{\cos 2nt}{\left(t + \frac{\pi}{2n}\right)^2} dt, \qquad \frac{\pi^2}{8n^2} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} \frac{\cos 2nt}{t\left(t + \frac{\pi}{2n}\right)^2} dt.$$

Si dans chacune d'elles on remplace f par P_n tel que $|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, l'erreur commise est $O(1)$ car

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin^2 nt}{t^2} dt = O(n), \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{dt}{\left(t + \frac{\pi}{2n}\right)^2} = O(n).$$

$$\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{dt}{t\left(t + \frac{\pi}{2n}\right)^2} = O(n^2), \qquad \int_{\frac{\pi}{2n}}^{-\infty} \frac{dt}{t^2\left(t + \frac{\pi}{2n}\right)^2} = O(n^3).$$

Désignant alors par $\varphi_n(t)$ ce que devient $\varphi(t)$ et remarquant que $|\varphi_n(t)| = t^2 O(n)$, on obtient pour les 1re, 2e et 4e quantités $O(1)$. Il reste à prouver que

$$\left| \frac{\pi}{2n} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi_n(t)}{t} \cdot \frac{\cos 2nt}{\left(t - \frac{\pi}{2n}\right)^2} dt \right| = O(1).$$

Si l'on remplace $\frac{1}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}$ par $\frac{1}{t^2}$ l'erreur commise est, au signe près,

$$\frac{\pi^2}{2n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)\cos 2nt}{t^2\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}dt+\frac{\pi^3}{8n^3}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)\cos 2nt}{t^3\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}$$

et en valeur absolue chacune de ces intégrales est bornée. Considérons alors $\frac{\pi}{n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)}{t^3}\cos 2nt\,dt$. Comme pour $\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\cos 2nt\,dt$, nous changerons t en $t+\frac{\pi}{2n}$;

$$\frac{\varphi_n(t)}{t^3}-\frac{\varphi_n(t+h)}{(t+h)^3}=\frac{\varphi_n(t)-\varphi_n(t+h)}{(t+h)^3}+3h\frac{\varphi_n(t)}{t(t+h)^3}+3h^2\frac{\varphi_n(t)}{t^2(t+h)^3}+h^3\frac{\varphi_n(t)}{t^3(t+h)^3}.$$

On a encore

$$\frac{\pi}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\varphi_n\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt=O(1)$$

parce que

$$\left|\varphi_n\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)\right|=\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2 O(n);$$

les quantités

$$\frac{3\pi^2}{2n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)\cos 2nt}{t\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^3}dt,\quad \frac{3\pi^3}{4n^3}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)\cos 2nt}{t^2\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^3}dt,\quad \frac{\pi^4}{8n^4}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)}{t^3\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^3}\cos 2nt\,dt$$

sont bornées. Enfin de

$$\begin{aligned}&\left|P_n(x+2t)+P_n(x-2t)-P_n\left(x+2t+\frac{\pi}{n}\right)-P_n\left(x-2t-\frac{\pi}{n}\right)\right|\\&=\left|\frac{\pi}{n}[P_n'(x+2t)-P_n'(x-2t)]+\frac{\pi^2}{2n^2}\left[P_n''\left(x+2t+\frac{\theta\pi}{n}\right)+P_n''\left(x-2t-\frac{0\pi}{n}\right)\right]\right|\\&=tO(1)+O\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

il résulte que

$$\left|\frac{\pi}{n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)-\varphi_n\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^3}\cos 2nt\,dt\right|$$

$$=\frac{O(1)}{n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{t\,dt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^3}+\frac{O\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{dt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^3}=O(1).$$

Donc l'hypothèse $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ entraîne que

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

On démontre encore que si

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right| = O(1),$$

$\left|\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right|$ est borné uniformément en x et ε et que si $\alpha = \text{const.}$

$$\left|\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right| = O(1);$$

on remplace f par P_n, l'erreur commise est $O(1)$ et l'on écrit que

$$|\varphi_n(t)| = t^2 O(n).$$

3. *Si*

$$E_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \sigma_n - f = \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{10}$$

Il suffit en effet de reprendre le calcul fait au paragraphe 2 et de remarquer que d'après (Chap. I, § 1, *c*) : si $E_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et si $|P_n - f| = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $|P_n''| = o(n)$. Tous les O sont remplacés par *o*.

4. *Si $f(x)$ possède une dérivée $f'(x)$ continue, dont le module de continuité est $\omega_1(h)$, quel que soit p $(0 < p < 1)$,*

$$|\sigma_n - f| = \omega_1\left(\frac{1}{(\log n)^p}\right) O\left(\frac{\log n}{n}\right) + O\left[\frac{(\log n)^p}{n}\right] = o\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

En effet on a, d'après (10),

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)}{t^2}\,dt + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{(\log n)^p}} + \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{1}{(\log n)^p}}^{+\infty} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{(\log n)^p}}^{+\infty} = O\left[\frac{(\log n)^p}{n}\right].$$

D'où

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{(\log n)^p}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left[\frac{(\log n)^p}{n}\right].$$

En intégrant par parties il vient

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2n\pi}\left[\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{-t}\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{(\log n)^p}} + \frac{1}{\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{(\log n)^p}} \frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t}\,dt + O\left[\frac{(\log n)^p}{n}\right].$$

Le premier terme vaut

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\left[f\left(x+\frac{2}{n}\right)+f\left(x-\frac{2}{n}\right)-2f(x)\right]\\ &-\frac{1}{2n\pi}(\log n)^p\left[f\left(x+\frac{2}{(\log n)^p}\right)+f\left(x-\frac{2}{(\log n)^p}\right)-2f(x)\right]\\ &=\frac{1}{\pi n}\left[f'\left(x+\frac{2\theta}{n}\right)+f'\left(x-\frac{2\theta}{n}\right)\right]\\ &-\frac{1}{n\pi}\left[f'\left(x+\frac{2\theta'}{(\log n)^p}\right)-f'\left(x-\frac{2\theta}{(\log n)^p}\right)\right]=o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

$(0<\theta,\ \theta'<1)$.

D'ailleurs

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{(\log n)^p}} \frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t}\,dt\right| &= O\left(\frac{1}{n}\right)\omega_1\left[\frac{1}{(\log n)^p}\right]\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{(\log n)^p}}\frac{dt}{t}\\ &= O\left(\frac{1}{n}\right)\omega_1\left[\frac{1}{(\log n)^p}\right][\log n - p\log\log n]\\ &= \omega_1\left[\frac{1}{(\log n)^p}\right]O\left(\frac{\log n}{n}\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\sigma_n - f = \omega_1\left[\frac{1}{(\log n)^p}\right]O\left(\frac{\log n}{n}\right) + O\left[\frac{(\log n)^p}{n}\right] + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

5. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ *est que* $\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right|$ *soit uniformément borné en* x *et* t.

Nous démontrons ce résultat dû à M. Zygmund [8] à partir de l'approximation de $f(x)$ par ses sommes de Fejèr.

Nous allons prouver que si $\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right| \leq A$,

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2\pi n}\int_{\alpha_n}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

sans utiliser les propriétés de P''_n qui résultaient de ce que $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

En effet on a comme précédemment [*voir* (8)]

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\sin^2 nt\,dt = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (\alpha = \text{const.}).$$

D'où

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}dt - \frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)\cos 2nt}{t^2}dt + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

où

$$\varphi(t) = \varphi_x(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x).$$

Démontrons que si $\frac{\varphi(t)}{t}$ est borné, $\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)\cos 2nt}{t^2}dt$ est borné aussi.

Prenant $\alpha > \frac{\pi}{2}$ et posant $u_n = \int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)\cos 2nt}{t^2}dt$, il vient en changeant t en $t + \frac{\pi}{2n}$,

$$u_n = -\int_{\frac{\alpha}{n}-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}} - \int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt$$

et comme

$$\left|\int_{\frac{\alpha}{n}-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt\right| < 2A\int_{\frac{\alpha}{n}-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}} \frac{dt}{t} = 2A\log\frac{\alpha}{\alpha-\frac{\pi}{2}}.$$

On a à O(1) près

$$u_n = \frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\left[\frac{\varphi(t)}{t^2} - \frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right]\cos 2nt\,dt.$$

Le calcul fait précédemment (§ 4) prouve que

$$u_n = O(1) + \frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt.$$

Remplaçons au dénominateur $\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2$ par t^2. Au signe près l'erreur commise est

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\left[\varphi(t) - \varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)\right]\frac{\frac{\pi}{n}t + \frac{\pi^2}{4n^2}}{t^2\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt.$$

Tenant compte de ce que $\left|\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)\right|<2A\left(2t+\frac{\pi}{2n}\right)$, cette intégrale est en valeur absolue moindre que

$$A\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\frac{\left(2t+\frac{\pi}{2n}\right)\left(\frac{\pi}{n}t+\frac{\pi^2}{4n^2}\right)}{t^2\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}dt=O(1).$$

D'où

$$u_n=O(1)+\frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{t^2}\cos 2nt\,dt.$$

Changeons t en $t-\frac{\pi}{2n}$. En remarquant encore que

$$\left|\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\alpha}{n}+\frac{\pi}{2n}}\frac{\varphi\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)-\varphi(t)}{\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt\right|=O(1)$$

et en prenant la demi-somme des deux dernières expressions de u_n, on obtient

$$u_n=O(1)+\frac{1}{4}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\left[\frac{\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{t^2}-\frac{\varphi\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)-\varphi(t)}{\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right]\cos 2nt\,dt.$$

La quantité entre crochets où $h=\frac{\pi}{2n}$ s'écrit

$$\frac{2\varphi(t)-\varphi(t+h)-\varphi(t-h)}{(t-h)^2}-2h\frac{\varphi(t)-\varphi(t+h)}{t(t-h)^2}+h^2\frac{\varphi(t)-\varphi(t+h)}{t^2(t-h)^2}.$$

La même inégalité $|\varphi(t)-\varphi(t+h)|<2A(2t+h)$ indique que les deux derniers termes fournissent des intégrales bornées. Enfin

$$\varphi_x(t+h)+\varphi_x(t-h)-2\varphi_x(t)=\varphi_{x+2t}(h)+\varphi_{x-2t}(h).$$

Donc

$$|\varphi_x(t+h)+\varphi_x(t-h)-2\varphi_x(t)|=O(h)$$

et comme $h=O\left(\frac{1}{n}\right)$, le premier terme donne encore une intégrale bornée.

En résumé, si $\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}$ est uniformément borné en x et t,

$$\sigma_n-f=\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

On a alors

$$2(\sigma_{2n}-f)-(\sigma_n-f)=\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et comme $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| < 2A$,

$$\left|\int_{\frac{\alpha}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right| < 2A\int_{\frac{\alpha}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}} \frac{dt}{t} = 2A\log 2,$$

donc

$$2(\sigma_{2n}-f)-(\sigma_n-f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et par suite $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (1).

Démontrons la réciproque.

Supposons que $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. On a

$$|2(\sigma_{2n}-f)-(\sigma_n-f)| = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad [6].$$

Et en vertu de (7) où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a

$$2(\sigma_{2n}-f)-(\sigma_n-f) = \frac{2}{4n\pi}\int_{\frac{\pi}{4n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt - \frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$\left|\int_{\frac{\pi}{4n}}^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right| = O(1).$$

$\theta = \theta(x, n)$ étant compris entre 1 et 2, on a, d'après la formule de la moyenne,

$$\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{4n}\right)\frac{\varphi\left(\frac{\theta\pi}{4n}\right)}{\frac{\theta^2\pi^2}{16n^2}} = O(1) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left|\frac{\varphi\left(\frac{\theta\pi}{4n}\right)}{\frac{\theta\pi}{4n}}\right| = O(1).$$

Soit $t_n = \frac{\theta\pi}{4n}$. On a

$$\frac{\pi}{4n} < t_n < \frac{\pi}{2n} \qquad \text{et} \qquad a < \frac{t_{n+1}}{t_n} < b \qquad (a \text{ et } b, \text{ const. absolues} > 0).$$

Je dis que si $\left|\frac{\varphi(t_n)}{t_n}\right|$ est uniformément borné en n et x, $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|$ est uniformé-

---

(1) Il faut remarquer que si pour suite d'entiers n_p tels que $\frac{n_{p+1}}{n_p} < a < +\infty$, on a

$$|P_{n_p}-f| < \frac{k}{n_p}.$$

Si l'on considère p_{n_p} comme un polynome d'ordre $n_p + m$ ($m = 1, 2, \ldots, n_{p+1}-n_p-1$), on a

$$|P_{n_p}-f| < \frac{k\,n_{p+1}}{n_p}\,\frac{1}{n_{p+1}} < \frac{ka}{n_{p+1}},$$

c'est-à-dire que quel que soit n, $E_n < \frac{k'}{n}$.

ment borné en x et t. Nous prendrons une suite d'entiers égaux à 2^p et posant $\lambda_p = t_{2^p}$, on a $\frac{\pi}{2^{p+2}} < \lambda_p < \frac{\pi}{2^{p+1}}$; λ_p est une suite décroissante tendant vers zéro pour $p\infty$. Soit $t > 0$ et p l'entier tel que $\lambda_{p+1} < t < \lambda_p$. On a alors

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right| < \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{\lambda_{p+1}}.$$

Or si

$$|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{\lambda_{p+1}}$ diffère de $[P_{2^p}(x+t)+P_{2^p}(x-t)-2P_{p^p}(x)]\frac{1}{\lambda_{p+1}}$ de $\frac{O\left(\frac{1}{2^p}\right)}{\lambda_{p+1}} = O(1)$ au plus. Et

$$|P_{2p}(x+t)+P_{2p}(x-t)-2P_{2p}(x)| = t^2 O(2^p) = O(\lambda_p^2) O(2^p).$$

Donc

$$\frac{|P_{2p}(x+t)+P_{2p}(x-t)-2P_{2p}(x)|}{\lambda_{p+1}} = \frac{O(\lambda_p^2) O(2^p)}{\lambda_{p+1}} = O(1).$$

Ce qui prouve le théorème.

6. *Meilleure constante pour le procédé de Fejèr dans la classe* Lip 1. — Le problème des meilleures constantes posé par M. Favard [2] et résolu par lui pour diverses classes de fonctions, trouve ici pour le procédé régulier de Fejèr et la classe Lip 1, une solution simple.

Soit en effet

$$M = \sup_{x,x'} \left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\right|.$$

On a alors

$$\sigma_n - f = \frac{1}{n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{a} + \frac{1}{n\pi}\int_{a}^{+\infty} + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (a \text{ étant une constante}).$$

D'où

$$|\sigma_n - f| \leq \frac{2}{\pi}\frac{M}{n}\left[\log a - \log\frac{\alpha}{n}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{2}{\pi} M \frac{\log n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or si l'on considère la fonction $f_1(x)$, nulle pour $x = 0$, paire et telle que pour $0 \leq x \leq a < \pi$, $f_1(x) = Mx$, on a

$$\sigma_n(0) - f_1(0) = \frac{2}{\pi} M \frac{\log n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Pour le procédé de Fejèr et la classe Lip 1, *la meilleure constante est donc* $\frac{2}{\pi}$ [3]

et toute fonction continue périodique qui au voisinage d'un point x est représentée par deux segments de pente $+M$ et $-M$ est extrémale.

7. *Condition pour que $f' \in \mathrm{Lip}\,1$.* — On a vu qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $|\sigma_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ est que $f' \in \mathrm{Lip}\,1$ (Chap. I, § 4). Donc d'après le théorème 2 on énoncera le suivant :

THÉORÈME 3. — *Pour que la fonction conjuguée f' de f satisfasse à une condition de Lipschitz d'ordre 1, il faut et il suffit que* $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^2}\,dt$ *soit uniformément borné en ε et x.*

II. — Généralisations.

Nous étendrons dans ce qui suit la méthode qui nous a servi pour les sommes de Fejèr à d'autres sommes trigonométriques s'exprimant sous forme d'intégrale, le noyau étant celui de Jackson-de la Vallée-Poussin $\frac{\sin^{2p} nt}{t^{2p}}$ (p entier >0).

1. *Les différences Δ_{2p}* [4]. — On pose

$$[x_0] = f(x_0), \qquad [x_0 x_1] = \frac{[x_0]-[x_1]}{x_0 - x_1}, \qquad \ldots,$$

$$[x_0 \ldots x_n] = \frac{[x_0 \ldots x_{n-1}] - [x_1 \ldots x_n]}{x_0 - x_n}; \qquad (x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j).$$

On a alors

$$[x_0 x_1 \ldots x_n] = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots + \frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

$[x_0, \ldots, x_n]$ s'appelle la $n^{\text{ième}}$ différence divisée de $f(x)$ relativement aux points $x_0, \ldots, x_n$. Lorsque f possède sur l'intervalle (a, b) contenant $x_0, \ldots, x_n$ une dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}(x)$, on sait que $[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ où ξ est compris entre le plus petit et le plus grand des $n+1$ nombres $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Si l'on suppose de plus que $x_0 = x + a_0 t, \ldots, x_n = x + a_n t$, où x est fixe et $a_0, \ldots, a_n$ des constantes ($a_i \neq a_j$ si $i \neq j$), on a

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\delta_n(f, x_0, \ldots, x_n)}{t^n},$$

$\delta_n(f, x_0, \ldots, x_n)$ [que nous écrirons $\delta_n(t)$ quand il n'y aura pas d'ambiguïté] est une différence d'ordre n. Lorsque $f^{(n)}$ existe, on a $\delta_n(t) = t^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. Pour toute expression telle que $\lambda_n \delta_n(t)$ où λ_n est une constante dépendant de n seulement, on peut écrire

$$|\lambda_n \delta_n(t)| = t^n O\left[\max_x |f^{(n)}(x)|\right].$$

On peut généraliser les résultats de M. Zygmund en démontrant le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *$\delta_p(t)$ étant une différence de $f(x)$ continue, de période 2π, relative aux points $x + a_k t$ ($k = 0, 1, \ldots, p$) où les a_k sont des constantes, si $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)$, $\frac{|\delta_p(t)|}{|t|^{p-1}}$ est uniformément borné en n et x.*

En effet si $|f - P_n| = O\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)$, $|P_n^{(p)}| = O(n)$ d'après (1). Écrivons

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}})$$

et désignons par $\delta_p(P, t)$ ce que devient $\delta_p(t) = \delta_p(f, t)$ quand on remplace f par P. $\delta_p(f, t)$ étant une forme linéaire à coefficients constants de $f(x + a_k t)$, on a

$$\delta_p(f, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_p(\Pi_{2^k}, t), \qquad \text{où} \quad \Pi_{2^k} = (P_{2^k} - P_{2^{k-1}});$$

$$= \sum_{k=1}^{+N} + \sum_{N+1}^{+\infty}$$

Or

$$f - P_{2^k} = O\left(\frac{1}{2^{kp-k}}\right) \quad \text{donc} \quad |\Pi_{2^k}| = O\left(\frac{1}{2^{kp-k}}\right) \quad \text{et} \quad |\delta_p(\Pi_{2^k}, t)| = O\left(\frac{1}{2^{kp-k}}\right).$$

D'où

$$\sum_{N+1}^{\infty} \delta_p(\Pi_{2^k}, t) = O\left[\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{N+1} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{N+2} + \ldots\right] = O\left(\frac{1}{2^{N(p-1)}}\right).$$

D'autre part

$$|\delta_p(\Pi_{2^k}, t)| = O(|t|^p) \max_x |\Pi_{2^k}^{(p)}| = |t|^p O(2^k) \qquad \text{car} \quad |P_{2^k}^{(p)}| = O(2^k).$$

D'où

$$|\delta_p(f, t)| = |t|^p \sum_{1}^{N} O(2^k) + O\left(\frac{1}{2^{N(p-1)}}\right) = |t|^p O(2^N) + O\left[\left(\frac{1}{2^N}\right)^{p-1}\right],$$

Soit N l'entier tel que $\frac{1}{2^N} < |t| \leq \frac{1}{2^{N-1}}$. On a alors

$$|\delta_p(f, t)| = O(|t|^{p-1}) + O(|t|^{p-1}) = O(|t|^{p-1}). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous allons prendre pour $a_0, \ldots, a_n$ des valeurs particulières.
Considérons les points $x - t$, x, $x + t$ et posons

$$\Delta_2(t) = f(x - t) - 2f(x) + f(x + t) \quad (1).$$

---

(1) Quand il sera nécessaire de préciser nous écrirons $\Delta_2(f, t), \ldots, \Delta_{2p}(f, t)$ au lieu de $\Delta_{2p}(t)$.

On a

$$\Delta_2(t)-2^2\Delta_2\left(\frac{t}{2}\right)=f(x-t)-4f\left(x-\frac{t}{2}\right)+6f(x)-4f\left(x+\frac{t}{2}\right)+f(x+t),$$

c'est-à-dire une différence d'ordre 4 de $f(x)$ aux points $x-t$, $x-\frac{t}{2}$, x, $x+\frac{t}{2}$, $x+t$. On a en posant

$$x_0=x-t, \quad x_1=x, \quad x_2=x+t, \quad [x_0x_1x_2]=\frac{\Delta_2(t)}{2t^2}$$

et en posant

$$x_0=x-t, \quad x_1=x-\frac{t}{2}, \quad x_2=x, \quad x_3=x+\frac{t}{2}, \quad x_4=x+t,$$

$$[x_0x_1x_2x_3x_4]=\frac{\Delta_2(t)-2^2\Delta_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{3}{2}t^4}.$$

Posons

$$\Delta_1(t)=\Delta_2(t)-2^2\Delta_2\left(\frac{t}{2}\right), \quad \ldots, \quad \Delta_{2p+2}(t)=\Delta_{2p}(t)-2^{2p}\Delta_{2p}\left(\frac{t}{2}\right).$$

On a le résultat suivant :

Δ_{2p} est une différence de $f(x)$, d'ordre $2p$, aux points

$$x-t, \quad x-\frac{t}{2}, \quad x-\frac{t}{2^2}, \quad \ldots, \quad x-\frac{t}{2^{p-1}}, \quad x, \quad x+\frac{t}{2^{p-1}}, \quad \ldots \quad x+t.$$

Le résultat est en effet exact pour $p=1, 2$. Supposons qu'il soit vrai pour p. C'est-à-dire que si

$$x_0^{2p}=x-t, \quad x_1^{2p}=x-\frac{t}{2}, \quad \ldots, \quad x_k^{2p}=x-\frac{t}{2^k}, \quad \ldots, \quad x_{p-1}^{2p}=x-\frac{t}{2^{p-1}},$$

$$x_p^{2p}=x, \quad \ldots, \quad x_{2p}^{2p}=x+t, \quad [x_0^{2p}x_1^{2p}\ldots x_{2p}^{2p}]=\frac{\Delta_{2p}(t)}{\lambda_p t^{2p}},$$

où λ_p est une constante dépendant de p seulement, on a

$$[x_0^{2p+2}, x_1^{2p+2}, \ldots, x_{2p+2}^{2p+2}]=\frac{\Delta_{2p}(t)-2^{2p}\Delta_{2p}\left(\frac{t}{2}\right)}{\lambda_{p+1}t^{2p+2}}$$

en posant

$$x_0^{2p+2}=x-t, \quad x_1^{2p+2}=x-\frac{t}{2}, \quad \ldots \quad x_p^{2p+2}=x-\frac{t}{2^p},$$

$$x_{p+1}^{2p+2}=x, \quad \ldots, \quad x_{2p+2}^{2p+2}=x+t.$$

En effet en raison de la symétrie deux à deux des points x_k^{2p} par rapport au point $x_p^{2p}=x$, il suffit de chercher pour $k\leq p-1$ le terme en $f(x_k^{2p+2})$ dans l'expression de $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Formons $\frac{\Delta_{2p}(t)-2^{2p}\Delta_{2p}\left(\frac{t}{2}\right)}{\lambda_p t^{2p}}$ qu'on obtient en

retranchant de la valeur de $[x_0^{2p}, \ldots, x_{2p}^{2p}]$ pour t, sa valeur pour $\frac{t}{2}$. Remarquons que

$$x_k^{2p} = x_k^{2p+2} \quad \text{si} \quad k \leq p-1, \qquad x_p^{2p} = x_{p+1}^{2p+2} \quad \text{et} \quad x_k^{2p} = x_{k+2}^{2p+2} \quad \text{si} \quad k \geq p+1.$$

On obtient donc pour terme en $f(x_k^{2p+2})$

$$\frac{-f(x_k^{2p+2})}{(x_k^{2p+2}-x_0^{2p+2})\ldots(x_k^{2p+2}-x_{p-1}^{2p+2})(x_k^{2p+2}-x_{p+1}^{2p+2})(x_k^{2p+2}-x_{p+3}^{2p+2})\ldots(x_k^{2p+2}-x_{2p+2}^{2p+2})}$$

$$+\frac{f(x_k^{2p+2})}{(x_k^{2p+2}-x_1^{2p+2})\ldots(x_k^{2p+2}-x_p^{2p+2})(x_k^{2p+2}-x_{p+1}^{2p+2})(x_k^{2p+2}-x_{p-2}^{2p+2})\ldots(x_k^{2p+2}-x_{2p-1}^{2p+2})},$$

c'est-à-dire le terme en $f(x_k^{2p+2})$ de $[x_0^{2p+2}, \ldots, x_{2p-2}^{2p+2}]$ multiplié par

$$\left[\frac{1}{(x_k^{2p+2}-x_0^{2p+2})(x_k^{2p+2}-x_{2p+2}^{2p+2})} - \frac{1}{(x_k^{2p+2}-x_p^{2p+2})(x_k^{2p+2}-x_{p+2}^{2p+1})}\right] = \frac{t^2(2^{2p}-1)}{2^{2p}}.$$

Quand au terme en $f(x_p^{2p+2})$ qui provient de $\Delta_{2p}\left(\frac{t}{2}\right)$, on a

$$\frac{f(x_p^{2p+2})}{(x_p^{2p+2}-x_1^{2p+2})\ldots(x_p^{2p+2}-x_{2p+1}^{2p+2})},$$

c'est-à-dire le terme de $[x_0^{2p+2}, \ldots, x_{2p+2}^{2p+2}]$ en $f(x_p^{2p+2})$ multiplié par

$$(x_p^{2p+2}-x_0^{2p+2})(x_p^{2p+2}-x_{2p+2}^{2p+2}) = \frac{t^2(2^{2p}-1)}{2^{2p}}.$$

Il en est de même pour le terme en $f(x_{p+1}^{2u+2})$.

En définitive

$$\frac{\Delta_{2p}(t) - 2^{2p}\Delta_{2p}\left(\frac{t}{2}\right)}{\lambda_p t^{2p}} = \frac{t^2(2^{2p}-1)}{2^{2p}}[x_0^{2p+2}x_1^{2p+2}\ldots x_{2p+2}^{2p+2}].$$

D'où

$$(11) \qquad \Delta_{2p-2}(t) = \lambda_{p+1}t^{2p+2}[x_0^{2p+2}, x_1^{2p+2}\ldots x_{2p+2}^{2p+2}] \quad \text{et} \quad \lambda_{p+1} = \lambda_p\left(1-\frac{1}{2^{2p}}\right)(\lambda_1 = 2).$$

On remarquera que $\lambda_{p+1} = 2\prod_{m=1}^{p}\left(1-\frac{1}{2^{2m}}\right)$ et que, par suite, λ_p a une limite finie pour $p\infty$. Lorsque $f', f'', \ldots, f^{(2p)}$ existent, on a

$$(12) \qquad \Delta_{2p}(t) = 2\prod_{m=1}^{p-1}\left(1-\frac{1}{2^{2m}}\right)t^{2p}\frac{f^{2p}(\xi)}{(2p)!}, \qquad \text{où} \quad x-t<\xi<x+t.$$

On a également

$$\frac{d}{dt}\Delta_2 = \Delta_2' = f'(x+t) - f'(x-t), \qquad \ldots, \qquad \Delta_{2p}'(t) = \Delta_{2p-2}'(t) - 2^{2p-3}\Delta_{2p-2}'\left(\frac{t}{2}\right)$$

et l'on verrait encore que les quantités $\Delta_{2p}'(t)$ sont des différences d'ordre $(2p-1)$

de $f'(x)$ aux points $x-t$, $x-\frac{t}{2}$, ..., $x-\frac{t}{2^{p-1}}$, $x+\frac{t}{2^{p-1}}$, ..., $x+t$. De même, si

$$\Delta_1''=f'(x-t)-f'\left(x-\frac{t}{2}\right)-f'\left(x+\frac{t}{2}\right)+f'(x+t), \qquad \ldots.$$

$$\Delta_{2p}''(t)=\Delta_{2p-2}''(t)-2^{2p-1}\Delta_{2p-2}''\left(\frac{t}{2}\right),$$

$\Delta_{2p}''(t)$ est une différence d'ordre $2p-2$ de $f''(x)$. On aura donc

$$|\Delta_{2p}''(t)|=|t|^{2p-1}O\left[\max_x |f^{2p}|\right] \tag{13}$$

et

$$\Delta_{2p}''(t)=|t|^{2p-2}O\left[\max_x |f^{2p}|\right]. \tag{14}$$

2. Nous avons vu (Chap. I, 1) que si $f(x)$ peut être approchée par une suite de polynomes $P_n(x)$ de façon que $|f-P_n|=O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ (k entier >0), alors $P_n^{(k+1)}=O(n)$. Pour $k=1$ cette propriété nous a permis de déterminer la classe de saturation attachée au procédé de Fejèr. Nous allons pour le résultat suivant supposer que $f(x)$ jouit plus généralement de la propriété suivante : il existe une suite $\{P_n\}$ et un entier $p>0$ telle que si ρ_n désigne $\max|f-P_n|$, $|P_n^{2p}(x)|=O(n^{2p}\rho_n)$. On remarquera qu'on a alors $|P_n^{2p-m}(x)|=O(n^{2p-m}\rho_n)$. Dans les applications nous pourrons pour certaines classes de fonctions remplacer ρ_n par E_n et écrire $|f-P_n|=O(E_n)$.

Théorème 5. — *Soit ρ_n une suite de nombres positifs tendant vers zéro pour $n\infty$ (1). S'il existe une suite de polynomes $\{P_n\}$ et un entier positif p tel que $|P_n-f|=O(\rho_n)$ et $|P_n^{2p}(x)|=O(n^{2p}\rho_n)$, alors*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q}\sin^{2r}nt\,dt=\frac{C_{2r}^r}{2^{2r}}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q}dt+O(n^{q-1}\rho_n),$$

α étant une constante et q, r des entiers ($q>1$, $2r\geq q$, $2p+2r-q>0$). Si dans l'hypothèse on peut remplacer O par o, on peut aussi dans la conclusion remplacer O par o.

La démonstration est en tous points semblable à celle donnée dans le cas de $p=1$, $q=2$, $r=1$. Nous la reprendrons rapidement.

$\sin^{2r}nt$ s'exprime linéairement en fonction de $\cos 2knt$ ($k=0, 1, \ldots, r$) et

(1) Les ρ_n ne sont pas nécessairement décroissants.

le terme constant est $\frac{C_{2r}^{r}}{2^{2r}}$. Si dans $\int_0^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q} \sin^{2r} nt\, dt$ on remplace f par P_n, l'erreur commise est

$$O(\rho_n)\int_0^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\sin^{2r} nt}{t^q}\, dt = O(\rho_n) n^{q-1} \int_0^{\alpha} \frac{\sin^{2r} t}{t^q}\, dt = O(n^{q-1}\rho_n).$$

Soit $\Delta_{2p}^{n}(t)$ ce que devient $\Delta_{2p}(t)$ quand on remplace f par P_n. On a

$$|\Delta_{2p}^{n}(t)| = O(t^{2p}) \max_{x} |P_n^{(2p)}| = t^{2p} O(n^{2p}\rho_n),$$

donc

$$\int_0^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\Delta_{2p}^{n}(t)}{t^q} \sin^{2r} nt\, dt = O(n^{2p}\rho_n) \int_0^{\frac{\alpha}{n}} t^{2p-q} \sin^{2r} nt\, dt$$

$$= O(n^{2p+2r}\rho_n) \int_0^{\frac{\alpha}{n}} t^{2p+2r-q}\, dt = O(n^{q-1}\rho_n).$$

On a alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q} \sin^{2r} nt\, dt = O(n^{q-1}\rho_n) + \frac{C_{2r}^{r}}{2^{2r}} \int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^{2p}}\, dt + \sum_{k=1}^{r} A_k \int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \Delta_{2p}(t) \frac{\cos 2knt}{t^q}\, dt,$$

les A_k étant des constantes absolues.

Dans les dernières intégrales nous remplaçons encore f par P_n; l'erreur commise est $O(n^{q-1}\rho_n)$ et en procédant sur $\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \Delta_{2p}(t) \frac{\cos 2knt}{t^q}\, dt$ comme précédemment (§ 1, 1°) (on change t en $t+\frac{\pi}{2kn}$ et l'on prend la demi-somme des valeurs obtenues), on a

$$\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \Delta_{2p}^{n}(t) \frac{\cos 2knt}{t^q}\, dt = O(n^{q-1}\rho_n) + \frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \left[\frac{\Delta_{2p}^{n}(t)}{t^q} - \frac{\Delta_{2p}^{n}\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)^q} \right] \cos 2knt\, dt.$$

Cette dernière quantité, où l'on a réduit au même dénominateur et développé $\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)^q$, s'écrit

$$\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}^{n}(t) - \Delta_{2p}^{n}\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)^q}$$

augmenté d'un nombre fini de termes de la forme

$$\frac{1}{n^m}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}^{n}(t)}{t^m \left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)^q} \cos 2knt\, dt$$

qui sont moindres que $O(n^{q-1}\rho_n)$ parce que $|\Delta_{2p}^n(t)| = t^{2p}O(n^{2p}\rho_n)$ d'après (12).

Enfin en intégrant par parties

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}^n(t) - \Delta_{2p}^n\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)^q} \cos 2knt\, dt$$

et en prenant $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2n}$ est un zéro de $\sin 2knt$ pour $k = 1, 2, \ldots, r\right)$, on trouve deux termes qui, à une constante multiplicative près, sont

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}^n(t) - \Delta_{2p}^n\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)^{q+1}} \sin 2knt = O(n^{q-1}E_n)$$

parce que

$$\left|\Delta_{2p}^n(t) - \Delta_{2p}^n\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)\right| = O\left(\frac{1}{n}\right)\left|\Delta_{2p}^{n\prime}\left(t+\frac{0\pi}{2kn}\right)\right|$$
$$= O\left(\frac{1}{n}\right)t^{2p-1}\max_x |P_n^{(2p)}| = O(n^{2p-1}\rho_n)t^{2p-1}$$

en vertu de $|\Delta_{2p}^{n\prime}(t)| = t^{2p-1}O\left(\max_x |P_n^{(2p)}|\right)$ d'après (13) et

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}^{n\prime}(t) - \Delta_{2p}^{n\prime}\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)^q} \sin 2kn\, dt = O(n^{q-1}E_n).$$

parce que

$$\left|\Delta_{2p}^{n\prime}(t) - \Delta_{2p}^{n\prime}\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)\right| = O\left(\frac{1}{n}\right)\left|\Delta_{2p}^{n\prime}\left(t+\frac{0\pi}{2kn}\right)\right| = O(n^{2p-1}\rho_n)t^{2p-2}$$

en vertu de $|\Delta_{2p}^{n\prime\prime}(t)| = t^{2p-2}O\left(\max_x |P_n^{(2p)}|\right)$ d'après (14).

Comme dans le cas des sommes de Fejèr, si l'on a dans l'hypothèse

$$|P_n - f| = o(\rho_n) \qquad \text{et} \qquad |P_n^{(2p)}| = o(n^{2p}\rho_n) \quad (1),$$

on voit qu'il faut dans le cours des calculs, remplacer partout O par o.

Enfin on a encore

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q}\, dt\right| = O(n^{q-1}\rho_n) + \left|\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\Delta_{2p}^n(t)}{t^q}\, dt\right| = O(n^{q-1}\rho_n),$$

ce qui achève la démonstration.

3. *Conséquences et applications.* — *a.* $q = 2p = 2r$.

---

(1) On a vu que si $\rho_n = \frac{1}{n}$, l'hypothèse $|P_n - f| = o\left(\frac{1}{n}\right)$ entraîne $|P_n'| = o(n)$.

THÉORÈME 6. — *Si Λ_p est une constante, dépendant de p seulement, convenablement choisie, $\frac{\Lambda_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\sin^{2p}nt\,dt$ représente la différence entre une somme trigonométrique d'ordre $2^p pn$ et $f(x)$. L'approximation par ces sommes d'une fonction f telle que $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ est donnée par*

$$\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4\ldots(2p)}\frac{\Lambda_p}{n^{2p-1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^{2p}}dt+O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right).$$

Ce procédé d'approximation se sature avec l'approximation de saturation d'ordre $\frac{1}{n^{2p-1}}$ dans la classe des fonctions où $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^{2p}}dt$ est borné uniformément en x et ε.

Soit d'après (N. 12)

$$J_{pn}-f=\frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_2(2t)\sin^{2p}nt}{t^{2p}}dt$$
$$=\frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^{2p}}\sin^{2p}nt\,dt,$$

où $\alpha_p=\frac{1}{2\int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2p}t}{t^{2p}}dt}$. C'est la différence entre une somme trigonométrique d'ordre pn: J_{pn} et $f(x)$. On a alors

$$J_{2pn}-f=\frac{\alpha_p}{2^{2p-1}n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_2(2t)\sin^{2p}2nt}{t^{2p}}dt$$

et en changeant t en $\frac{t}{2}$,

$$J_{2pn}-f=\frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_2(t)\sin^{2p}nt}{t^{2p}}dt.$$

D'où

$$u_n=(J_{pn}-f)-2^2(J_{2pn}-f)=\frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_4(2t)\sin^{2p}nt}{t^{2p}}dt.$$

La même opération appliquée à u_n donnera

$$u_n-2^4u_{2n}=\frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_6(2t)\sin^{2p}nt}{t^{2p}}dt.$$

Après p opérations on obtiendra

$$\frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)\sin^{2p}nt}{t^{2p}}dt=K_{2^p pn}(x)-\frac{1}{\Lambda_p}f(x),$$

où $K_{2^p pn}(x)$ est une somme trigonométrique d'ordre 2^p_{pn}, combinaison linéaire des

sommes $J_{2kpn}(x)(k=0, 1, \ldots, p)$ et λ_p une constante dépendant de p seulement. Ceci prouve la première partie du théorème.

D'après le théorème 5 où l'on prend $\rho_n = \frac{1}{n^{2p-1}}$, on aura

$$|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right) \quad \text{et} \quad |P_n^{(2p)}| = O(n).$$

Donc si $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$, en remarquant que

$$\frac{C_{2p}^p}{2^{2p}} = \frac{(p+1)\ldots(2p)}{2^{2p}p!} = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots(2p)},$$

on aura pour une telle fonction

$$\frac{\lambda_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\sin^{2p}nt\,dt = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4\ldots(2p)}\frac{\lambda_p}{n^{2p-1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^{2p}}\,dt + O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right).$$

Ce procédé ne peut donner l'approximation $O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ que si $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ et pour que ce procédé donne de f l'approximation $O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$, il est donc nécessaire et suffisant que $\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\,dt$ soit borné uniformément en x et n.

Mais d'après le théorème 4, si $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$, $\left|\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^{2p-1}}\right| = O(1)$ uniformément en x et t, donc ε étant quelconque > 0 et n l'entier tel que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \leq \frac{1}{n}$. On a

$$\left|\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{n}}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\,dt\right| \leq \left|\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\right| \leq O(1)\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\frac{dt}{t} = O(1).$$

Il reste donc à prouver que le procédé est saturé. Nous allons pour cela démontrer que l'hypothèse

$$\left|\frac{\lambda_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\sin^{2p}nt\,dt\right| = o\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right) \quad \text{entraîne} \quad f = \text{const.}$$

En effet supposons

$$\left|\frac{\lambda_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\sin^{2p}nt\,dt\right| = o\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right).$$

Alors $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ et si $|P_n - f| = o\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$, $|P_n^{2p}| = o(n)$. On peut donc écrire

$$\frac{\lambda_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\sin^{2p}nt\,dt = \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots(2p)}\frac{\lambda_p}{n^{2p-1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\,dt + o\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right);$$

donc $U_{p,n}(x)=\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\,dt$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$. m étant un entier >0 fixe soit

$$\varepsilon_{m,n}=\int_0^{2\pi}U_{p,n}(x)\cos mx\,dx.$$

$\varepsilon_{m,n}$ tend vers zéro pour $n\infty$. Or

$$\varepsilon_{m,n}=\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{dt}{t^{2p}}\int_0^{2\pi}\Delta_{2p}(2t)\cos mx\,dx \quad \text{et} \quad \Delta_{2p}(2t)=\sum_{k=0}^{p}A_k\Delta_2\left(\frac{t}{2^{2k-1}}\right),$$

les A_k étant des constantes absolues. Un terme de

$$\varepsilon_{m,n}=\sum_{k=0}^{p}A_k\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{dt}{t^{2p}}\int_0^{+\infty}\Delta_2\left(\frac{t}{2^{2k-1}}\right)\cos mx\,dx$$

est à un facteur constant près

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{dt}{t^{2p}}\int_0^{2\pi}\Delta_2\left(\frac{t}{2^{2k-1}}\right)\cos mx\,dx.$$

Or

$$\int_0^{2\pi}\Delta_2\left(\frac{t}{2^{2k-1}}\right)\cos mx\,dx$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[f\left(x+\frac{2t}{2^{2k}}\right)+f\left(x-\frac{2t}{2^{2k}}\right)-2f(x)\right]\cos mx\,dx=\int_0^{2\pi}f(u)\cos m\left(u-\frac{2t}{2^{2k}}\right)du$$
$$+\int_0^{2\pi}f(u)\cos m\left(u+\frac{2t}{2^{2k}}\right)du-2\int_0^{2\pi}f(u)\cos mu\,du,$$

et comme

$$\cos m(u+h)+\cos m(u-h)-2\cos mu=-4\cos mu\sin^2 m\frac{h}{2},$$

on a

$$\Delta_{2p}(\cos mx,\,2t)=\text{const.}\cos mu\sin^{2p}mt.$$

D'où

$$\varepsilon_{m,n}=\text{const.}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{dt}{t^{2p}}\int_0^{2\pi}f(x)\cos mx\sin^{2p}mt\,dx=\text{const.}\,a_m\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\sin^{2p}mt}{t^{2p}}\,dt,$$

a_m étant un coefficient de Fourier de $f(x)$.

Il en résulte donc $a_m=0$ quand on fait croître n indéfiniment. De même $b_m=0$. Et par suite l'hypothèse

$$\frac{A_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\sin^{2p}nt\,dt=o\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$$

entraîne bien $f=\text{const.}$

b. On peut au moyen de ces sommes trigonométriques démontrer le résultat bien connu suivant :

THÉORÈME. — *Si $f(x)$ possède une dérivée $k^{ième}$ satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha (0 < \alpha \leq 1)$, $E_n(f) = 0\left(\frac{1}{n^{k+\alpha}}\right)$.*

En effet si $k = 2p$, on a

$$\Delta_{2p+2}(t) = \Delta_{2p}(t) - 2^{2p}\Delta_{2p}\left(\frac{t}{2}\right)$$

et d'après (12)

$$\Delta_{2p+2}(t) = 2\prod_{m=1}^{p-1}\left(1 - \frac{1}{2^{2m}}\right)\frac{t^{2p}}{(2p)!}\left[f_{(\xi)}^{(2p)} - f_{(\xi')}^{(2p)}\right],$$

où

$$x - t < \xi < x + t, \qquad x - \frac{t}{2} < \xi' < x + \frac{t}{2}.$$

Donc si $f^{(2p)} \in \mathrm{Lip}\alpha$, comme $|\xi - \xi'| < 3t$, on a

$$|\Delta_{2p+2}(t)| < 2\prod_{m=1}^{p-1}\left(1 - \frac{1}{2^{2m}}\right)\frac{3^{\alpha}\mathrm{M}}{(2p)!}t^{2p+\alpha} \qquad \text{si} \quad |f_{(x)}^{(2p)} - f_{(x')}^{(2p)}| \leq \mathrm{M}|x - x'|^{\alpha}.$$

Et

$$\left|\frac{\lambda_{p+1}}{n^{2p+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p+2}(2t)}{t^{2p+2}}\sin^{2p+2}nt\,dt\right| < \frac{\mu_p\mathrm{M}}{n^{2p+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2p}nt}{t^{2-\alpha}}dt = \frac{\mu_p\mathrm{M}}{n^{2p+\alpha}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2p}t}{t^{2-\alpha}}dt,$$

où $\mu_p = \text{const.}$ On a donc si $k = 2p$

$$\left|\frac{\lambda_{p+1}}{n^{2p+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p+2}(2t)}{t^{2p+2}}\sin^{2p}nt\,dt\right| = 0\left(\frac{1}{n^{k+\alpha}}\right).$$

Si $k = 2p - 1$ on a : $\Delta_{2p}(t) = \lambda_p t^{2p}[x_0^{2p}\ldots x_{2p}^{2p}]$ d'après (11) et la définition des différences divisées donne

$$\Delta_{2p}(t) = \lambda_p t^{2p}\frac{[x_0^{2p}\ldots x_{2p-1}^{2p}] - [x_1^{2p}\ldots x_{2p}^{2p}]}{x_0^{2p} - x_{2p}^{2p}}.$$

Or $x_0^{2p} = x - t$ et $x_{2p}^{2p} = x + t$. D'autre part

$$[x_0^{2p}\ldots x_{2p-1}^{2p}] = \frac{f_{(\xi)}^{(2p-1)}}{(2p-1)!}, \qquad [x_1^{2p}\ldots x_{2p}^{2p}] = \frac{f_{(\xi')}^{(2p-1)}}{(2p-1)!},$$

où

$$x - t < \xi < x - \frac{t}{2}, \qquad x - \frac{t}{2} < \xi' < x + t.$$

Donc $|\xi - \xi'| < 3t$ et

$$|\Delta_{2p}(t)| \leq \lambda_p\frac{|t|^{2p+\alpha}3^{\alpha}\mathrm{M}}{2(2p-1)!\,t} = \frac{3^{\alpha}\lambda_p}{2(2p-1)!}\mathrm{M}|t|^{2p-1+\alpha}.$$

De $\Delta_{2p+2}(t) = \Delta_{2p}(t) - 2^{2p}\Delta_{2p}\left(\frac{t}{2}\right)$ on tire

$$|\Delta_{2p+2}(t)| \leq \text{const.}\, M\, |t|^{2p-1+\alpha},$$

d'où

$$\left|\frac{A_{p+1}}{n^{2p+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p+2}(2t)}{t^{2p+2}}\sin^{2p+2}nt\,dt\right| < \frac{\nu_p M}{n^{2p+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2p}nt}{t^{1-\alpha}}\,dt,$$

soit

$$O\left(\frac{1}{n^{2p-1+\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{k+\alpha}}\right).$$

c. Conditions pour que $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$.

THÉORÈME 7. — *Pour que* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ *il faut et il suffit que l'une des quantités suivantes soit uniformément bornée en* ε *et* x.

$$\frac{\Delta_{2p}(\varepsilon)}{\varepsilon^{2p-1}}, \qquad \varepsilon^{2m}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^{2p+2m}}\,dt \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Considérons

$$\varphi_n^{p,m} = \frac{\mu_{p,m}}{n^{2p+2m-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\sin^{2p+2m}nt\,dt,$$

où m est entier ≥ 1. Comme précédemment (3a) si la constante $\mu_{p,m}$ est convenablement choisie $\varphi_n^{p,m}$ représente la différence entre une somme d'ordre $2^p(p+m)n$ et $f(x)$. Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que $|\varphi_n^{p,m}| = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$. Cela n'est possible que si $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ et dans ce cas d'après le théorème 5 on a

$$\varphi_n^{p,m} = \frac{\mu_{p,m}}{n^{2p+2m-1}}\,\frac{C_{2p+2m}^{p+m}}{2^{2p+2m}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt + O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)\left[\frac{1}{n^{2m}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt + O(1)\right].$$

Donc pour que $|\varphi_n^{p,m}| = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ il est nécessaire et suffisant que

$$\frac{1}{n^{2m}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt$$

soit uniformément borné en x et n. Cette condition est équivalente à $\varepsilon^{2m}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2+2m}}\,dt$ borné. En effet si

$$\frac{1}{n^{2m}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt = O(1),$$

alors $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ et d'après le théorème 4, $\left|\frac{\Delta_{2p}}{t^{2p-1}}\right| = O(1)$. On a alors

$$\left|\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt\right| = O(1)\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{t^{2m+1}} = O[(n+1)^{2m} - n^{2m}] = O(n^{2m-1})$$

et

$$\left[\frac{1}{n^{2m}} - \frac{1}{(n+1)^{2m}}\right] = O\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right).$$

Si n est l'entier tel que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \leq \frac{1}{n}$, la différence

$$\varepsilon^{2m}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt - \frac{1}{n^{2m}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt$$

$$= \left|\varepsilon^{2m}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{n}} + \left(\varepsilon^{2m} - \frac{1}{n^{2m}}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt\right| = O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{dt}{t^{2m+1}} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Réciproquement si

$$\varepsilon^{2m}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt = O(1), \qquad \frac{1}{n^{2m}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt = O(1).$$

Mais d'autre part une autre condition nécessaire et suffisante pour que $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ est que $\varphi_n^{p,m} = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$. Car si $\varphi_n^{p,m} = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$, $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ également; et si $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ alors $\left|\frac{\Delta_{2p}}{t^{2p-1}}\right| = O(1)$ (Théorème 4). Donc

$$|\varphi_n^{p,m}| = O(1)\frac{1}{n^{2p+2m-1}}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2p+2m} nt\,dt}{t^{2m+1}} = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right).$$

En changeant t en $\frac{t}{2}$ dans $\varepsilon^{2m}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt$, nous obtenons le théorème énoncé.

III. — Sommation de Cesaro d'ordre entier.

1. *Procédé de sommation de Cesaro d'ordre 2.*

Théorème 8. — *La classe de saturation attachée au procédé de sommation de Cesaro d'ordre 2 est la même que celle attachée au procédé de Fejèr.*

Soit

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n}{1 + 2 + \ldots + n} \qquad \text{et} \quad \sigma_n^2 - f = \frac{\sum_1^n k(\sigma_k - f)}{\sum_1^n k}$$

et d'après (N.5)

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 - f &= \frac{2}{n(n+1)\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\left(\sum_1^n \sin^2 kt\right) dt \\ &= \frac{1}{n(n+1)\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\left(n - \sum_1^n \cos 2kt\right) dt \\ &= \frac{1}{n(n+1)\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\left(n + \frac{1}{2} - \frac{\sin(2n+1)t}{2\sin t}\right) dt.\end{aligned}$$

Si l'on suppose $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou, condition équivalente, $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| < 2A$ (Notations 3°), on a

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\left(n + \frac{1}{2} - \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right) dt\right| < 2A\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\sum_1^n (k^2 t^2)\, dt$$

$$= 2A\, O(n^3)\int_0^{\frac{1}{n}} t\, dt = 2A\, O(n),$$

donc

$$\sigma_n^2 - f = O\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2n+1}{2n(n+1)\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt - \frac{1}{n(n+1)\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt.$$

[On verrait encore comme au (§ 1, 3°) que si $E_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, on peut remplacer partout O par o]. Or $\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| < 2n+1$; donc a étant une constante quelconque,

$$\left|\int_a^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt\right| = O(n).$$

D'ailleurs

$$\left|\int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{\varphi(t)}{t^2}\left[\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right]\sin(2n+1)t\, dt\right|$$

$$< \int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{|\varphi(t)|}{t^2}\,\frac{O(t^3)}{t^2}\,|\sin(2n+1)t|\, dt < O(1)\int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{|\varphi(t)|}{t}\, dt = O(1),$$

c'est-à-dire qu'à $O(1)$ près on peut remplacer $\int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{\varphi(t)\sin(2n+1)t}{t^2\sin t}\,dt$ par $\int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{\varphi(t)\sin(2n+1)t}{t^3}\,dt$ et cette dernière quantité est $O(n)$ si $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| < 2A$.

Donc

$$\sigma_n^2 - f = \frac{2n+1}{2n(n+1)\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et comme $\frac{2n+1}{2n(n+1)} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{2n(n+1)}$ on a finalement

$$\sigma_n^2 - f = \frac{1}{n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{15}$$

lorsque $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et si $E_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ on remplacera O par o.

Cette égalité prouve le théorème. On peut remarquer que la borne inférieure $\frac{1}{n}$ de cette dernière intégrale peut être remplacée par $\frac{\alpha}{n}$ comme dans (7).

On remarque aussi que si $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt = 2(\sigma_n - f) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$\sigma_n^2 - f = 2(\sigma_n - f) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si $E_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ on a

$$n(\sigma_n^2 - f) = 2n(\sigma_n - f) + o(1).$$

Donc

Si $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$n(\sigma_n^2 - f) \sim 2n(\sigma_n - f).$$

2. *Procédé de sommation de Cesaro d'ordre entier quelconque.* — Si l'on pose $S_n^1 = S_0 + \ldots + S_{n-1}$ on a

$$\sigma_n^1 = \frac{S_n^1}{C_n^1}.$$

Puis

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} S_k^1 \quad \text{et} \quad \sigma_n^2 = \frac{S_n^2}{\sum_{k=1} C_k^1}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} C_{k+p-1}^{p} = C_{n+p}^{p+1}.$$

En effet C^p_{k+p-1} est le coefficient de x^p dans le développement de $(1+x)^{k+p-1}$ et

$$\sum_{k=1}^{n}(1+x)^{k+p-1}=(1+x)^{p-1}\sum_{k=1}^{n}(1+x)^k$$
$$=(1+x)^{p-1}\left[\frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)}{x}\right]=\frac{(1+x)^{n+p}-(1+x)^p}{x}$$

et le terme en x^p dans le dernier membre a pour coefficient C^{p+1}_{n+p}. D'où $S^2_n=C^2_{n+1}\sigma^2_n$. Puis

$$\sigma^3_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}C^2_{k+1}\sigma^2_k}{C^3_{n+2}},\quad\ldots,\quad\sigma^p_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}C^{p-1}_{k+p-2}\sigma^{p-1}_k}{C^p_{n+p-1}}\quad\text{et}\quad\sigma^p_n-f=\frac{\sum_{k=1}^{n}C^{p-1}_{k+p-2}(\sigma^{p-1}_k-f)}{C^p_{n+p-1}}.$$

Or

$$\sigma^2_n-f=\frac{1}{2\pi C^2_{n+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[n+\frac{1}{2}-\frac{\sin(2n+1)t}{2\sin t}\right]dt$$

ou

$$C^2_{k+1}(\sigma^2_k-f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)-\frac{\sin(2k+1)t}{2\sin t}\right]dt,$$

que nous écrirons

$$C^2_{k+1}(\sigma^2_k-f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[C^1_k+\frac{1}{2}C^1_1-\frac{\sin(2k+1)t}{2\sin t}\right]dt.$$

D'où

$$C^3_{n+2}\sigma^3_n=\sum_{k=1}^{n}C^2_{k+1}(\sigma^2_k-f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[\sum_1^n C^1_k+\frac{1}{2}\sum_1^n C^1_1-\sum_1^n\frac{\sin(2k+1)t}{2\sin t}\right]dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[C^2_{n+1}+\frac{1}{2}C^1_n-\sum_1^n\frac{\sin(2k+1)t}{2\sin t}\right]dt$$

et en raison de $\sum_{k=1}^{n}C^p_{k+p-1}=C^{p+1}_{n+p}$ on a pour $p\geqq 3$:

$$C^p_{n+p-1}(\sigma^p_n-f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[C^{p-1}_{n+p-2}+\frac{1}{2}C^{p-2}_{n+p-3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{C^{p-3}_{n+p-4-(k-1)}\sin(2k+1)t}{2\sin t}\right]dt.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}kC^p_{n+p-1-(k-1)}=C^{p+2}_{n+p+1}.$$

En effet $kC^{p}_{n+p-1-(k-1)}$ est le coefficient de x^p dans le développement de $k(1+x)^{n+p-k}$ et l'on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(1+x)^{n+p-k} &= (1+x)^{n+p+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(1+x)^{k+1}}\\ &= -(1+x)^{n+p+1}\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^k}\right]\\ &= -(1+x)^{n+p+1}\frac{d}{dx}\left[\frac{1-(1+x)^n}{x(1+x)^n}\right]\\ &= (1+x)^{n+p+1}\frac{(1+x)^{n+1}-(n+1)x-1}{x^2(1+x)^{n-1}}\\ &= \frac{(1+x)^{n+p+1}-(1+x)^p-(n+1)x(1+x)^p}{x^2}.\end{aligned}$$

Il faut donc au numérateur de cette dernière quantité prendre le coefficient du terme en x^{p+2} qui est précisément C^{p-2}_{n+p+1}. Il en résulte que si $t\to 0$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{C^{p-3}_{n+p-1-(k-1)}\sin(2k+1)t}{2\sin t}$$

tend vers $C^{p-1}_{n+p-2}+\frac{1}{2}C^{p-2}_{n+p-3}$.

Cherchant alors l'approximation de f fournie par la moyenne de Cesaro d'ordre p, σ^p_n et supposant dans ce but $E_n(f)=0\left(\frac{1}{n}\right)$ c'est-à-dire $\frac{\varphi(t)}{t}$ uniformément borné en x et t (Notations 3°) nous écrirons encore :

$$\begin{aligned}C^{p}_{n+p-1}(\sigma^p_n-f) = {}& \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{2\pi}\left(C^{p-1}_{n+p-2}+\frac{1}{2}C^{p-2}_{n+p-3}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}C^{p-3}_{n+p-1-(k-1)}\sin(2k+1)t}{2\sin t}\right]dt.\end{aligned}$$

Le premier terme s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\varphi(t)}{2t^2\sin t}\left[2\sin t\left(C^{p-1}_{n+p-2}+\frac{1}{2}C^{p-2}_{n+p-3}\right)-\sum_{k=1}^{n}C^{p-3}_{n+p-1-(k-1)}\sin(2k+1)t\right]dt.$$

Or

$$2\sin t\left[C^{p-1}_{n+p-2}+\frac{1}{2}C^{p-2}_{n+p-3}\right]-\sum_{k=1}^{n}C^{p-3}_{n+p-1-(k-1)}\sin(2k+1)t$$

est un polynome trigonométrique d'ordre $2n+1$, impair, nul pour $t=0$. Son

développement commence par un terme en t^3 au voisinage de $t=0$ et sa dérivée troisième est

$$< 2C_{n+p-2}^{p-1} + C_{n+p-3}^{p-2} + \sum_{k=1}^{n} (2k+1)^3 C_{n+p-4-(k-1)}^{p-3}.$$

Or $C_n^p = O(n^p)$. Cette dérivée est donc en valeur absolue moindre que

$$O(n^{p-1}) + O(n^{p-2}) + O(n^{p-3}) \sum_{1}^{n} O(k^3)$$

c'est-à-dire $O(n^{p+1})$. Si $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| = O(1)$, le premier terme est donc en valeur absolue inférieur à

$$O(n^{p+1}) \int_0^{\frac{1}{n}} t\,dt = O(n^{p-1}).$$

Le troisième terme s'écrit : $\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{a} + \frac{2}{2\pi}\int_a^{+\infty}$ où a est une constante quelconque $< \frac{\pi}{2}$.

Or

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_a^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} C_{n+p-4-(k-1)}^{p-3} \sin(2k+1)t}{2\sin t} \right] dt \right|$$

$$< \frac{1}{2\pi} \int_a^{+\infty} \frac{4 \max|f|}{t^2} \left[\sum_{k=1}^{n} k C_{n+p-4-(k-1)}^{p-3} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} C_{n+p-4-(k-1)}^{p-2} \right]$$

$$< \frac{1}{\pi} \int_a^{+\infty} \frac{\max|f|}{t^2} \left[C_{n+p-2}^{p-1} + \frac{1}{2} C_{n+p-3}^{p-2} \right] = O(n^{p-1}).$$

et

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{\varphi(t)}{t^2} \frac{\sum_{k=1}^{n} C_{n+p-4-(k-1)}^{p-3} \sin(2k+1)t}{2\sin t} dt \right| < \int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{\sum_{k=1}^{n} O(n^{p-3})}{t^2} dt$$

parce que $\frac{\varphi(t)}{t} = O(1)$ et

$C_{n+p-4-(k-1)}^{p-3} = O(n^{p-3})$; cette quantité est donc $O(n^{p-1})$.

En définitive

$$\sigma_n'' - f = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{C_{n+p-2}^{p-1} + \frac{1}{2} C_{n+p-3}^{p-2}}{C_{n+p-1}^{p}} \right] \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + \frac{O(n^{p-1})}{C_{n+p-1}^{p}}$$

c'est-à-dire

$$\sigma_n^p - f = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{C_{n+p-2}^{p-1} + \frac{1}{2}C_{n+p-3}^{p-2}}{C_{n+p-1}^{p}}\right]\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{C_{n+p-2}^{p-1}}{C_{n+p-1}^{p}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

On peut donc énoncer :

THÉORÈME 9. — *Les procédés d'approximation définis par les moyennes de Cesaro d'ordre p entier* ($p = 1, 2, \ldots$), *ont tous même classe de saturation.*

On remarquera : 1° qu'un calcul plus simple que pour σ_n et σ_n^2 permet de prouver que les classes de saturation attachées aux moyennes de Cesaro d'ordre entier $p \geqq 3$ sont les mêmes, mais ne prouve pas que cette classe est celle attachée au procédé de Fejèr;

2° que la constante qui figure dans l'approximation de f par σ_n^p lorsque $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ est asymptotiquement pour $p \infty$: $\frac{p}{2\pi n}$;

3° que si $|\sigma_n^p - f| = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $f = \text{const.}$

IV. — Procédé d'approximation de Jackson-de la Vallée-Poussin.

Dans ce paragraphe nous étudions la classe de saturation attachée au procédé de Jackson-de la Vallée Poussin défini par les sommes d'ordre $2n$,

$$J_{2n} = \frac{3}{2\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{t^2}\sin^4 nt\,dt. \quad (\text{V}.11)$$

Remarquons d'abord que si $\sigma_n^*(x)$ désigne la conjuguée de la $n^{\text{ième}}$ somme de Fejèr de $f(x)$,

$$c_n = \frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x+2t)}{t^2}\sin^2 nt\sin 2nt\,dt = \sigma_{2n}^* - \sigma_n^*.$$

En effet $f(x+2t)\sin^2 nt \sin 2nt$ a pour période π et en raison de

$$\frac{1}{\sin^2 t} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t+k\pi)^2}$$

on a

$$c_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x+2t)-f(x-2t)|\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt.$$

De $\frac{\sin^2 nt}{\sin t} = \sum_{p=1}^{n}\sin(2p-1)t$, on déduit :

$$\varphi_n = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x-2t)]\frac{1}{\sin t}\left[\sum_{p=1}^{n} 2\sin 2nt \sin(2p-1)t\right] dt$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x-2t)]\frac{1}{\sin t}$$

$$\times\left[\sum_{p=1}^{n}(\cos(2n-2p+1)t-\cos(2n+2p-1)t)\right] dt$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x-2t)]\frac{1}{\sin t}$$

$$\times\sum_{p=1}^{n}[(\cos t-\cos(2n+2p-1)t)-(\cos t-\cos(2n-2p+1)t)]\,dt.$$

Or

$$S_p' = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x-2t)]\frac{\cos t-\cos(2p+1)t}{\sin t}\,dt.$$

D'où

$$\varphi_n = \frac{1}{2n}[S_n'+S_{n+1}'+\ldots+S_{2n-1}'-(S_1'+S_2'+\ldots+S_{n-1}')]$$

et comme $\sigma_n' = \dfrac{S_1'+\ldots+S_{n-1}}{n}$ il vient

$$\varphi_n = \frac{1}{2n}[2n\sigma_{2n}'-2n\sigma_n'] = \sigma_{2n}'-\sigma_n'.$$

Théorème 10_2. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le procédé d'approximation de Jackson-de la Vallée-Poussin défini par* J_{2n} *donne de* $f(x)$ *une approximation* $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, *est que* $f(x)$ *possède une dérivée* $f'(x)$ *satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre* 1.

Posant encore $\varphi(t) = f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)$, on a

$$J_{2n}-f = \frac{3}{2\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^3}\sin^4 nt\,dt.$$

Nous cherchons l'approximation donnée de f par J_{2n} lorsque $E_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. f possède alors une dérivée continue f' telle que $E_n(f') = O\left(\frac{1}{n}\right)$. D'autre part on a aussi

$$E_n(f') = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad E_n(f'') = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{(Notations 3°)}.$$

En raison de la convergence absolue des intégrales qui vont intervenir on a, en intégrant par parties,

$$J_n-f = \frac{1}{\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t^3}\sin^4 nt\,dt + \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^3}\sin^2 nt\sin 2nt\,dt.$$

Une nouvelle intégration par parties portant sur la dernière intégrale donne :

$$\frac{1}{2\pi n^2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[2n\sin nt\cos nt\sin 2nt+2n\sin^2 nt\cos 2nt\right]dt$$
$$+\frac{1}{\pi n^2}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t^2}\sin^2 nt\sin 2nt\,dt,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}(\sin^2 2nt-\sin^2 nt)\,dt+\frac{1}{n}\left[\sigma_{2n}(f'';x)-\sigma_n(f'';x)\right]$$

en raison de $\sin^2 2nt+2\sin^2 nt\cos 2nt=2(\sin^2 2nt-\sin^2 nt)$ et du lemme précédent. On a donc

$$J_{2n}-f=\frac{1}{\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t^3}\sin^4 nt\,dt$$
$$+\frac{1}{n}\left|\sigma_{2n}(f'';x)-\sigma_n(f'';x)\right|+2\sigma_{2n}(f;x)-\sigma_n(f;x)-f(x).$$

Or $\sin^4 nt=\sin^2 nt-\frac{1}{4}\sin^2 2nt$. Le premier terme s'écrit

$$\frac{1}{\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t^3}\sin^2 nt\,dt$$
$$-\frac{2}{(2n)^3\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t^3}\sin^2 2nt\,dt.$$

Soit alors

$$u_n=\frac{1}{\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t^3}\sin^2 nt\,dt.$$

Comme

$$\frac{\cos t}{\sin^3 t}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t+k\pi)^2},$$

on a

$$u_n=\frac{1}{\pi n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{\sin^2 t}\cos t\sin^2 nt\,dt$$
$$=\frac{1}{2\pi n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{\sin^2 t}\sum_{k=1}^{n}(2\cos t\sin|2k-1|t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2\pi n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{\sin^2 t}\left[\sin t+2\sum_{k=1}^{n-1}\sin 2pt+\sin 2nt\right]dt$$
$$=\frac{1}{2\pi n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{\sin t}dt+\frac{1}{n^2}\left[f''-\sigma_n(f'';x)\right]+\frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k\left[f''-\sigma_k(f'';x)\right].$$

La première intégrale a un sens parce que f'' existe et $E_n(f'')=O\left(\frac{1}{n}\right)$. La

première quantité vaut donc $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La seconde est $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ parce que $\sigma_n(f'';x)$ converge uniformément vers f''.

On a donc aussi

$$\frac{2}{(2n)^2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t^2}\sin^2 2nt\,dt$$
$$=o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{\pi(2n)^2}\left\{\sum_{k=1}^{2n+1}k[f''-\sigma_k(f'';x)]\right\}.$$

Or

$$\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k(f-\sigma_k)=\frac{n-1}{n^2}\left[f-\frac{\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+(n-1)\sigma_{n-1}}{1+2+\ldots+(n+1)}\right].$$

Enfin en remarquant que $|2\sigma_{2n}-\sigma_n-f|=O[E_n(f)]$ et en utilisant les résultats obtenus sur l'approximation par les sommes de Fejèr et les moyennes de Cesaro d'ordre 2 des fonctions f telles que $E_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ [*voir* (7) et (15)] (ce qui est le cas pour f'' ici) on obtient après réduction :

$$J_{2n}-f=O\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{4\pi n^2}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi_1}{t^2}\,dt-\frac{1}{2\pi n^2}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi_1}{t^2}\,dt-\frac{1}{2\pi n^2}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi_1}{t^2}\,dt,$$

où

$$\varphi_1=f''(x+2t)-f''(x-2t)-2f''(x)$$

c'est-à-dire

$$J_{2n}-f=-\frac{3}{4\pi n^2}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi_1}{t^2}\,dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{16}$$

Ainsi s'exprime l'approximation de f par J_{2n} lorsque $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Si $E_n(f)=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ on a aussi

$$E_n(f')=o\left(\frac{1}{n^2}\right),\qquad E_n(f')=o\left(\frac{1}{n^2}\right),\qquad E_n(f'')=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et en reprenant les calculs précédents on voit qu'on peut dans (16) remplacer O par o. Il existe donc une classe de saturation (Th. 6). Elle est obtenue lorsque $\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi_1}{t^2}\,dt$ est uniformément bornée en x et n, c'est-à-dire (Th. 2) lorsque $|\sigma_n(f'';x)-f''(x)|=O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc (1.4) lorsque $f'\in\mathrm{Lip}\,1$. Ce qui achève de prouver le théorème.

On peut alors reprendre cette question et chercher la classe de saturation attachée à ce procédé, parmi les fonctions possédant une dérivée première appartenant à la classe $\mathrm{Lip}\,1$. On a le résultat suivant :

THÉORÈME 11. — *L'approximation de f par J_{2n} lorsque $f' \in \text{Lip } 1$ est donnée par*

$$J_{2n} - f = \frac{9}{16\pi n^3} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4}\, dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En effet

$$J_{2n} - f = \frac{3}{2\pi n^3} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(t)}{t^4} \sin^4 nt\, dt + \frac{3}{2\pi n^3} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4} \sin^4 nt\, dt.$$

Comme f' existe et $\in \text{Lip } 1$, $\frac{\varphi(t)}{t^2}$ est borné et

$$\left| \frac{3}{2\pi n^3} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(t)}{t^4} \sin^4 nt\, dt \right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'où

$$J_{2n} - f = O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{9}{16\pi n^3} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4}\, dt$$

$$- \frac{3}{4\pi n^3} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4} \cos 2nt\, dt + \frac{3}{16\pi n^3} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4} \cos 4nt\, dt.$$

Les deux dernières intégrales valent $O(n)$, d'où le résultat.

Par conséquent pour que $|J_{2n} - f| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, c'est-à-dire pour que $f' \in \text{Lip } 1$ il faut et il suffit que $\frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4}\, dt$ soit borné uniformément en n et x. Un raisonnement déjà utilisé prouve que cette condition est équivalente à $\varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^3}\, dt$ borné uniformément en x et ε. Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME 12. — *Pour que $f(x)$ possède une dérivée f' appartenant à la classe* Lip 1, *il faut et il suffit que $\varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t^4}\, dt$ soit uniformément borné en x et ε.*

Remarquons enfin que si f' existe et $\in \text{Lip } 1$,

$$|f'(x) - f'(x')| < M' |x - x'|$$

et

$$|f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| = |2t[f'(x+2\theta t) - f'(x-2\theta t)]| \qquad (0 < \theta < 1),$$
$$\leq 8M' t^2.$$

Réciproquement si $\left| \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)}{t^2} \right|$ est uniformément borné en x et t par $8M'$,

$$|J_{2n} - f| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

car

$$|J_{2n}-f| = \frac{3}{2\pi n^3}\left|\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^3}\sin^3 nt\,dt\right| < \frac{12M'}{\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 nt}{t^2}dt = \frac{12M'}{\pi n^2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 t}{t^2}dt.$$

Donc f possède une dérivée $f' \in \mathrm{Lip}\,1$. D'où ce résultat :

Théorème 13. — *$f(x)$ étant continu, de période 2π, pour que f possède une dérivée f' appartenant à la classe* Lip 1, *il faut et il suffit que* $\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^2}$ *soit uniformément borné en x et t.*

V. — Procédé d'approximation défini par la fonction sommatoire $1-\alpha u+\beta u^2$.

Soit $g(u)=1-\alpha u+\beta u^2$ et considérons les sommes trigonométriques définies à partir de la série de Fourrier de f :

$$T_{n-1} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Nous supposerons que $g(1)=0$, c'est-à-dire $1+\alpha+\beta=0$ et $\alpha\neq 0$.
En posant

$$A_k = a_k\cos kx + b_k\sin kx,$$

il vient

$$T_n = (1+\alpha)S_n - \alpha\sigma_n - \frac{\beta}{(n+1)^2}S''_n(x).$$

En tenant compte de $1+\alpha+\beta=0$ et de (N. 15), on obtient :

$$T_n - f = -\beta\frac{2n+1}{(n+1)^2}(S_n-f) - \alpha(\sigma_n-f) - \beta\frac{n(2n+1)}{(n+1)^2}(\sigma_n-f) + \frac{\beta n}{n+1}\left(\frac{\sigma_1+\ldots+n\sigma_n}{1+\ldots+n}-f\right).$$

Si alors on suppose $E_n(f)=0\left(\frac{1}{n}\right)$, $|S_n-f|=0\left(\frac{\log n}{n}\right)$ et d'après (7) et (17) on a

$$T_n - f = 0\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\alpha}{2\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt.$$

Lorsque $E_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ on peut dans $T_n - f$ remplacer $0\left(\frac{1}{n}\right)$ par $o\left(\frac{1}{n}\right)$ et l'on en déduit le résultat suivant :

Théorème. — *Le procédé d'approximation défini par la fonction sommatoire $1+\alpha u+\beta u^2$ où $\alpha+\beta+1=0$ et $\alpha\neq 0$ possède la même la classe de saturation que celle qui est attachée au procédé de Fejèr.*

CHAPITRE III.

APPLICATIONS A DIVERS PROBLÈMES D'APPROXIMATION ET AUX SÉRIES DE FOURIER.

1. *Approximation de la fonction conjuguée par les sommes de Fejèr.*

THÉORÈME 14. — *Si* $f(x)\in \mathrm{Lip}\,1$, $\sigma_n^{\cdot}-f^{\cdot}=O\left(\frac{1}{n}\right)$ [1]. *Si de plus* $f(x)$ *possède une dérivée continue* $f'(x)$,

$$f^{\cdot}(x)-\sigma_n^{\cdot}(x)=\frac{f'(x)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$f'(x)=\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{2f^{\cdot}(x)-f^{\cdot}(x+t)-f^{\cdot}(x-t)}{t^2}\,dt.$$

La première partie du théorème est connue. Nous en avons démontré la réciproque (Chap. I, § 4). La démonstration suivante précise l'approximation de $f^{\cdot}$ par $\sigma_n^{\cdot}$ lorsque $f'(x)$ existe et est continue.

Nous utiliserons les sommes $V_n=2\sigma_{2n}-\sigma_n$. D'après (N. 19) on a

$$V_n'=2n(\sigma_{2n}^{\cdot}-f^{\cdot})+n(2\sigma_{2n}^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot}-f^{\cdot})+\frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{t^3}(\sin^2 2nt-\sin^2 nt)\,dt.$$

Or $|2\sigma_{2n}^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot}-f^{\cdot}|=O[E_n(f^{\cdot})]$. Soit d'autre part

$$A=\sup_{x,\,h}\left|\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}\right|.$$

On a

$$\left|\frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{t^3}(\sin^2 2nt-\sin^2 nt)\,dt\right|<\frac{2A}{n\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin^2 2nt}{t^2}+\frac{\sin^2 nt}{t^2}\right)dt=\frac{3A}{\pi}$$

et par suite

$$|\sigma_{2n}^{\cdot}-f^{\cdot}|<\frac{|V_n'|}{2n}+O[E_n(f^{\cdot})]+\frac{3A}{2\pi n}.$$

Or l'hypothèse $f\in\mathrm{Lip}\,1$ entraîne : $|V_n'|=O(1)$ (1) et $E_n(f^{\cdot})=O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $E_n(f^{\cdot})=O\left(\frac{1}{n}\right)$ [8], Donc $|\sigma_{2n}^{\cdot}-f^{\cdot}|=O\left(\frac{1}{n}\right)$ ce qui prouve la première partie du théorème.

Supposons de plus que $f'(x)$ existe et soit continue pour $0\leq x\leq 2\pi$.

(1) Chapitre I, 1°, *e*.

Posons $\Delta(2t)=f(x+2t)-f(x-2t)$. L'intégrale qui figure dans l'expression de V'_n s'écrit

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\Delta(2t)}{t}-4f'(x)\right]\frac{\sin^2 2nt}{t^2}dt-\frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\Delta(2t)}{t}-4f'(x)\right]\frac{\sin^2 nt}{t^2}dt+2f'(x),$$

car $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 nt}{t^2}dt=\frac{n\pi}{2}$. On a donc

$$V'_n-f'=2n(\sigma'_{2n}-f')+f'+n(2\sigma'_{2n}-\sigma'_n-f')+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\Delta\left(\frac{2t}{n}\right)}{\frac{t}{n}}-4f'(x)\right]\frac{\sin^2 2t-\sin^2 t}{t^2}dt.$$

Tenant compte de $\Delta\left(\frac{2t}{n}\right)=\frac{4t}{n}f'\left(x+\frac{2\theta t}{n}\right)$ où $|\theta|<1$, la dernière intégrale s'écrit :

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[f'\left(x+\frac{2\theta t}{n}\right)-f'(x)\right]\frac{\sin^2 2t-\sin^2 t}{t^2}dt$$

et est en valeur absolue inférieure à

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\omega_1\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{|\sin^2 2t-\sin^2 t|}{t^2}dt,$$

$\omega_1(h)$ désignant le module de continuité de $f'(x)$. Cette quantité qu'on rencontre dans la théorie élémentaire des sommes de Fejèr [6] tend vers zéro pour $n\infty$ comme $\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\left|\log\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right|$.

D'ailleurs lorsque f' existe et est continue

$$V'_n(f)=V_n(f') \quad \text{et} \quad |V'_n-f'|=O[E_n(f')].$$

On a donc

$$\frac{V'_n-f'}{2n}=\frac{f'}{2n}+(\sigma'_{2n}-f')+(2\sigma'_{2n}-\sigma'_n-f')+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mais l'hypothèse f' entraîne $E_n(f)=o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $E_n(f')=o\left(\frac{1}{n}\right)$ [8]. Il vient alors

$$\frac{V'_n-f'}{2n}=\frac{f'}{2n}+\sigma'_{2n}-f'+o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{donc} \quad \sigma'_{2n}-f'=-\frac{f'(x)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Enfin de cette dernière égalité on tire

$$\sigma'_{2n+1}-f'=-\frac{f'(x)}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)+[\sigma'_{2n+1}-\sigma'_{2n}].$$

Comme $S'_n=(n+1)\sigma'_{n+1}-n\sigma'_n$,

$$S'_{2n}=(2n+1)\sigma'_{2n+1}-2n\sigma'_{2n} \quad \text{et} \quad \sigma'_{2n+1}-\sigma'_{2n}=\frac{S'_{2n}-\sigma'_{2n+1}}{2n}=O\left(\frac{\log n}{n^2}\right).$$

Donc

$$\sigma'_{2n+1} - f' = -\frac{f'(x)}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et par suite

$$\sigma'_n - f' = -\frac{f'(x)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Quant à la troisième partie du théorème, d'après (7) on a

$$\sigma'_n - f' = \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{f'(x+2t)+f'(x-2t)-2f'(x)}{t^2}\,dt + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= -\frac{f'(x)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où le dernier résultat en changeant $2t$ en t.

2. *Série de Fourier, série conjuguée et sommes de Fejèr.* — Dans ce paragraphe nous indiquons des critères de convergence de la série conjuguée et des conditions nécessaires et suffisantes pour que $|S_n - f| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ exprimées au moyen des dérivées des sommes de Fourier.

Théorème 15. — *$S_n(x)$ désignant la $n^{ième}$ somme de Fourier de $f(x)$ continue, si $\frac{S'_n(x)}{n}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ (en particulier si la série de Fourier converge uniformément) la condition nécessaire et suffisante pour qu'au point x la série conjuguée converge est que $\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x-2t)]\operatorname{cotg} dt$ ait une limite pour $\varepsilon = 0$ et la série conjuguée a alors pour somme.*

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x-2t)]\operatorname{cotg} t\,dt.$$

Soit

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x-2t)]\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$$

et

$$S'_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x-2t)]\frac{\cos t - \cos(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

Pour calculer $S'_n(x)$ nous partons de

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x}{2}}{\sin\frac{u-x}{2}}\frac{du}{2}.$$

$\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$ étant une fonction paire de t sa dérivée est impaire d'où

$$S'_n(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(u)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right)\frac{du}{2}, \qquad \text{où} \qquad t = \frac{u-x}{2}$$

ou encore

$$S'_n(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right)dt.$$

Posant $\psi(t) = f(x+2t) - f(x-2t)$ on obtient

$$\frac{S'_n(x)}{2n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\left[\frac{\sin(2n+1)t\cos t - (2n+1)\sin t\cos(2n+1)t}{(2n+1)\sin^2 t}\right]dt.$$

Soit

$$u_n(t) = \sin(2n+1)t\cos t - (2n+1)\sin t\cos(2n+1)t = (n+1)\sin 2nt - n(\sin 2n+2)t$$

et

$$\begin{aligned} u'''_n(t) &= 8n(n+1)\left[(n+1)^2\cos(2n+2)t - n^2\cos 2nt\right] \\ &= 8n(n+1)\left[(2n+1)\cos(2n+2)t - 2n^2\sin t\sin(2n+2)t\right]. \end{aligned}$$

On voit donc que si $|t| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|u'''_n(t)| = O(n^3)$ et la formule de Taylor permet d'écrire lorsque $|t| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|u_n(t)| < t^3 O(n^3)$.

Dans l'expression de $\frac{S'_n}{2n+1}$ on a donc

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}}\right| = \omega\left(\frac{1}{n}\right)O(n^2)\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{t^3}{\sin^2 t}dt = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

D'où

$$\frac{S'_n(x)}{2n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\frac{\sin(2n+1)t\cos t}{(2n+1)\sin^2 t}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\frac{\cos(2n+1)t}{\sin t}dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Considérons $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\frac{\sin(2n+1)t\cos t}{(2n+1)\sin^2 t}dt$. Si l'on remplace $\cos t$ par 1 l'erreur commise est

$$\frac{2}{2n+1}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\sin^2 t}\sin(2n+1)t\,dt.$$

Or $\psi(t)\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\sin^2 t}$ est fonction continue de t et

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\psi(t)\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\sin^2 t}dt = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Donc

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\,\frac{\sin(2n+1)t\sin^2\frac{t}{2}}{\sin^2 t}\,dt$$

est un coefficient de Fourier d'une fonction continue et tend vers zéro pour $n\infty$, (uniformément en x). L'erreur commise est donc $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Le même raisonnement prouve qu'on peut dans $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\,\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)\sin^2 t}\,dt$ remplacer $\sin^2 t$ par t^2 et que l'erreur commise est $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il reste donc à étudier

$$v_n = \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\,\frac{\sin(2n+1)t}{t^2}\,dt.$$

Nous prouverons que $v_n = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$.

Si dans l'expression de v_n nous remplaçons f par $P_n(x)$ tel que $|f-P_n| = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ l'erreur commise est $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. Soit $\psi_n(t)$ ce qui devient alors $\psi(t)$; on a

$$v_n = \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \psi_n(t)\,\frac{\sin(2n+1)t}{t^2}\,dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Enfin selon une méthode déjà utilisée, changeons t en $t-\frac{\pi}{2n+1}$ et remarquons que

1° $$\left|\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\psi_n\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)^2}\sin(2n+1)t\,dt\right|$$

$$< O\left(\frac{1}{n}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\max|P'_n|}{\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)}\,dt = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right];$$

car d'après (Ch. I, 2°), $|P'_n| = O\left[n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$;

2° $$\left|\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\psi_n\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)^2}\sin(2n+1)\,dt\right| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Puis en prenant la demi-somme des deux expressions de v_n on a :

$$v_n = \frac{1}{2n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\psi_n(t)}{t^2} - \frac{\psi_n\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)^2} \right] \sin(2n+1)t\,dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

ou

$$v_n = \frac{1}{2n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi_n(t) - \psi_n\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)^2} \sin(2n+1)t\,dt$$

$$+ \frac{1}{n}\,\frac{\pi}{2n+1}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi_n(t)}{t\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)^2} \sin(2n+1)t\,dt$$

$$+ \frac{1}{n}\,\frac{2\pi^2}{(2n+1)^2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi_n(t)}{t^2\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)^2} \sin(2n+1)t\,dt.$$

Comme

$$|\psi_n(t)| \leq 4t \max|P'_n| = tO\left[n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

et

$$\left|\psi_n(t) - \psi_n\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)\right| = \frac{\pi}{2n+1} O[\max|P'_n|] = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

on a en définitive

$$v_n = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Par conséquent $f(x)$ étant continue et $\omega(h)$ son module de continuité

$$\frac{2S'_n}{2n+1} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\,\frac{\cos(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

Or

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}} \psi(t)\,\frac{\cos t - \cos(2n+1)t}{\sin t}\,dt\right| = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{|\cos t - \cos(2n+1)t|}{\sin t}\,dt = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

parce que pour $|t| = O\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$|\cos t - \cos(2n+1)t| = t^2 O(n^2).$$

On a donc :

$$(17)\qquad \frac{2S'_n}{2n+1} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + S_n - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\cot g\,t\,dt.$$

Supposons alors qu'au point x, $\lim_{n\infty} \frac{S'_n(x)}{n} = 0$. Si S'_n a une limite,

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\operatorname{cotg} t\, dt$$

a même limite pour $n\infty$ et réciproquement. D'ailleurs si

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\operatorname{cotg} t\, dt$$

a une limite pour $n\infty$,

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\operatorname{cotg} t\, dt$$

a même limite pour $\varepsilon = 0$. En effet n étant l'entier tel que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \leq \frac{1}{n}$, lorsque ε est donné,

$$\left|\int_{\frac{1}{n+1}}^{\varepsilon}\right| \leq \left|\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \psi(t)\operatorname{cotg} t\, dt\right| = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{t} = O\left[\frac{1}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

D'où résulte le théorème énoncé lorsque $\frac{S'_n(x)}{n} \to 0$ avec $\frac{1}{n}$. D'après le théorème général, on remarquera que ce résultat est exact dans le cas plus particulier où la série de Fourier de f converge uniformement car alors $\frac{S'_n(x)}{n}$ tend uniformément vers zéro lorsque n devient infini.

Le théorème 15 généralise le théorème de Young [7] pour les fonctions continues. Celui-ci indique même condition de convergence pour la série conjuguée en supposant que $f(x)$ non nécessairement continue, est à variation bornée. Lorsque $f(x)$ est continue et à variation bornée, sa série de Fourier converge uniformément. Pour les fonctions continues le théorème de Young est donc encore exact avec des hypothèses plus générales. Nous donnerons diverses conséquences de l'égalité (17).

THÉORÈME 16. — *Si en tout point d'un résiduel,*

$$\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\operatorname{cotg} t\, dt$$

a une limite pour $\varepsilon = 0$, *il existe un résiduel* R *tel qu'en tout point de* R *une suite partielle infinie de* $\{S'_n\}$ converge vers

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\operatorname{cotg} t\, dt.$$

Rappelons qu'un résiduel d'un segment (a, b) est le complémentaire sur (a, b) d'un ensemble de 1re catégorie situé sur (a, b). Étant donné un ensemble de points $a_n (n = 1, 2, \dots)$ denses sur (a, b) et des intervalles $(a_n, a_n + l_n)$ tels que $\lim_{n\infty} l_n = 0$ l'ensemble de tous les points de (a, b) intérieurs à une infinité d'intervalles $(a_n, a_n + l_n)$ constitue un résiduel de (a, b).

Soit alors $\rho_n = \max_x |S_n - f|$. On sait que $\rho_n = O(\log n)$ [7].

On a

$$|S_n(x+h) - S_n(x)| \leq 2\rho_n + |f(x+h) - f(x)|,$$

d'où

$$S'_n(x+\theta h) < \frac{2\rho_n}{|h|} + \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Prenons $h = h_n = \frac{\log n}{n\varepsilon_n}$ où $\lim_{n\infty} \varepsilon_n = 0$ de façon que $\lim_{n\infty} h_n = 0$ (par exemple $\varepsilon_n = \frac{1}{\log n}$). On a alors

$$\frac{1}{n} |S'_n(x+\theta h_n)| < O(\varepsilon_n) + \frac{\varepsilon_n}{\log n}\omega(h_n) = o(1).$$

Donc en posant $\xi_n = x + \theta h_n$, $\frac{|S'_n(\xi_n)|}{n} \to 0$. (α, β) étant un intervalle de l'axe des x, si x est choisi intérieur à (α, β), dès que n est suffisamment grand, $\xi_n = x + \theta h_n$ est intérieur à (α, β). D'autre part $S'_n(x)$ étant fonction continue de x, l'hypothèse $\left|\frac{S'_n(\xi_n)}{n}\right| < \varepsilon'_n$ où $\lim_{n\infty} \varepsilon'_n = 0$ permet d'associer à ξ_n un intervalle de longueur λ_n tel que si x_n est situé dans $(\xi_n, \xi_n + \lambda_n)$, on ait $\frac{|S'_n(x_n)|}{n} < 2\varepsilon'_n$. Les ξ_n étant choisis denses sur (a, b) et λ_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, l'ensemble des points intérieurs à une infinité de $(\xi_n, \xi_n + \lambda_n)$ constitue un résiduel R'. A tout x de R' on peut associer une suite d'entiers $\{n_p\}_x$ tels que $\lim_{n\infty} \frac{S'_{n_p}(x)}{n} = 0$.

Supposons qu'en tout point d'un résiduel R'',

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)] \operatorname{cotg} t \, dt$$

ait une limite finie. On obtient le théorème 2 en remarquant de R' et R'' ont en un commun un résiduel R.

Théorème 17. — *$f(x)$ étant continue, lorsque $\frac{S'_n(x)}{n}$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$ (et en particulier lorsque la série de Fourier de f converge uniformément), une condition nécessaire et suffisante pour que la série conjuguée converge uniformément est que :*

1° $\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} |f(x+2t) - f(x-2t)] \operatorname{cotg} t \, dt$ *ait une limite pour* $\varepsilon = 0$.

2° $\int_0^{\varepsilon} [f(x+2t)-f(x-2t)]\cot g t\,dt$ *tende uniformément vers zéro avec* ε.

En effet si $\frac{S'_n}{n}$ tend uniformément vers zéro, l'hypothèse que S'_n tend uniformément vers une limite entraîne que $\lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\cot g t\,dt$ existe et que $\int_0^{\varepsilon}\psi(t)\cot g t\,dt$ tend uniformément vers zéro avec ε.

$(\psi(t)=f(x+2t)-f(x-2t))$. Réciproquement, si $\frac{S'_n}{n}$ tend uniformément vers zéro, les hypothèses $\lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\cot g t\,dt$ existent et $\int_0^{\varepsilon}\psi(t)\cot g t\,dt$ tend uniformément vers zéro, entraînent que la série conjuguée converge uniformément (1).

THÉORÈME 18. — *Pour que* $|S_n-f|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)(0<\alpha\leq 1)$ *il faut et il suffit que* $|S''_n(x)|=O(n^{2-\alpha})$.

Si nous cherchons la condition pour que $|S_n-f|=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ il faut d'abord supposer que $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$.

D'après (1), si $|S_n-f|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$, $|S''_n(x)|=O(n^{2-\alpha})$.

Réciproquement si l'on suppose $S''_n(x)=O(n^{2-\alpha})\left[\text{et } E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$ en vertu de (N 15) on a :

$$\frac{S''_n(x)}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}(f-S_n)+\frac{2n+1}{n+1}(\sigma_n-f)-\left(\frac{\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+n\sigma_n}{1+2+\ldots+n}-f\right),$$

et lorsque $0<\alpha<1$

$$|\sigma_n-f|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),\qquad \left|\frac{\sigma_1+\ldots+n\sigma_n}{1+\ldots+n}-f\right|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\qquad \text{d'où}\quad |f-S_n|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Lorsque $\alpha=1$, $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ et d'après (7) et (15) on a :

$$\sigma_n-f=\frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}\,dt+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

et

$$\sigma_n^2-f=\frac{2n+1}{2n(n+1)\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}\,dt+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

(1) Rappelons le théorème de Fejèr : Si la série de Fourier converge uniformément et si f' est continue, la série conjuguée converge uniformément [7].

Et par suite

$$\frac{S_n''(x)}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}(f-S_n) + \frac{2n+1}{2\pi n(n+1)}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} - \frac{2n+1}{2\pi n(n+1)}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{n}{n+1}(f-S_n) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc si $|S_n''| = O(n)$,

$$|f-S_n| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Remarque. — En général une des conditions $|S_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|\sigma_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ n'entraîne pas l'autre.

Si en effet on considère $f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, on a bien $|S_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Mais comme

$$\sigma_n - f = S_{n-1} - f + \frac{1}{n}\sum_1^{n-1} \frac{\cos px}{p}, \qquad \sigma_n(0) - f(0) \sim \frac{\log n}{n}.$$

De même si $|\sigma_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ on ne peut avoir $|S_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ que si $|S_n'| = O(1)$ en vertu de $\sigma_n = S_{n-1} + \frac{1}{n}S_{n-1}'$. Or, si $|\sigma_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $f \in \text{Lip } 1$; et en général si $f \in \text{Lip } 1$ on n'a pas $|S_n'| = O(1)$ car dans le cas contraire on aurait aussi $|S_n''| = O(n)$ et par suite d'après le théorème précédent $|S_n - f'| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ce qui est inexact.

Cette remarque et le théorème précédent sont précisés par les résultats suivants qui concernent l'ordre de grandeur des dérivées première et seconde des sommes de Fejèr.

Théorème 19. — *Si* $f \in \text{Lip } 1$, $|\sigma_n'(x)| = O(1)$ *uniformément en* n *et* x.

Théorème 20. — *Si* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|\sigma_n''(x)| = O(n)$.

On obtient d'après (N. 13) : $\sigma_n' = (n+1)(\sigma_n^2 - \sigma_n)$ quand on échange les rôles de σ_n et σ_n'.

D'où

$$\sigma_n'' = (n+1)(\sigma_n^2 - f - \sigma_n + f)$$

$$= (n+1)\left\{\left[\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n\pi}\right]\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

[d'après (7) et (15)]

$$= \frac{n+1}{2n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}\,dt + O(1)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}\,dt + O(1).$$

Si $f \in \mathrm{Lip}\,1$, $|\sigma_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (Chap. I, 4°) et par suite

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}\,dt = O(1) \qquad [\text{d'après (7)}].$$

Donc $|\sigma_n''| = O(1)$. En remplaçant f'' par f on a le théorème.

Pour démontrer le théorème 20 nous calculerons σ_n'' à partir de l'intégrale donnant σ_n. On a (N. 14) :

$$\sigma_n'' = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(t)\left[\frac{n^2\cos 2nt}{t^2} - \frac{2n\sin 2nt}{t^3} + \frac{3\sin^2 nt}{t^4}\right]dt.$$

Posons

$$u_n(t) = n^2t^2\cos 2nt - 2nt\sin 2nt + 3\sin^2 nt.$$

On a alors

$$\sigma_n'' = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(t)\frac{u_n(t)}{t^4}\,dt.$$

Si dans $u_n(t)$ on remplace t^2 et t par $\sin^2 t$ et $\sin t$ on ne commet sur $\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t)\frac{u_n(t)}{t^4}\,dt$ qu'une erreur qui est $O\left(\frac{1}{n}\right)$. En effet

$$|\sin^2 t - t^2| = O(t^4) \qquad \text{et} \qquad |\sin t - t| = O(t^3).$$

Donc

$$u_n(t) - n^2\sin^2 t\cos 2nt + 2n\sin t\sin 2nt - 3\sin^2 nt] = n^2O(t^4) + nO(t^3),$$

et par suite en posant

$$v_n(t) = n^2\sin^2 t\cos 2nt - 2n\sin t\sin 2nt + 3\sin^2 nt,$$

on a

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t)\frac{u_n(t)-v_n(t)}{t^4}\,dt\right| = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(t)|\,\frac{n^2O(t^4)+nO(t^3)}{t^4}\,dt$$

Or si $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| = O(1)$, donc

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t)\frac{u_n(t)-v_n(t)}{t^4}\,dt\right| = O\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^{\frac{1}{n}} (n^2t+n)\,dt = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc

$$\sigma_n'' = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t)\frac{u_n(t)}{t^4}\,dt + \frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4}u_n(t)\,dt$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t)\frac{v_n(t)}{t^4}\,dt + \frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4}u_n(t)\,dt.$$

Or si l'on calcule $\varphi_n^{(4)}(t)$ on trouve

$$\varphi_n^{(4)}(t) = 8n^6 \cos 2nt - 4n^2(n^4+3n^3)\cos(2n+2)t - 4n^2(n^4-3n^3)\cos(2n-2)t + O(n^4).$$

D'où en groupant les termes :

$$\varphi_n^{(4)}(t) = 16n^6 \cos 2nt \sin^2 t + 24n^5 \sin 2t \sin 2nt + O(n^4).$$

Donc si $|t| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|\varphi_n^{(4)}(t)| = O(n^4)$. Comme le développement de Taylor de φ_n commence par un terme en t^4, on a pour $|t| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|\varphi_n(t)| = t^4 O(n^4)$ et par suite

$$\left| \frac{1}{2n\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t) \frac{\varphi_n(t)}{t^4}\, dt \right| = \frac{1}{2n\pi} O(n^4) \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi| \frac{t^4}{t^4}\, dt$$

et en raison de $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| = O(1)$, cette dernière quantité est $O(n)$. D'où lorsque $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$\sigma_n''(x) = O(n) + \frac{1}{2n\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4} u_n(t)\, dt$$

$$= O(n) + \frac{n}{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi(t) \frac{\cos 2nt}{t^2}\, dt - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi(t) \frac{\sin 2nt}{t^3}\, dt$$

$$+ \frac{3}{2n\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi(t) \frac{\sin 2nt}{t^4}\, dt.$$

Comme $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| = O(1)$,

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^3} \sin^2 nt\, dt \right| = O\left(\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \right) = O(n)$$

et

$$\left| \frac{3}{2n\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi(t) \frac{\sin^2 nt}{t^4}\, dt \right| = O\left(\frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} \right) = O(n).$$

Quant à $\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi(t) \frac{\cos 2nt}{t^2}\, dt$, nous avons précisément prouvé (Chap. II, § 1, 1°) que cette intégrale est bornée si $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|$ est borné. En définitive si $E_n = O\left(\frac{1}{t}\right)$, on a $|\sigma_n'| = O(n)$, bien qu'en général $|\sigma_n - f|$ ne soit pas $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ce dernier théorème permet de prouver le suivant.

THÉORÈME 21. — *α étant un nombre positif, si* $|S_n - f| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $|S_n' - f'| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ *aussi.*

Supposons tout d'abord $0<\alpha<1$. De (1) il résulte lorsque $|S_n-f|=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ que $|S'_n|=O(n^{1-\alpha})$; $\omega\left(\frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, donc

$$\int_0^{\frac{1}{n}}[f(x+2t)-f(x-2t)]\cot g t\,dt=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Donc d'après (17) : $|S''_n-f'|=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Si $\alpha=1$, l'hypothèse $|S_n-f|=O\left(\frac{1}{n}\right)$ entraine $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $E_n(f')=O\left(\frac{1}{n}\right)$ (Not. 3°) et par suite $|\sigma''_n|=O(n)$ (Th. 20). De plus $|S''_n|=O(n)$ et $|S'''_n|=O(n^2)$. De l'identité $\sigma''_n=S''_n-\frac{S'''_n}{n}$, on tire alors $|S''_n|=O(n)$ donc en vertu du théorème 18 : $|S''_n-f'|=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Supposons maintenant que f' et f'' existent, sont continues et $\in \mathrm{Lip}\,\alpha'$. En intégrant par parties $S_n-f=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi(t)}{\sin t}\sin(2n+1)t\,dt$ on obtient à $O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha'}}\right)$ près :

$$S_n-f=\frac{2}{(2n+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{\sin t}-\frac{\varphi(t)\cos t}{2\sin^2 t}\right)\cos(2n+1)t\,dt$$

$$=\frac{2}{2n+1}(f'-S'_n)+\frac{1}{(2n+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi(t)}{\sin^2 t}[\sin^2(n+1)t-\sin^2 nt]\,dt$$

$$=\frac{2}{2n+1}(f'-S'_n)-\frac{1}{2n+1}[(n+1)(\sigma_{n+1}-f)-n(\sigma_n-f)]$$

$$=\frac{2}{2n+1}(f'-S'_n)-\frac{1}{2n+1}(S_n-f)\quad(1).$$

D'où $S_n-f=\frac{1}{n+1}(f'-S'_n)$ et $S'_n-f'=\frac{1}{n+1}(S'_n-f')$.

Si alors $|S_n-f|=O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha'}}\right)(0<\alpha'\leq 1)$, f' et f'' existent sont continues (Notations 3°) et appartiennent à $\mathrm{Lip}\,\alpha'$. On a

$|S'''_n|=O(n^{2-\alpha'})$ donc $|S'_n-f'|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha'}}\right)$ et par suite $|S''_n-f''|=O\left(\frac{1}{n^{1-\alpha'}}\right)$.

De proche en proche en utilisant le théorème 18 on prouverait de même que si $|S_n-f|=O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha'}}\right)$ p entier >0, $0<\alpha'\leq 1$), $|S^{(p)}_n-f^{(p)}|=O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha'}}\right)$.

---

(1) La méthode utilisée pour démontrer le théorème 1 prouve que $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi(t)}{\sin^2 t}\cos 2nt\,dt=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ si $f'\in\mathrm{Lip}\,\alpha$.

3. *Dérivées d'ordre α non entier.* — Soit $f(x)$ une fonction continue satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha(0<\alpha<1)$ ayant pour période 1, pour valeur moyenne 0 sur une période. La primitive d'ordre $(1-\alpha)$ de $f(x)$ se définit par

$$f_{1-\alpha}(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} f(x-u)u^{-\alpha}\,du \quad [7],$$

et l'on appelle dérivée d'ordre α de $f(x)$ lorsqu'elle existe la dérivée première de $f_{1-\alpha}$. On écrit $f^{\alpha}(x)=\frac{d}{dx}f_{1-\alpha}$. On sait que si $f\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, alors f^{γ} existe pour tout γ tel que $0<\gamma<\alpha$ et $\in \mathrm{Lip}(\alpha-\gamma)$ mais f^{α} n'existe pas nécessairement. Le théorème suivant donne la condition pour que f^{α} existe et soit borné, plus précisément fournit la condition assurant que $f_{1-\alpha}\in \mathrm{Lip}\,1$.

Théorème. — *$f(x)$ satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha(0<\alpha<1)$, ayant pour période 1, pour valeur moyenne 0, pour que la primitive de f d'ordre $1-\alpha$ satisfasse uniformément à une condition de Lipschitz d'ordre 1, il faut et il suffit que*

$$\int_{t=\varepsilon}^{+\infty}\int_{u=0}^{+\infty}\frac{\tilde{f}(x+t-u)+\tilde{f}(x-t-u)-2\tilde{f}(x-u)}{u^2t^2}\,du\,dt$$

soit uniformément borné en ε et x, $\tilde{f}$ désignant la fonction conjuguée de f.

Ce théorème est une conséquence du théorème 3 qui résulte de la connaissance de la classe de saturation attachée au procédé de Fejèr. On a vu en effet que la condition nécessaire et suffisante pour que $f\in \mathrm{Lip}\,1$ est que $|\sigma_n-\tilde{f}|=O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou encore que

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\tilde{f}(x+t)+\tilde{f}(x-t)-2\tilde{f}(x)}{t^2}\,dt$$

soit uniformément borné en x et ε. La condition cherchée ici s'exprime donc par

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\tilde{f}_{1-\alpha}(x+t)+\tilde{f}_{1-\alpha}(x-t)-2\tilde{f}_{1-\alpha}(x)}{t^2}\,dt$$

borné uniformément en x et ε et d'après la définition de la primitive d'ordre $1-\alpha$ de f ou $\tilde{f}$ on obtient la condition énoncée.

4. *Majoration des coefficients de Fourier.* — On sait que si $E_n=O\left(\frac{1}{n^r}\right)(r>0)$, a_n et b_n sont $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$. Nous indiquons une majoration générale des coefficients de Fourier de $f(x)$ en fonction de E_n et qui contient les résultats connus.

Théorème. — *Les coefficients de Fourier a_n et b_n de $f(x)$ sont en valeur absolue*

moindres que $\lambda_p E_n + \mu_p \frac{\max |P_n^{(2p+2)}|}{n^{2p+2}}$, $\{P_n(x)\}$ *étant une suite de polynomes trigonométriques donnant de* $f(x)$ *une approximation de l'ordre de* E_n, λ_p *et* μ_p *dépendant de p seulement.*

Nous reprendrons les différences $\Delta_{2p}(t) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \Delta_2\left(\frac{t}{2^{k-1}}\right)$ (Chap. II, § 2) où les α_k sont des constantes absolues. Soit

$$U_{p,q}(x, \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q}\, dt,$$

où q est un entier $\geqq 2$ et soit

$$V_n(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} U_{p,q}(x, \varepsilon) \cos nx\, dx = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dt}{t^q} \int_0^{2\pi} \Delta_{2p}(f, x, t) \cos nx\, dx$$

$$= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dt}{t^q} \int_0^{2\pi} \left(\sum_k \alpha_k \Delta_2\left(\frac{t}{2^{k-1}}\right)\right) \cos nx\, dx.$$

On a

$$\int_0^{2\pi} \Delta_{2p}(t) \cos nx\, dx = \sum \alpha_k \int_0^{2\pi} f(u)\, \Delta_2\left(\cos nx, u, \frac{t}{2^k}\right) du$$

donc

$$\int_0^{2\pi} \Delta_{2p}(t) \cos nx\, dx = -4 a_n \sum \alpha_k \sin^2 \frac{nt}{2^{k-1}}.$$

Or

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{nt}{2^{k-1}}\, dt = \pi - \frac{2^{k-3}}{n} \sin \frac{n\pi}{2^{k-3}},$$

on obtient donc

$$\int_0^{2\pi} \sum \alpha_k \sin^2 \frac{nt}{2^{k-1}}\, dt = \pi \sum_{k=1}^{p} \alpha_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{p} \alpha_{k'} 2^{k-3} \sin \frac{n\pi}{2^{k-2}}.$$

Dès que n est assez grand, cette dernière quantité est voisine de $\pi \sum_{k=1}^{p} \alpha_k$ on a donc

$$|V_n(\varepsilon)| \geqq |a_n| \frac{\lambda_p}{(q-1)\varepsilon^{q-1}},$$

où λ_p dépend de p seul. D'où

$$|a_n| < \frac{q-1}{\lambda_p} \varepsilon^{q-1} \left| \int_0^{2\pi} U_{p,q}(x, \varepsilon) \cos nx\, dx \right|.$$

On prend q assez grand, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et l'on suppose f continue. Si dans cette dernière quantité on remplace f par un polynome P_n tel que $|P_n - f| < O(E_n)$,

en désignant par $U^n_{p,q}\left(x, \frac{1}{n}\right)$ ce qui devient $U_{p,q}\left(x, \frac{1}{n}\right)$; on commet une erreur inférieure à

$$O(E_n)\frac{q-1}{\lambda_p}\varepsilon^{q-1}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{dt}{t^q} = O(E_n).$$

On a donc

$$|a_n| < \lambda'_p(E_n)(q-1) + \frac{q-1}{\lambda_p}\frac{1}{n^{q-1}}\int_0^{2\pi} U^n_{p,q}\left(x, \frac{1}{n}\right)\cos nx\,dx.$$

D'ailleurs

$$\left|\int_0^{2\pi} U^n_{p,q}\left(x, \frac{1}{n}\right)\cos nx\,dx\right|$$
$$= \left|\int_0^{2\pi}\left[U^n_{p,q}\left(x+\frac{\pi}{n}, \frac{1}{n}\right) + U^n_{p,q}\left(x-\frac{\pi}{n}, \frac{1}{n}\right) - 2U^n_{p,q}\left(x, \frac{1}{n}\right)\right]\cos nx\,dx\right|$$
$$< O\left(\frac{1}{n^2}\right)\max_x\left|\frac{d^2}{dx^2}U^n_{p,q}\left(x, \frac{1}{n}\right)\right|.$$

Or

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(P_n, x, t)}{t^q}\,dt = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\frac{d^2}{dx^2}\Delta_{2p}(P_n, x, t)}{t^q}\,dt = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(P''_n, x, t)}{t^q}\,dt,$$

car $\Delta_{2p}(P_n, x, t)$ est une forme linéaire de $P_n\left(x+\frac{t}{2^k}\right) + P_n\left(x-\frac{t}{2^k}\right) - 2P_n(x)$. Comme $|\Delta_{2p}(P''_n, x, t)| < \mu_p t^{2p}\max_x|P_n^{(2p-2)}(x)|$, on a

$$\left|\int_0^{2\pi} U^n_{p,q}\left(x, \frac{1}{n}\right)\cos nx\,dx\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)\max_x\left|\frac{d^2}{dx^2}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta^n_{2p}(t)\,dt}{t^q}\right|$$
$$= O\left(\frac{1}{n^{2p-q+3}}\right)\max_x|P_n^{(2p+2)}|$$
$$(q \geqq 2p+2).$$

D'où

$$|a_n| < \lambda'_n(q-1)E_n + \frac{q-1}{\lambda_p}O\left(\frac{1}{n^{2p+2}}\right)\max|P_n^{(2p+2)}|.$$

Et en prenant $q = 2p+2$ on obtient l'inégalité énoncée. Le calcul est le même pour b_n et donne même majoration.

En tenant compte de la majoration de $|P_n^{(2p+2)}|$ on obtient pour a_n et b_n une majoration ne faisant intervenir que E_n.

5. *Condition pour que* $\lim_{n\infty} nE_n = +\infty$.

THÉORÈME. — *$f(x)$ étant une fonction continue de période 2π, nulle pour $x=0$, si au point $x=0$, $f(x)$ possède la dérivée droite $+\infty$ et la dérivée gauche $-\infty$ et si $\frac{f(x)}{x}$ est une fonction non croissante de x au voisinage de $x=0$, alors* $\lim_{n\infty} nE_n = +\infty$.

Les sommes trigonométriques d'ordre $3n$: $V_{3n} = \frac{3\sigma_{3n} - \sigma_n}{2}$ donnent de f une approximation comprise entre E_{3n} et $3E_n$. En tenant compte de ce que

$$\sin^2(n+p)t - \sin^2 nt = \sin pt \sin(2n+p)t,$$

on a

$$V_{3n} - f = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{+\infty} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]\frac{\sin 2nt \sin 4nt\, dt}{t^2}$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]\frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2}\, dt.$$

Au point $x = 0$ l'approximation fournie est

$$\rho_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty} [f(t) + f(-t)]\frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2}\, dt.$$

α étant un nombre positif quelconque fixe

$$\int_\alpha^{+\infty} [f(t) + f(-t)]\frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2}\, dt = O(1).$$

Nous écrirons

$$\int_0^{\alpha} f(t)\frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2n}} f(t)\frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2}\, dt - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \left[\frac{f(t)}{t^2} - \frac{f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)^2} + \frac{f\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} - \dots \right] |\sin nt \sin 2nt|\, dt.$$

Or $\frac{f(t)}{t}$ ne croit pas, donc $\frac{f(t)}{t^2}$ décroit et par suite

$$\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \frac{f(t)}{t^2} |\sin nt \sin 2nt|\, dt > \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \frac{f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)^2} |\sin nt \sin 2nt|\, dt, \quad \dots$$

De plus

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} f(t)\frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2}\, dt > \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \frac{f(t)}{t^2} |\sin nt \sin 2nt|\, dt.$$

Car au voisinage de 0, $\frac{f(t)}{t}$ est positif et la première formule de la moyenne donne pour la première intégrale

$$\frac{f(t_1)}{t_1}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin nt \sin 2nt}{t}\, dt \qquad \left(0 < t_1 < \frac{\pi}{2n}\right)$$

et pour la seconde

$$\frac{f(t_2)}{t^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}}\frac{|\sin nt\sin 2nt|}{t^2}\,dt \qquad \left(\frac{\pi}{2n}<t_2<\frac{3\pi}{2n}\right).$$

Comme $\frac{f(t_1)}{t_1}\geq\frac{f(t_2)}{t_2}$ il suffit pour prouver ce point de prouver que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin nt\sin 2nt}{t}\,dt>\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}}\frac{|\sin nt\sin 2nt|}{t}\,dt$$

ou encore que

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2n}}\frac{\sin nt\sin 2nt}{t}\,dt>0,$$

c'est-à-dire que

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin t\sin 2t}{t}\,dt>0.$$

Cette dernière intégrale s'écrit :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\left[\frac{\sin t}{t}-\frac{\cos t}{t+\frac{\pi}{2}}-\frac{\sin t}{t+\pi}\right]dt.$$

Entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ la quantité entre crochets est >0 parce que $\operatorname{tg}x>\frac{x(\pi+x)}{\pi\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$; la courbe représentative de $y=\operatorname{tg}x$ est située au-dessus de $y=x$ et part de 0, celle de $y=\frac{x(\pi+x)}{\pi\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$ part de 0 avec une tangente de pente $\frac{\pi}{2}<1$ et est située pour $0<x<\frac{\pi}{2}$ au-dessous de la droite $y=\frac{\pi}{2}x$.

Donc $\int_0^{\alpha}f(t)\frac{\sin nt\sin 2nt}{t^2}\,dt$ se présente sous la forme d'une somme de termes alternativement >0 et <0 et dont la valeur absolue décroît. Elle est donc supérieure à la somme des deux premiers termes, c'est-à-dire à

$$\frac{f(t_1)}{t_1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\sin 2t}{t}\,dt-\frac{f(t_2)}{t_2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{|\sin t\sin 2t|}{t}\,dt=\frac{f(t_1)}{t_1}a-\frac{f(t_2)}{t_2}b,$$

Comme $a>b$ et $\frac{f(t_1)}{t_1}\geq\frac{f(t_2)}{t_2}$,

$$a\frac{f(t_1)}{t_1}-b\frac{f(t_2)}{t_2}>(a-b)\frac{f(t_2)}{t_2}$$

et $o < t_2 < \frac{3\pi}{2n}$ tend vers o avec $\frac{1}{n}$. Il s'ensuit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} \sin nt \sin 2nt \to +\infty \quad \text{avec } n.$$

La même démonstration vaut pour

$$\int_0^{+\infty} f(-t) \frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2} dt,$$

ce qui prouve le théorème

6. *Théorèmes topologiques.* — Nous montrerons dans ce paragraphe que les propriétés différentielles de $f(x)$ sont liées aux propriétés sur des résiduels de la suite $\{P'_n\}$. Nous ne supposons plus ici que $f(x)$ est nécessairement périodique.

Soit $f(x)$ continue pour $a \leq x \leq b$, $\{P_n(x)\}$ une suite de polynomes convergeant uniformément vers $f(x)$, $P_n = \max_x |f - P_n|$, $m(x) = \underline{\lim}_{n\infty} P'_n(x)$, $M(x) = \overline{\lim}_{n\infty} P'_n(x)$ et $L(x)$ l'ensemble des valeurs d'accumulation de $P'_n(x)$ au point x.

x et x' étant deux valeurs de (a, b), $(x' > x)$, on a

$$\left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \frac{P_n(x') - P_n(x)}{x' - x} \right| < \frac{2\rho_n}{x' - x}.$$

Soit σ une longueur $< b - a$. Quel que soit x sur $(a, b - \sigma)$ il existe au moins un point ξ tel que

$$P'_n(\xi) = \frac{P_n(x + \sigma) - P_n(x)}{\sigma} \qquad (x < \xi < x + \sigma).$$

Quand x varie, le théorème sur les fonctions implicites prouve que les points ξ se répartissent sur des intervalles séparés par les segments enfermant les abscisses des points d'inflexion de la courbe $y = P_n(x)$. Soit alors $\{\sigma_n\}$ une suite de longueurs tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, telles que $\lim_{n\infty} \frac{\rho_n}{\sigma_n} = o$. A chaque valeur de n correspond un système d'intervalles l_n, lieu des points ξ_n tels que $P'_n(\xi) = \frac{P_n(x + \sigma_n) - (P_n(x)}{\sigma_n}$ quand x varie sur $(a', b') \subset (a, b)$. Comme σ_n tend vers zéro, quel que soit (α, β) sur (a, b), il contient pour n assez grand un point ξ_n au moins, donc tout ou partie d'un intervalle l_n. On peut donc à chaque l_n attacher un point a_n et les a_n sont partout denses sur (a, b). L'ensemble des points intérieurs à une infinité de l_n est non vide et est un résiduel. Donc

à tout point ξ d'un résiduel défini par les suites $\{P_n(x)\}$ et $\{\sigma_n\}$ on peut associer une suite de points $\{x_{n_p}\}$ telle que

$$\frac{P_{n_p}(x_{n_p}+\sigma_{n_p})-P_{n_p}(x_{n_p})}{\sigma_{n_p}}=P'_{n_p}(\xi).$$

On a alors

$$\left|\frac{f(x_{n_p}+\sigma_{n_p})-f(x_{n_p})}{\sigma_{n_p}}-P'_{n_p}(\xi)\right|<\frac{2\rho_{n_p}}{\sigma_{n_p}}, \tag{18}$$

où le second membre tend vers zéro pour $p\infty$.

Supposons alors que $f'(x)$ existe et soit finie en tout point de (a, b). $f(x)$ étant une fonction de première classe, est continue relativement à (a, b) sur un résiduel de (a, b). Et deux résiduels de (a, b) ayant en commun un résiduel R, on en conclut que sur R, (18) reste valable, $\frac{f(x_{n_p}+\sigma_{n_p})-f(x_{n_p})}{\sigma_{n_p}}$ ayant une limite qui est $f'(\xi)$. Si enfin on remarque que l'ensemble $L_{\{n\}}(x)$ relatif à la suite $\{P_n\}$ contient $L_{\{n_p\}}(x)$ relatif à la suite $\{P_{n_p}\}$, on pourra énoncer :

Théorème. — *Si $f(x)$ possède en tout point de (a, b) une dérivée finie, quelle que soit la suite $\{P_n(x)\}$ convergeant uniformément vers $f(x)$ sur (a, b), l'ensemble $L(x)$ des valeurs d'accumulation de $P'_n(x)$ contient la valeur $f'(x)$ en tout point d'un résiduel qui dépend de f et de $\{P_n\}$.*

Si l'on suppose qu'il existe un résiduel R′ tel que quelle que soit la suite infinie extraite de $\{P'_n\}$, cette suite diverge sur R′. Soit $R''=R\cap R'$ le résiduel commun à R et R′. En tout point ξ de R″, (18) reste valable. Donc $f(x)$ ne possèdent pas de dérivée sur R″. D'où :

Théorème. — *S'il existe un résiduel et une suite de polynomes $\{P_n\}$ convergeant uniformément vers $f(x)$, telle que toute suite tirée de $\{P'_n\}$ diverge sur ce résidue. alors sur un résiduel $f(x)$ n'a pas de dérivée.*

Supposons enfin qu'en tout point d'un résiduel R, une suite $\{P'_n\}$ ait une limite finie $\varphi(x)$. Si f' existe en tout point de (a, b), sur le résiduel $R\cap R_{\{n\}}$, $f'=\varphi$. Donc :

Théorème. — *$\{P_n(x)\}$ convergeant uniformément vers $f(x)$, si $f(x)$ possède sur (a, b) une dérivée finie $f'(x)$ et si sur un ensemble contenant un résiduel, $P'_n(x)$ à une limite finie, alors sur un résiduel :* $\lim_{n\infty} P'_n(x)=f'(x)$.

Dans un autre travail nous généralisons le théorème 7 [cas où $E_n=O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$], les théorèmes 3, 12, 13, celui du Chapitre II, paragraphe 5 et complétons

les résultats obtenus à partir de l'égalité (17), en prouvant en particulier que si l'on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\operatorname{cotg} t\, dt,$$

on a

$$\frac{2S'_n(x)}{2n+1} = S_n\left(x + \frac{\pi}{2n+1}\right) - f(x) + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] = S_n(x) - f_n(x) + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Alexits, *Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de Fourier* (*Matematikai és Fizikai Lapok*, t. 48, 1941, p. 410-433).

[2] Favard, *Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. LXI, 1937).

[3] Nikolsky, *Approximation de fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques* (*Thèse*, Institut Stekloff, Moscou, 1945).

[4] Nörlund; *Vorlesungen über Differenzenrechnungen* (*Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, XIII, Springer, Berlin, 1924).

[5] Polya et Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II* (*Grundlehren*, XX, Springer, Berlin, 1925).

[6] de la Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation d'une variable réelle* (Gauthier-Villars, Paris, 1919).

[7] Zygmund, *Trigonometrical series* (*Monographie mathématique*, Varsovie, 1935).

[8] Zygmund, *Smooth functions* (*Duke mathematical Journal*, 1945).

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LE PROBLÈME D'OSSIAN BONNET ET LA THÉORIE DE L'IMMERSION D'UN ds^2

PAR M. VICTOR LALAN.

INTRODUCTION.

On sait que le problème d'Ossian Bonnet consiste dans la recherche des surfaces qu'on peut déformer sans altérer leurs courbures principales (1). Ce problème ne prend toute sa signification que si on le situe dans son cadre naturel, qui est la théorie de l'immersion d'un ds^2 à deux variables dans l'espace à trois dimensions.

La détermination de la seconde forme fondamentale d'une surface dont on connaît le ds^2 est, initialement, un problème comportant trois inconnues, les trois coefficients de la seconde forme. Ces inconnues doivent vérifier trois équations, celle de Gauss et celles de Codazzi, mais la première de ces équations,

(1) La bibliographie de la question est donnée par M. Élie Cartan, dans son Mémoire *Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales* (*Bull. des Sc. Math.*, 66, 1942, p. 55-85).

étant finie relativement aux inconnues, permet d'en diminuer le nombre d'une unité, et les deux inconnues restantes sont simplement assujetties à vérifier les équations de Codazzi, qui deviennent deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires par rapport aux dérivées partielles de chacune d'elles. Si l'on résout ces deux équations par rapport aux dérivées de l'une des inconnues en fonction des dérivées de l'autre, que l'on privilégie ainsi arbitrairement, puis que l'on forme la condition d'intégrabilité, cette condition ne sera pas identiquement satisfaite, du moins en général; elle fournira pour l'inconnue secondaire une équation finie, qui permettra de la calculer en fonction de l'inconnue principale et de ses dérivées premières et secondes, si bien que le problème ne comportera plus qu'une seule inconnue, et que les équations de Codazzi deviendront deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre pour l'inconnue privilégiée.

La théorie de l'immersion étant envisagée de cette manière, on conçoit que certaines surfaces exigeront un traitement exceptionnel : ce sont celles pour lesquelles la condition d'intégrabilité rencontrée se trouvera identiquement satisfaite; l'inconnue secondaire ne pourra pas s'exprimer par des calculs finis en fonction de l'inconnue principale. Si l'on suppose celle-ci provisoirement donnée, l'inconnue secondaire ne s'obtiendra qu'en intégrant une équation aux différentielles totales complètement intégrable, et contiendra par conséquent un paramètre arbitraire dans son expression. Cette particularité se présente justement pour les surfaces d'O. Bonnet; ce sont les surfaces qui apparaissent comme exceptionnelles, lorsque l'inconnue secondaire est l'angle sous lequel les premières lignes de courbure coupent une famille de courbes choisies arbitrairement comme repère sur la surface. Supposons qu'on se donne, pour une telle surface, la courbure moyenne, qui joue le rôle d'inconnue privilégiée; cette hypothèse revient à se donner les courbures principales, puisque la courbure totale est connue d'après le ds^2. Les directions principales ne s'obtiendront pas par des calculs finis à partir de cette donnée; leur détermination exige l'intégration d'une équation aux différentielles totales complètement intégrable, et la présence d'un paramètre arbitraire dans leur expression traduira la déformabilité de la surface avec permanence des courbures principales.

Il apparaît, d'après cet exposé, qu'en modifiant le choix de l'inconnue que nous qualifions de privilégiée, d'autres surfaces exceptionnelles se manifesteront. Si, par exemple, on privilégie l'angle qui fixe les directions principales, on trouvera, comme surfaces exceptionnelles, les surfaces susceptibles d'être déformées avec permanence des lignes de courbure, c'est-à-dire les surfaces-moulure cylindriques.

Notre travail est divisé en deux parties. Dans la première, nous étudions la formule qui permet de calculer, par des opérations finies, les directions principales d'une surface générique dont on connaît le ds^2 et la courbure moyenne.

Cette formule, ainsi que l'expression du tenseur asymptotique qu'on en déduit, se trouve en substance dans les Mémoires de M. H. W. Alexander (1) et de M. T. Y. Thomas (2), mais nous avons élucidé, d'une manière que nous croyons nouvelle, la nature tensorielle des différents coefficients qui se présentent au cours du calcul.

La seconde partie est consacrée à l'étude des surfaces exceptionnelles, qui sont les surfaces d'O. Bonnet. Je tire surtout parti du fait que, à part les surfaces à courbure moyenne constante, ce sont des surfaces à courbure moyenne isotherme. Mes recherches antérieures sur cette catégorie remarquable de surfaces trouvent ici leur application. Sur toute surface de cette nature, on peut définir une certaine fonction, que j'appelle la *fonction primitive* de la surface. fonction dont le gradient a une direction symétrique de celui de la courbure moyenne par rapport à la première direction principale. L'existence de cette fonction se manifeste principalement quand on étudie les lignes minima de la surface, ainsi que je l'ai signalé dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (223, 1946, p. 883) et dans un Mémoire inséré au *Bulletin de la Société Mathématique* (75, 1947, p. 81). Ce qui caractérise les surfaces d'O. Bonnet, celles du moins qui ne sont pas à courbure moyenne constante, c'est que leur fonction primitive a ses deux paramètres différentiels de Beltrami proportionnels. J'indique la forme générale que revêt le ds^2 d'une surface d'O. Bonnet, m'attachant surtout aux surfaces de troisième classe, qui sont des surfaces W. Ce ds^2 serait complètement déterminé, si l'on savait intégrer l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre, dont l'inconnue est la courbure moyenne, et qui exprime le théorème de Gauss. A un ds^2 de cette sorte, on peut associer une infinité de formes asymptotiques, qui donnent toutes à la surface les mêmes courbures principales, mais des lignes de courbure différentes. Je retrouve aisément, par cette méthode, les beaux résultats que M. É. Cartan a fait connaître, dans le Mémoire cité, sur les lignes de courbure virtuelles d'un ds^2 de Bonnet. Enfin, revenant au problème de l'immersion, je montre que, en dépit des apparences, à la donnée d'un tel ds^2, ne correspondent qu'un très petit nombre de surfaces non superposables, constituant une *famille* au sens de M. Cartan.

La lecture de ce Mémoire suppose connu l'essentiel de la théorie du trièdre mobile telle qu'elle est exposée par M. É. Cartan, par exemple, au début du Chapitre VII de son ouvrage *Sur les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques* (Paris, Hermann, 1945).

---

(1) *The role of the mean curvature in the immersion theory of surfaces* (*Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 47, 1940, p. 230-253).

(2) *Algebraic determination of the second fundamental form of a surface by its mean curvature* (*Bull. of the Amer. Math. Soc.*, 51, 1945, p. 390-399).

I. — Détermination des directions principales d'une surface en fonction du tenseur métrique et de la courbure moyenne.

1. Nous écrivons les deux formes fondamentales de la surface

$$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2, \qquad \Phi=a(\omega^1)^2+2b\omega^1\omega^2+c(\omega^2)^2$$

et nous appelons $\frac{\theta}{2}$ l'angle sous lequel les premières lignes de courbure coupent les lignes (C_1), tangentes à e_1. H désignant la courbure moyenne et A la demi-différence des courbures principales, nous avons

$$a=H+A\cos\theta, \qquad b=A\sin\theta, \qquad c=H-A\cos\theta. \tag{1.1}$$

On suppose le ds^2 connu; ω^1 et ω^2 le sont aussi, dès lors qu'on a choisi la famille de courbes (C_1). On se propose de déterminer a, b, c, ou encore, H, A et θ. Mais le théorème de Gauss nous dit que la courbure totale K, qui vaut H^2-A^2, est déterminée par le seul ds^2; donc A peut s'évaluer en fonction de H, et il ne reste, en somme, que deux inconnues, H et θ.

Les équations de Codazzi, qui s'obtiennent en différentiant extérieurement $\omega_1^3=a\omega^1+b\omega^2$, $\omega_2^3=b\omega^1+c\omega^2$, s'écrivent, si l'on définit r et s par $d\omega^1=r[\omega^1\omega^2]$, $d\omega^2=s[\omega^2\omega^1]$,

$$a_2+2bs=b_1+(a-c)r, \qquad b_2-(a-c)s=c_1+2br. \tag{1.2}$$

Remplaçant a, b, c par leurs expressions (1.1), et résolvant par rapport aux dérivées pfaffiennes de θ, il vient

$$\begin{cases} \theta_1=\frac{1}{A}\left(-H_1\sin\theta+H_2\cos\theta\right)+\frac{A_2}{A}-2r, \\ \theta_2=\frac{1}{A}\left(H_1\cos\theta+H_2\sin\theta\right)-\frac{A_1}{A}+2s. \end{cases} \tag{1.3}$$

La condition d'intégrabilité $\theta_{12}-\theta_{21}+s\theta_2-r\theta_1=0$ s'écrit, en tenant compte de $K=s_1+r_2-r^2-s^2$,

$$X\cos\theta+Y\sin\theta=Z \tag{1.4}$$

avec

$$\begin{cases} X=\left(\frac{H_1}{A}\right)_1-\left(\frac{H_2}{A}\right)_2+\frac{A_2H_2-A_1H_1}{A^2}+\frac{sH_1-rH_2}{A}, \\ Y=\left(\frac{H_1}{A}\right)_2+\left(\frac{H_2}{A}\right)_1-\frac{A_2H_1+A_1H_2}{A^2}+\frac{rH_1+sH_2}{A}, \\ Z=-\frac{H_1^2+H_2^2}{A^2}+\left(\frac{A_1}{A}\right)_1+\left(\frac{A_2}{A}\right)_2-\frac{rA_2+sA_1}{A}-2K. \end{cases} \tag{1.5}$$

2. La formule (1.4) devient plus expressive, si l'on fait usage de la dérivation pfaffienne covariante.

Soit **V** un vecteur tangent, de composantes $V_i = \mathbf{V}.\mathbf{e}_i$, et soit $dV_i = V_{ij}\omega^j$. Les dérivées pfaffiennes secondes, V_{ij}, ne sont pas les composantes d'un tenseur, mais on obtient un tenseur en considérant les $V_{i.j}$ définis par

$$d\mathbf{V}.\mathbf{e}_i = V_{i.j}\,\omega^j. \tag{2.1}$$

Il est évident, en effet, que $\sum_{i,j} V_{i.j}\omega^j \mathbf{e}_i$ a une signification absolue, puisque c'est la composante tangentielle de $d\mathbf{V}$. Les $V_{i.j}$ sont les dérivées pfaffiennes *covariantes* du second ordre. Si l'on pose $\omega_i^k = \rho_{ij}^k \omega^j$, la relation entre V_{ij} et $V_{i.j}$ est

$$V_{i.j} = V_{ij} - \rho_{ij}^k V_k. \tag{2.2}$$

Les rotations ρ_{ij}^k jouent ici le même rôle que les γ_{ij}^k dans le calcul tensoriel, mais elles ne sont pas symétriques par rapport aux indices inférieurs, du fait que ω^1 et ω^2 ne sont pas des différentielles exactes; en revanche, elles sont antisymétriques par rapport aux deux premiers indices. Les seules rotations non nulles sont

$$\rho_{11}^2 = -\rho_{21}^1 = r, \qquad \rho_{12}^2 = -\rho_{22}^1 = -s. \tag{2.3}$$

La formule (2.2) se détaille donc comme suit

$$\begin{cases} V_{1.1} = V_{11} - rV_2, & V_{1.2} = V_{12} + sV_2, \\ V_{2.1} = V_{21} + rV_1, & V_{2.2} = V_{22} - sV_1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Si **V** était le gradient d'une fonction de point A, on aurait

$$V_1 = A_1 = A_{.1}, \qquad V_2 = A_2 = A_{.2}$$

(au premier ordre, il n'y a pas de différence entre la dérivée pfaffienne covariante et la dérivée pfaffienne ordinaire). Nous écrirons, dans ce cas

$$V_{i.j} = A_{.ij},$$

la présence d'une seule virgule indiquant suffisamment qu'il s'agit de dérivations covariantes. On vérifie que $A_{.ij} = A_{.ji}$.

3. Revenant aux expressions (1.5), nous introduirons le tenseur symétrique $l_{\alpha\beta}$, que nous appellerons le *tenseur moyen*,

$$l_{\alpha\beta} = H_{.\alpha\beta} - \frac{H_\alpha A_\beta + A_\alpha H_\beta}{A}. \tag{3.1}$$

Puisque $A^2 = H^2 - K$, on peut former ce tenseur dès qu'on connaît le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$, d'où K, et la courbure moyenne H. Il s'écrit aussi, en remplaçant A par sa valeur,

$$l_{\alpha\beta} = H_{.\alpha\beta} - \frac{2HH_\alpha H_\beta}{A^2} + \frac{K_\alpha H_\beta + H_\alpha K_\beta}{2A^2}.$$

Nous constatons, dès lors, que

$$(3.2) \qquad X = \frac{l_{11} - l_{22}}{A}, \qquad Y = \frac{2 l_{12}}{A},$$

l_{ij} désignant les composantes du tenseur moyen sur le repère rectangulaire $\mathbf{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Comme, par ailleurs, on a, pour toute fonction F,

$$\Delta_1 F = (F_1)^2 + (F_2)^2, \qquad \Delta_2 F = F_{11} + F_{22} - r F_2 - s F_1 = F_{.11} + F_{.22},$$

la relation (1.4) s'écrira, en multipliant tous les termes par $\frac{A}{2}$.

$$(3.3) \qquad \frac{l_{11} - l_{22}}{2} \cos\theta + l_{12} \sin\theta = \frac{A}{2} \Delta_2 \log A - \frac{\Delta_1 H}{2A} - AK,$$

formule que nous simplifierons légèrement, grâce à la notion de *tenseur-bissecteur*, dont nous empruntons la définition à M. H. W. Alexander.

Soit $T_{\alpha\beta}$ un tenseur symétrique; $T^*_{\alpha\beta}$ sera son tenseur-bissecteur si la forme quadratique $T^*_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta$ est la jacobienne, divisée par $4\sqrt{g}$ (g étant le discriminant du ds^2), de $T_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta$ et de $g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta$. Les directions nulles de $T^*_{\alpha\beta}$ sont donc les bissectrices de celles de $T_{\alpha\beta}$. Quand on utilise, comme nous le faisons présentement, un repère rectangulaire, on a simplement

$$(3.4) \qquad T^*_{11} = -T_{12}, \qquad T^*_{12} = \frac{T_{11} - T_{22}}{2}, \qquad T^*_{22} = T_{12}.$$

La formule (3.3) devient donc

$$(3.5) \qquad l^*_{12} \cos\theta + l_{12} \sin\theta = \frac{A}{2} \Delta_2 \log A - \frac{\Delta_1 H}{2A} - AK.$$

Comme le second membre est invariant, il doit en être de même du premier; c'est ce que l'on vérifie aisément. Faisons, en effet, tourner le repère rectangulaire d'un angle α

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 \cos\alpha + \mathbf{e}_2 \sin\alpha, \qquad \bar{\mathbf{e}}_2 = -\mathbf{e}_1 \sin\alpha + \mathbf{e}_2 \cos\alpha.$$

Nous aurons, pour un tenseur symétrique quelconque $T_{\alpha\beta}$, les nouvelles composantes médianes

$$\bar{T}_{12} = T_{12} \cos 2\alpha - T^*_{12} \sin 2\alpha, \qquad \bar{T}^*_{12} = T_{12} \sin 2\alpha + T^*_{12} \cos 2\alpha,$$

et, puisque $\bar{\theta} = \theta - 2\alpha$, on constate bien que

$$\bar{T}^*_{12} \cos\bar{\theta} + \bar{T}_{12} \sin\bar{\theta} = T^*_{12} \cos\theta + T_{12} \sin\theta.$$

L'expression figurant à gauche dans (3.5) est donc invariante vis-à-vis des changements de repères rectangulaires. On peut d'ailleurs l'écrire sous une forme tensorielle qui sera invariante vis-à-vis de tout changement de repérage.

Considérons dans ce but le tenseur métrique, $\gamma_{\alpha\beta}$, de la première direction principale, qui fait l'angle $\frac{\theta}{2}$ avec $\mathbf{e}_1$. Puisque le vecteur unité de cette direction a pour composantes $\cos\frac{\theta}{2}$ et $\sin\frac{\theta}{2}$ par rapport à $\mathrm{M}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, le tenseur métrique $\gamma_{\alpha\beta}$ aura de son côté pour composantes

$$\gamma_{11}=\cos^2\frac{\theta}{2},\qquad \gamma_{12}=\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},\qquad \gamma_{22}=\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{3.6}$$

Ses tenseurs-bissecteurs premier et second, $\gamma^{*}_{\alpha\beta}$ et $\gamma^{**}_{\alpha\beta}$, seront respectivement

$$\left\{\begin{array}{lll}\gamma^{*}_{11}=-\dfrac{\sin\theta}{2}, & \gamma^{*}_{12}=\dfrac{\cos\theta}{2}, & \gamma^{*}_{22}=\dfrac{\sin\theta}{2},\\ \gamma^{**}_{11}=-\dfrac{\cos\theta}{2}, & \gamma^{**}_{12}=-\dfrac{\sin\theta}{2}, & \gamma^{**}_{22}=\dfrac{\cos\theta}{2}.\end{array}\right. \tag{3.7}$$

D'après cela, on peut écrire $\mathrm{T}^{*}_{12}\cos\theta+\mathrm{T}_{12}\sin\theta$ sous la forme

$$-\mathrm{T}_{11}\gamma^{**}_{11}-2\,\mathrm{T}_{12}\gamma^{**}_{12}-\mathrm{T}_{22}\gamma^{**}_{22}.$$

Le repère étant rectangulaire, les composantes contrevariantes ont la même valeur que les composantes covariantes, et l'on arrive finalement à l'égalité

$$\mathrm{T}^{*}_{12}\cos\theta+\mathrm{T}_{12}\sin\theta=-\mathrm{T}^{\alpha\beta}\gamma^{**}_{\alpha\beta},\qquad (\mathrm{T}^{\alpha\beta}=g^{\alpha\sigma}g^{\beta\sigma}\mathrm{T}_{\sigma\sigma}) \tag{3.8}$$

où le second membre est manifestement invariant vis-à-vis de tout changement de repérage. Il s'écrit encore $\mathrm{T}^{*\alpha\beta}\gamma^{*}_{\alpha\beta}$.

4. Ce qui précède permet de rattacher au tenseur moyen le terme qui figure à droite, dans (3.5). En effet, prenons comme repère rectangulaire le trièdre de Darboux, ou repère principal. θ sera alors égal à zéro: le premier membre se réduira à l^{*}_{12}, que nous écrirons L^{*}_{12}, en convenant de désigner par L_{ij} les composantes du tenseur moyen sur le repère principal. Ainsi, la relation (1.4), ou (3.5), devient

$$l^{*}_{12}\cos\theta-l_{12}\sin\theta=\mathrm{L}^{*}_{12}. \tag{4.1}$$

et l'on a, en fonction du tenseur moyen,

$$\mathrm{X}=\frac{2}{\mathrm{A}}l^{*}_{12},\qquad \mathrm{Y}=\frac{2}{\mathrm{A}}l_{12},\qquad \mathrm{Z}=\frac{2}{\mathrm{A}}\mathrm{L}^{*}_{12}. \tag{4.2}$$

Il résulte de ce calcul que

$$\mathrm{L}^{*}_{12}=\frac{\mathrm{A}}{2}\Delta_2\log\mathrm{A}-\frac{\Delta_1\mathrm{H}}{2\mathrm{A}}-\mathrm{AK}. \tag{4.3}$$

Cette formule exprime une propriété remarquable du tenseur moyen. Il semblerait, à première vue, que les composantes de ce tenseur sur le repère principal ne peuvent être connues que si l'on connaît le repère principal; c'est le con-

traire qui se présente. La formule (4.3) montre que la différence $L_{11} - L_{22}$ se calcule sans qu'il soit besoin de connaître les directions principales. Il s'ensuit que les composantes L_{11}, L_{22} sont calculables séparément, car la somme $L_{11} + L_{22}$ est égale à l'invariant $g^{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}$. La composante L_{12} se calcule, d'autre part, au signe près, car $L_{11} L_{22} - L_{12}^2$ est égal à l'invariant $\frac{|l_{\alpha\beta}|}{|g_{\alpha\beta}|}$ et, de cette égalité, on déduit L_{12}^2. A cause de l'importance de (4,3), il ne sera pas superflu de la vérifier directement.

La définition (3.1) de $l_{\alpha\beta}$ permet d'écrire

$$\frac{2}{A} l_{\alpha\beta} = \left(\frac{H_\alpha}{A}\right)_{,\beta} + \left(\frac{H_\beta}{A}\right)_{,\alpha} - \frac{H_\alpha A_\beta + A_\alpha H_\beta}{A}.$$

On aura donc, en se référant au repère principal,

$$\frac{2}{A} L_{12}^* - \Delta_2 \log A + \frac{\Delta_1 H}{A^2} = \left(\frac{H_1 - A_1}{A}\right)_{,1} - \left(\frac{H_2 + A_2}{A}\right)_{,2} + \frac{1}{A^2}[H_1(H_1 - A_1) + H_2(H_2 + A_2)],$$

les indices indiquant ici des dérivées pfaffiennes principales. Appelons a et c les courbures principales :

$$H + A = a, \qquad H - A = c.$$

L'expression de droite ci-dessus devient

$$\frac{c_{,11} - a_{,22}}{A} + \frac{(a_2)^2 + (c_1)^2}{A^2},$$

ce qui est bien égal à $-2K$, comme on s'en assure en se reportant aux équations de Codazzi, qui, par rapport au repère principal, sont $a_2 = r(a - c)$, $c_1 = s(c - a)$.

Au lieu d'un repère rectangulaire quelconque, adoptons le repère moyen, celui pour lequel $\mathbf{e}_1$ a la direction du gradient de H. Alors, H_2 est nul, et, de $dH = H_1 \omega^1$, on déduit par différentiation extérieure, $H_{12} = r H_1$. Le système (1.3) se réduit à

$$(4.4) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = -\frac{H_1}{A} \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{A_2}{A} - 2r \\ \varphi_2 = \frac{H_1}{A} \cos\frac{\varphi}{2} - \frac{A_1}{A} + 2s, \end{cases}$$

où $\frac{\varphi}{2}$ représente l'angle de la première direction principale avec grad H, et où les indices désignent des dérivées pfaffiennes moyennes. Nous appellerons λ_{ij} les composantes du tenseur moyen sur le repère moyen. La formule (4.1) devient

$$(4.5) \qquad \lambda_{12}^* \cos\frac{\varphi}{2} + \lambda_{12} \sin\frac{\varphi}{2} = L_{12}^*.$$

Les composantes moyennes λ_{12}, λ_{12}^* sont des invariants faciles à calculer.

λ_{12} est $H_{12} - \frac{H_1 A_2}{A}$, ou $H_1\left(\log\frac{H_1}{A}\right)_2$. Comme $H_2 = 0$, $\Delta_1 H = H_1^2$; on peut donc écrire

$$2\lambda_{12} = \Theta\left(H, \log\frac{\Delta_1 H}{A^2}\right) \qquad [\Theta(F, G) = F_1 G_2 - G_1 F_2]. \tag{4.6}$$

Quant à λ_{12}^*, ou $\frac{\lambda_{11} - \lambda_{22}}{2}$, c'est $\frac{H_{11} - H_{22}}{2} - \frac{H_1 A_1}{A}$, ou

$$-\frac{\Delta_2 H}{2} + H_{11} - \frac{H_1 A_1}{A},$$

car $H_{11} = H_{11}$. On peut encore l'écrire $-\frac{\Delta_2 H}{2} + H_1\left(\log\frac{H_1}{A}\right)_1$, d'où, enfin,

$$2\lambda_{12}^* = -\Delta_2 H + \Delta_1\left(H, \log\frac{\Delta_1 H}{A^2}\right), \qquad [\Delta_1(F, G) = F_1 G_1 + F_2 G_2]. \tag{4.7}$$

5. La formule (4.1) définit θ en fonction de H. Pour effectuer commodément la résolution, considérons l'expression

$$-l_{12}^* \sin\theta + l_{12}\cos\theta.$$

On démontre facilement, en opérant comme au n° 3, que, pour tout tenseur symétrique, c'est une expression invariante vis-à-vis de tout changement de repère rectangulaire. On peut du reste l'écrire, d'après (3.7), $l^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}^*$, ce qui en manifeste le caractère invariant. Il vient donc, en faisant $\theta = 0$,

$$-l_{12}^* \sin\theta + l_{12}\cos\theta = L_{12}. \tag{5.1}$$

De (4.1) et (5.1), on déduit

$$(l_{12}^*)^2 + (l_{12})^2 = (L_{12}^*)^2 + (L_{12})^2, \tag{5.2}$$

ce qui montre que, comme nous le savions déjà, L_{12} est calculable, au signe près, sans qu'il soit besoin de connaître les directions principales. Les équations (4.1) et (5.1), linéaires en $\cos\theta$ et $\sin\theta$, se résolvent par

$$\cos\theta = \frac{l_{12}^* L_{12}^* + l_{12} L_{12}}{(l_{12})^2 + (l_{12}^*)^2}, \qquad \sin\theta = \frac{l_{12} L_{12}^* - l_{12}^* L_{12}}{(l_{12})^2 + (l_{12}^*)^2}. \tag{5.3}$$

Ainsi se trouve exprimé θ en fonction de H, par l'intermédiaire du tenseur moyen, avec une ambiguïté qui tient au double signe affectant L_{12}.

Le dénominateur commun aux deux formules (5.3) peut revêtir une autre forme. A propos du tenseur symétrique quelconque $T_{\alpha\beta}$, définissons les deux invariants $\mathcal{K}_T$ et $\mathcal{K}_T$, construits sur le même mode que la courbure moyenne et la courbure totale,

$$\mathcal{K}_T = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}, \qquad \mathcal{K}_T = \frac{|T_{\alpha\beta}|}{g_{\alpha\beta}}. \tag{5.4}$$

Cette définition posée, les dénominateurs de (5.3) s'écriront

$$(5.5) \qquad (l_{12})^2+(l^*_{12})^2=l^2_{12}-l_{11}l_{22}+\left(\frac{l_{11}+l_{22}}{2}\right)^2=-\mathcal{K}_l+2\mathcal{H}_l^2.$$

On peut encore simplifier ce résultat. On vérifie, en se référant à n'importe quel repère rectangulaire que, pour tout tenseur symétrique $T_{\alpha\beta}$, on a

$$(5.6) \qquad |T^*_{\alpha\beta}|=|T_{\alpha\beta}|-2\mathcal{H}_T^2|g_{\alpha\beta}|,$$

d'où, en divisant par $|g_{\alpha\beta}|$,

$$(5.7) \qquad \mathcal{K}_{T^*}=\mathcal{K}_T-2\mathcal{H}_T^2.$$

La formule (5.5) devient donc

$$(5.8) \qquad (l_{12})^2+(l^*_{12})^2=-\mathcal{K}_{l^*}.$$

Nous connaissons l'expression de la composante L^*_{12} qui figure aux numérateurs de (5.3); elle est donnée en (4.3). On peut rattacher cette expression au *tenseur asphérique*, que nous définissons par

$$(5.9) \qquad \rho_{\alpha\beta}=A_{,\alpha\beta}-\frac{A_\alpha A_\beta+H_\alpha H_\beta}{A},$$

qui est calculable dans les mêmes conditions que le tenseur moyen (3.1). On peut encore l'écrire

$$\rho_{\alpha\beta}=A(\log A)_{,\alpha\beta}-\frac{H_\alpha H_\beta}{A},$$

d'où, par application de (5.4),

$$2\mathcal{H}_\rho=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}A(\log A)_{,\alpha\beta}-\frac{1}{2A}g^{\alpha\beta}H_\alpha H_\beta=\frac{A}{2}\Delta_2\log A-\frac{\Delta_1 H}{2A},$$

et la formule (4.3) devient

$$(5.10) \qquad L^*_{12}=2\mathcal{H}_\rho-AK.$$

6. Bien que notre dessein ne soit point de développer la théorie de l'immersion, nous donnerons, en terminant cette partie, la formule qui découle des calculs précédents.

Il suffit de substituer dans (1.1) les valeurs (5.3) de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ pour obtenir les coefficients de la forme asymptotique en termes de courbure moyenne. Posant $a=\Phi_{11}$, $b=\Phi_{12}$, $c=\Phi_{22}$, et utilisant les formules (3.7), on vérifie que le tenseur asymptotique $\Phi_{\alpha\beta}$ s'écrit

$$(6.1) \qquad \Phi_{\alpha\beta}=Hg_{\alpha\beta}-2A\gamma^*_{\alpha\beta}.$$

Or, les formules (5.3) équivalent à

$$(6.2) \qquad 2\gamma^*_{\alpha\beta}=\frac{L^*_{12}l^*_{\alpha\beta}+L_{12}l^*_{\alpha\beta}}{(l_{12})^2+(l^*_{12})^2},$$

car, en se référant à un repère rectangulaire, on a

$$l_{11}^{**}=-l_{12}^{*}=-\frac{l_{11}-l_{22}}{2},\qquad l_{12}^{**}=\frac{l_{11}^{*}-l_{22}^{*}}{2}=-l_{12},\qquad l_{22}^{**}=\frac{l_{11}-l_{22}}{2}.$$

Donc, compte tenu de (5.8),

$$\Phi_{\alpha\beta}=\mathrm{H}g_{\alpha\beta}+\frac{\mathrm{AL}_{12}^{*}}{\mathcal{K}_{l^*}}l_{\alpha\beta}^{**}+\frac{\mathrm{AL}_{12}}{\mathcal{K}_{l^*}}l_{\alpha\beta}^{*}, \tag{6.3}$$

ce qui s'écrit aussi, en observant que, pour tout tenseur symétrique,

$$\mathrm{T}_{\alpha\beta}^{**}=-\mathrm{T}_{\alpha\beta}+\mathcal{K}_{\mathrm{T}}g_{\alpha\beta}, \tag{6.4}$$

$$\Phi_{\alpha\beta}=\left(\mathrm{H}+\frac{\mathrm{A}\mathcal{K}_{l}\mathrm{L}_{12}^{*}}{\mathcal{K}_{l^*}}\right)g_{\alpha\beta}-\frac{\mathrm{AL}_{12}^{*}}{\mathcal{K}_{l^*}}l_{\alpha\beta}+\frac{\mathrm{AL}_{12}}{\mathcal{K}_{l^*}}l_{\alpha\beta}^{*}. \tag{6.5}$$

Le tenseur asymptotique se trouve de la sorte exprimé comme une combinaison linéaire du tenseur métrique, du tenseur moyen et du bissecteur du tenseur moyen, avec des coefficients dont la relation avec la courbure moyenne est mise en évidence par l'écriture même.

Pour obtenir les deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre que vérifie H, il suffit de porter $\Phi_{\alpha\beta}$ sous la forme (6.5), dans les équations de Codazzi (1.2) qui, quand on se sert de la dérivation covariante, se condensent en

$$\Phi_{11,2}=\Phi_{12,1},\qquad \Phi_{21,2}=\Phi_{22,1}. \tag{6.6}$$

II. — Surfaces déformables avec conservation des courbures principales.

7. La possibilité de déterminer les directions principales par des calculs finis à partir du ds^2 et de la courbure moyenne repose sur l'existence de la relation (1.4). Que cette relation s'évanouisse, θ n'est plus déterminé par une équation finie : l'équation aux différentielles totales équivalente à (1.3) est complètement intégrable, et la formule donnant θ contiendra une constante arbitraire. A un choix donné du ds^2 et de la courbure moyenne, correspondront une infinité de formes asymptotiques possibles. En d'autres termes, de telles surfaces seront déformables avec conservation des courbures principales : ce sont elles que M. E. Cartan appelle les *surfaces d'Ossian Bonnet*.

Il faut et il suffit, pour qu'une surface appartienne à cette catégorie que, dans (1.4), X et Y soient nuls.

Cette condition est évidemment satisfaite si $\mathrm{H}=\text{const.}$; les surfaces à courbure moyenne constante seront appelées les surfaces d'O. Bonnet *de première classe*. Dans ce cas, les équations (1.3) ne contiennent plus θ à droite et déterminent θ à une constante additive près, ce qui démontre le théorème connu d'O. Bonnet : *Si l'on déforme une surface à courbure moyenne constante sans*

altérer les courbures principales, les nouvelles lignes de courbure coupent les anciennes sous un angle constant.

Sur les surfaces à courbure moyenne constante, la relation (1.4) se réduit à $Z = 0$ ou, puisque $H_1 = H_2 = 0$,

$$2K = \Delta_2 \log A, \tag{7.1}$$

formule qui se vérifie immédiatement en utilisant la théorie que nous avons développée ailleurs (1) des lignes minima des surfaces. Quand une surface est à courbure moyenne constante, les formes minima sont des différentielles exactes du, dv et, par suite, le ds^2 s'écrit

$$ds^2 = \frac{2\,du\,dv}{A}. \tag{7.2}$$

La formule de Liouville donne d'autre part

$$K = A(\log A)_{uv}. \tag{7.3}$$

Or, d'après l'expression (7.2) du ds^2, on a, pour toute fonction $f(u, v)$, $\Delta_2 f = 2A f_{uv}$; donc (7.3) équivaut bien à (7.1). Comme $K = H^2 - A^2$, on a, pour déterminer le coefficient A de (7.2), l'équation aux dérivées partielles

$$A(\log A)_{uv} = H^2 - A^2, \tag{7.4}$$

où H est une constante. En posant $A = H e^{\xi}$, cette équation devient

$$\xi_{uv} = -2H \operatorname{sh} \xi. \tag{7.5}$$

Si l'on ne précise pas les variables utilisées, la formule (7.1) devient, en remplaçant A^2 par $H^2 - K$,

$$4K(H^2 - K)^2 + \Delta_2 K(H^2 - K) + \Delta_1 K = 0; \tag{7.6}$$

elle exprime la condition que vérifie le tenseur métrique de toute surface ayant la courbure moyenne constante H.

A chaque solution $A(u, v)$ de (7.4) correspondent une infinité de surfaces ayant le même ds^2, la même courbure moyenne constante H et, pour formes asymptotiques,

$$\Phi = du^2 e^{2\theta} + H\,ds^2 + dv^2 e^{-2\theta}, \tag{7.7}$$

où θ est une constante quelconque.

8. Nous supposerons désormais la courbure moyenne variable. Les conditions de complète intégrabilité s'écrivent

$$l'_{12} = 0, \qquad l_{12} = 0. \tag{8.1}$$

(1) *Bull. de la Soc. Math.*, 75, 1947, p. 63-88.

Donc, par rapport à n'importe quel repère rectangulaire, le tenseur moyen vérifie $l_{11}=l_{22}$ et $l_{12}=0$. Or, par rapport aux mêmes repères, le tenseur métrique vérifie $g_{11}=g_{22}=1$, $g_{12}=0$. Donc, *sur les surfaces d'O. Bonnet, et sur ces surfaces seulement, le tenseur moyen est proportionnel au tenseur métrique*

$$l_{\alpha\beta}=\lambda g_{\alpha\beta}. \tag{8.2}$$

Le coefficient de proportionnalité λ est, d'après (5.4), $\mathcal{H}$, c'est-à-dire

$$\lambda=\frac{l_{11}+l_{22}}{2}=\frac{1}{2}(H_{,11}+H_{,22})-\frac{\Lambda_1 H_1+\Lambda_2 H_2}{\Lambda}=\frac{\Delta_2 H}{2}-\frac{\Delta_1(A,H)}{\Lambda}. \tag{8.3}$$

Sous cette forme, λ fait intervenir les dérivées secondes de H; on peut les faire disparaître en se servant de $Z=0$ (conséquence de $X=Y=0$), qui s'écrit, d'après (4.3),

$$\Delta_2 \log A-\frac{\Delta_1 H}{A^2}-2K=0. \tag{8.4}$$

En effet, $A^2=H^2-K$ donne

$$\Delta_2 \log A=\frac{1}{A^2}\left(H\Delta_2 H+\Delta_1 H-\frac{\Delta_2 K}{2}-2\Delta_1 A\right). \tag{8.5}$$

Portant dans (8.4) et résolvant, il vient

$$\Delta_2 H=\frac{1}{H}\left(\frac{\Delta_2 K}{2}+2\Delta_1 A+2A^2K\right), \tag{8.6}$$

et enfin

$$\lambda=\frac{1}{H}\left(\frac{\Delta_2 K}{4}+\Delta_1 A+A^2K\right)-\frac{\Delta_1(A,H)}{A}. \tag{8.7}$$

Portant cette valeur de λ dans (8.2), on obtient une équation qui condense trois équations aux dérivées partielles exprimant les trois dérivées partielles du second ordre de H en fonction de H et de ses dérivées premières; les coefficients contiennent $g_{\alpha\beta}$ et ses dérivées, toutes quantités connues par hypothèse. En écrivant les deux conditions d'intégrabilité, on obtiendrait deux relations déterminant H_1 et H_2 en fonction de H; la nouvelle condition d'intégrabilité permettrait de calculer H en fonction du tenseur métrique et de ses dérivées. C'est un résultat tout différent de ce qui se présente pour une surface générique où, comme nous l'avons vu au n° 6, H n'est assujetti qu'à vérifier deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre.

9. En se référant au repère principal on obtient, pour nos surfaces,

$$L_{12}=0, \qquad L'_{12}=0. \tag{9.1}$$

La première de ces équations exprime un théorème dû à O. Bonnet : *Les surfaces déformables avec conservation de la courbure moyenne sont des surfaces isothermiques.*

En effet, a et c étant les courbures principales, on a

$$2H = a + c \qquad \text{et} \qquad 2A = a - c,$$

d'où

$$2L_{12} = a_{,12} + c_{,12} - \frac{a_1 a_2 - c_1 c_2}{A},$$

les dérivées pfaffiennes étant prises par rapport au repère principal. Or, dans les mêmes conditions, les équations de Codazzi s'écrivent

$$a_2 = 2Ar, \qquad c_1 = -2As,$$

d'où

$$a_{,12} = a_{,21} = a_{21} + ra_1 = 2A_1 r + 2Ar_1 + ra_1 = r(2a_1 - c_1) + 2Ar_1,$$
$$c_{,12} = c_{12} + sc_2 = -2A_2 s - 2As_2 + sc_2 = s(2c_2 - a_2) - 2As_2,$$

et, finalement,

$$(9.2) \qquad 2L_{12} = r(2a_1 - c_1) + s(2c_2 - a_2) + 2A(r_1 - s_2) - 2ra_1 - 2sc_2 = 2A(r_1 - s_2).$$

Si $L_{12} = 0$, on a $r_1 - s_2 = 0$, car on n'envisage que des régions sans ombilics ($A \neq 0$). Or $r_1 - s_2 = 0$, qui exprime que $s\omega^1 + r\omega^2$ est une différentielle exacte, caractérise comme on sait (1), les surfaces isothermiques. Notons que, si une surface est isothermique ($L_{12} = 0$) sans être surface d'O. Bonnet ($L^*_{12} \neq 0$), la formule (6.5) est applicable, car $\mathcal{K}_{l^*} \neq 0$, mais le terme en $l^*_{\alpha\beta}$ disparaît; résolvant par rapport à $l_{\alpha\beta}$, on voit qu'alors le tenseur moyen est une combinaison linéaire du tenseur métrique et du tenseur asymptotique. De (6.5), en effet, on tire d'abord, puisque $L_{12} = 0$,

$$(9.3) \qquad AL^*_{12} l_{\alpha\beta} = (H\mathcal{K}_{l^*} + A\mathcal{H}_l L^*_{12}) g_{\alpha\beta} - \mathcal{K}_{l^*} \Phi_{\alpha\beta}.$$

Mais ici $\mathcal{K}_{l^*} = -(L^*_{12})^2$. On peut donc simplifier (9.3) en divisant par AL^*_{12} et il vient

$$(9.4) \qquad l_{\alpha\beta} = \left(-\frac{H}{A} L^*_{12} + \mathcal{H}_l\right) g_{\alpha\beta} + \frac{L^*_{12}}{A} \Phi_{\alpha\beta}.$$

Telle est l'expression du tenseur moyen sur les surfaces isothermiques. Si l'on suppose, en outre, que L^*_{12} s'annule lui aussi, c'est-à-dire que la surface est surface d'O. Bonnet, (9.4) se réduit à

$$l_{\alpha\beta} = \mathcal{H}_l g_{\alpha\beta},$$

ce qui concorde avec (8.2).

10. En projetant le tenseur moyen sur le repère moyen, les équations caractéristiques des surfaces d'O. Bonnet deviennent

$$\lambda_{12} = 0, \qquad \lambda^*_{12} = 0,$$

---

(1) *Voir* notre Note aux *C. R. Acad. Sc.*, 223, 1946, p. 707.

ou, d'après (4.6) et (4.7),

$$\Theta\left(\mathrm{H}, \log\frac{\Delta_1\mathrm{H}}{\mathrm{A}^2}\right)=0, \qquad \Delta_2\mathrm{H}=\Delta_1\left(\mathrm{H}, \log\frac{\Delta_1\mathrm{H}}{\mathrm{A}^2}\right). \tag{10.1}$$

La première de ces équations signifie que $\log\frac{\Delta_1\mathrm{H}}{\mathrm{A}^2}$ est fonction de H, soit F(H); la seconde s'écrit, en conséquence,

$$\Delta_2\mathrm{H}=\mathrm{F}'(\mathrm{H})\,\Delta_1\mathrm{H};$$

donc le rapport $\frac{\Delta_2\mathrm{H}}{\Delta_1\mathrm{H}}$ est fonction de H. Il est possible, par conséquent, de déterminer une fonction de H, $x(\mathrm{H})$ qui soit harmonique sur la surface. En effet, pour toute fonction x de H, on a

$$\Delta_2 x=x''\,\Delta_1\mathrm{H}+x'\,\Delta_2\mathrm{H};$$

ce sera nul si

$$\frac{x''}{x'}=-\frac{\Delta_2\mathrm{H}}{\Delta_1\mathrm{H}},$$

ce qu'on peut obtenir, dès lors que $\frac{\Delta_2\mathrm{H}}{\Delta_1\mathrm{H}}$ est fonction de H. Cette condition donne, dans le cas présent,

$$\frac{x''}{x'}=-\mathrm{F}'(\mathrm{H})=-\frac{d}{d\mathrm{H}}\log\frac{\Delta_1\mathrm{H}}{\mathrm{A}^2},$$

donc

$$x'=\mathrm{C}\frac{\mathrm{A}^2}{\Delta_1\mathrm{H}}, \qquad x=\mathrm{C}\int\frac{\mathrm{A}^2\,d\mathrm{H}}{\Delta_1\mathrm{H}}+\mathrm{C}_1.$$

Nous prendrons $\mathrm{C}=1$, de sorte que x vérifiera

$$dx=\frac{\mathrm{A}^2\,d\mathrm{H}}{\Delta_1\mathrm{H}}, \tag{10.2}$$

ou encore, puisque $d\mathrm{H}=\mathrm{H}_1\omega^1$ et $\Delta_1\mathrm{H}=\mathrm{H}_1^2$,

$$dx=\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{H}_1}\omega^1, \tag{10.3}$$

relation qui exprime que $\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{H}_1}$ est facteur intégrant pour ω^1. Si y est la fonction harmonique sur la surface, directement associée à x, on aura

$$dy=\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{H}_1}\omega^2 \qquad \text{et} \qquad ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2=\frac{dx^2+dy^2}{\mu^2}$$

avec

$$\mu=\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{H}_1}.$$

La formule (10.2) montre que H est fonction de x; soit $H = f(x)$. Comme $dx = \mu\omega^1$, on a

$$H_1 = \mu f'(x) = \frac{A^2}{H_1} f'(x);$$

donc

$$f'(x) = \frac{\Delta_1 H}{A^2}.$$

Puisqu'il existe une fonction $x(H)$ qui est harmonique sur la surface, *les courbes* $H = C$ *sont isothermes*. Cette propriété, déjà signalée par O. Bonnet (¹), a d'importantes conséquences. Pour les exposer, il est indispensable de résumer d'abord la théorie des surfaces à c. m. i. (courbure moyenne isotherme).

Soit, sur une surface quelconque à c. m. i., x et y un système de paramètres isométriques, les courbes $x = \text{const.}$ étant les courbes $H = \text{const.}$, de telle sorte que $H = f(x)$. L'élément linéaire est

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\mu^2},$$

μ étant facteur intégrant à la fois pour ω^1 et ω^2, $\mu\omega^1 = dx$ et $\mu\omega^2 = dy$, d'où, en différentiant extérieurement

$$r = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\mu_2}{\mu}, \qquad s = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mu_1}{\mu}. \tag{10.4}$$

On en déduit

$$s\omega^1 + r\omega^2 = d\log\mu. \tag{10.5}$$

D'autre part

$$-r\omega^1 + s\omega^2 = -(\log\mu)_2\omega^1 + (\log\mu)_1\omega^2$$

d'où

$$K = \frac{d(-r\omega^1 + s\omega^2)}{[\omega^1\omega^2]} = \Delta_2 \log\mu = \mu^2\left(\frac{\partial^2 \log\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log\mu}{\partial y^2}\right). \tag{10.6}$$

Revenons aux équations (4.4), où $\frac{\varphi}{2}$ désigne l'angle du repère principal avec le repère moyen et où les indices désignent des dérivées pfaffiennes moyennes. Deux combinaisons évidentes donnent

$$\varphi_1\cos\varphi + \varphi_2\sin\varphi = \left(\frac{A_2}{A} - 2r\right)\cos\varphi - \left(\frac{A_1}{A} - 2s\right)\sin\varphi$$

$$-\varphi_1\sin\varphi + \varphi_2\cos\varphi = \left(-\frac{A_1}{A} + 2s\right)\cos\varphi - \left(\frac{A_2}{A} - 2r\right)\sin\varphi + \frac{H_1}{A},$$

et cela peut s'écrire, compte tenu de (10.4),

$$\left(\frac{A\sin\varphi}{\mu^2}\right)_1 - \left(\frac{A\cos\varphi}{\mu^2}\right)_2 = 0, \tag{10.7}$$

$$\left(\frac{A\cos\varphi}{\mu^2}\right)_1 + \left(\frac{A\sin\varphi}{\mu^2}\right)_2 = \frac{H_1}{\mu^2}. \tag{10.8}$$

(¹) *Journ. de l'Ec. Polyt.*, 42, 1867, p. 82.

La première de ces égalités signifie qu'il existe une fonction $\psi(x, y)$ satisfaisant à

$$d\psi = \frac{A\cos\varphi}{\mu^2}dx + \frac{A\sin\varphi}{\mu^2}dy \tag{10.9}$$

et ayant, par conséquent, pour premier paramètre différentiel,

$$\Delta_1\psi = \mu^2\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{A^2}{\mu^2}. \tag{10.10}$$

Nous appellerons $\psi(x, y)$ la *fonction primitive* de la surface à c. m. i.; elle n'est définie qu'à une constante additive près.

L'égalité (10.8), de son côté, signifie que le second paramètre différentiel de la fonction primitive est, H étant toujours désigné par $f(x)$,

$$\Delta_2\psi = \mu^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = f'(x). \tag{10.11}$$

Convenons de poser, pour une fonction $F(x, y)$ quelconque,

$$\delta_1 F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2, \qquad \delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2};$$

nous aurons, d'après (10.10) et (10.11),

$$\mu^2 = \frac{f'}{\delta_2\psi}, \qquad A = f'(x)\frac{\sqrt{\delta_1\psi}}{\delta_2\psi}. \tag{10.12}$$

L'équation de Gauss (10.6) devient, puisque $K = H^2 - A^2$,

$$f^2 - f'^2\frac{\delta_1\psi}{(\delta_2\psi)^2} = \frac{f'}{2\,\delta_2\psi}\delta_2\log\frac{f'}{\delta_2\psi}$$

ou encore

$$\delta_2\log\frac{\delta_2\psi}{f'} = 2f'\frac{\delta_1\psi}{\delta_2\psi} - 2\frac{f^2}{f'}\delta_2\psi. \tag{10.13}$$

La détermination des surfaces à c. m. i. se ramène à l'intégration de cette équation, qui est du quatrième ordre en ψ, et contient dans ses coefficients la fonction arbitraire $f(x)$ (¹).

Compte tenu de (10.12), le ds^2 d'une surface à c. m. i. s'écrit

$$ds^2 = \frac{\delta_2\psi}{f'}(dx^2 + dy^2). \tag{10.14}$$

Quant à sa forme asymptotique qui, d'après (1.1), est

$$\Phi = \mathrm{II}\,ds^2 + A\cos\varphi[(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2] + 2A\sin\varphi\,\omega^1\omega^2,$$

(¹) Sur cette question, voir notre Note aux *C. R. Acad. Sc.*, 226, 1948, p. 1339.

elle devient, en vertu de (10.9),

$$\Phi = f\,ds^2 + \frac{\partial \psi}{\partial x}(dx^2 - dy^2) + 2\frac{\partial \psi}{\partial y}\,dx\,dy. \tag{10.15}$$

On remarquera que les deux dérivées premières de la fonction primitive figurent dans Φ isolément, tandis que, dans le ds^2, la fonction primitive ne figure que par son second paramètre différentiel.

11. Les formules (10.14) et (10.15) donnent les deux formes fondamentales d'une surface à c. m. i. quelconque, la fonction $\psi(x, y)$ étant censée vérifier (10.13), qui contient $f(x)$ dans ses coefficients. Si la surface considérée est une surface d'O. Bonnet, il se trouve, comme nous allons le voir, que $\psi(x, y)$ satisfait en outre une seconde équation qui peut être intégrée, et (10.13) devient une équation différentielle ordinaire en f.

L'équation supplémentaire concernant ψ est

$$\Delta_2 \psi = \Delta_1 \psi. \tag{11.1}$$

Nous avons trouvé, en effet, au n° 10, que sur les surfaces d'O. Bonnet,

$$\mu = \frac{A^2}{H_1}, \qquad f'(x) = \frac{\Delta_1 H}{A^2}.$$

En portant dans (10.10) et (10.11), on trouve bien (11.1). Si ψ satisfait cette équation, on en déduit $\mu^2 = \frac{A^2}{f'}$, d'où $\mu = \frac{A^2}{H_1}$.

Il s'ensuit que le paramètre isométrique x vérifie (10.3), donc (10.2). On a

$$\frac{\Delta_1 H}{A^2} = \frac{1}{x'(H)}.$$

donc la première équation (10.1) est satisfaite. On a, en outre,

$$\frac{x''}{x'} = -\frac{d}{dH}\log\frac{\Delta_1 H}{A^2} = -\frac{\Delta_2 H}{\Delta_1 H},$$

donc

$$\Delta_2 H = \Delta_1 H \frac{d}{dH}\log\frac{\Delta_1 H}{A^2} = H_1\left(\log\frac{\Delta_1 H}{A^2}\right)_1 = \Delta_1\left(H, \log\frac{\Delta_1 H}{A^2}\right),$$

ce qui est la seconde équation (10.1) : la surface est donc surface d'O. Bonnet.

L'équation (11.1), suffisante, n'est toutefois pas nécessaire. Au lieu de $\mu = \frac{A^2}{H_1}$, on pouvait en effet prendre comme facteur intégrant commun à ω^1 et ω^2, $\bar{\mu} = C\mu$, C étant une constante arbitraire. Alors, x devenait $\bar{x} = Cx$ et ψ, $\bar{\psi} = \frac{\psi}{C}$, d'où

$$\Delta_1 \bar{\psi} = \frac{\Delta_1 \psi}{C^2}, \qquad \Delta_2 \bar{\psi} = \frac{\Delta_2 \psi}{C}$$

et enfin

$$\Delta_2 \bar{\psi} = C\,\Delta_1 \bar{\psi}.$$

Ce qui caractérise donc les surfaces d'O. Bonnet, en tant que surfaces à c. m. i., c'est que *les deux paramètres différentiels de leur fonction primitive sont proportionnels*. Par un choix convenable du système isométrique x, y, *ces deux paramètres différentiels peuvent être rendus égaux*. C'est ce choix que nous ferons dans la suite.

L'équation (11.1) s'écrit aussi

$$\delta_2\psi = \delta_1\psi.$$

Pour l'intégrer, il suffit de poser $\psi = -\log Q$; on obtient

$$\delta_2 Q = 0.$$

Q doit donc être une fonction harmonique (dans le plan (x, y). Il suit de là que, compte tenu de

$$\delta_2 \log Q = \frac{\delta_2 Q}{Q} - \frac{\delta_1 Q}{Q^2},$$

les deux formes fondamentales d'une surface d'O. Bonnet auront pour expression, d'après (10.14) et (10.15),

$$(11.2)\quad ds^2 = \frac{1}{f'(x)}\frac{Q_x'^2 + Q_y'^2}{Q^2}(dx^2 + dy^2), \qquad \Phi = f\,ds^2 - \frac{Q_x'}{Q}(dx^2 - dy^2) - \frac{2Q_y'}{Q}dx\,dy,$$

où $Q(x, y)$ est une solution de l'équation de Laplace.

12. La fonction $f(x)$ et la fonction harmonique $Q(x, y)$ qui figurent dans (11.2) ne peuvent être choisies arbitrairement à la fois. Elles sont liées par une relation qui se déduit de (10.13) et qui n'est autre que l'équation de Gauss. Faisons $\delta_2\psi = \delta_1\psi$ dans (10.13) et tenons compte, en outre, que

$$\delta_2 \log f' = \frac{d^2}{dx^2}\log f', \qquad \delta_2 \log \delta_2\psi = \delta_2 \log \frac{Q_x'^2 + Q_y'^2}{Q^2} = 2\,\delta_2\psi,$$

car $\log(Q_x'^2 + Q_y'^2)$ est harmonique; il vient

$$(12.1)\qquad \frac{d^2}{dx^2}\log f' = 2\left(1 + \frac{f^2}{f'}\right)\delta_2\psi - 2f',$$

où l'on a conservé $\delta_2\psi$ pour $\frac{\delta_1 Q}{Q^2} = \frac{Q_x'^2 + Q_y'^2}{Q^2}$.

L'examen de cette équation montre la nécessité de distinguer deux classes parmi les surfaces d'O. Bonnet à courbure moyenne variable (la première classe est, nous l'avons dit au n° 7, formée des surfaces à courbure moyenne constante). (12.1) est satisfaite, quelle que soit Q, si $f' + f^2 = 0$: les surfaces correspondantes seront dites *de seconde classe*. Si, au contraire, $f' + f^2 \neq 0$, (12.1) détermine $\delta_2\psi$ comme fonction de x, ce qui revient à dire, comme on le voit en se reportant à l'expression (10.14) du ds^2, que les surfaces correspondantes sont applicables sur une surface de révolution. Une surface d'O. Bonnet

sera dite *de troisième classe*, si $\delta_2\psi$ n'est fonction que de x; cette condition détermine Q. Une fois Q convenablement choisie, (12.1) devient une équation différentielle ordinaire du troisième ordre pour $f(x)$. La deuxième et la troisième classe ne sont pas disjointes, car rien n'empêche que, sur une surface vérifiant $f'+f^2=0$, on ait $\delta_2\psi$ fonction de x.

On arrive à la même distinction en deux classes, si l'on part de la première équation (10.1), qui donne $\frac{\Delta_1 H}{A^2}=g(H)$, et si l'on tient compte de (10.2), $g(H)=\frac{dH}{dx}=f'(x)$. Le facteur intégrant $\mu=\frac{A^2}{H_1}$ s'écrit donc aussi

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{g(H)}}.$$

Par suite, la relation (10.6) devient

$$K=\Delta_2\log A-\frac{1}{2}\Delta_2\log g. \tag{12.2}$$

Or

$$\Delta_2\log g=\mu^2\frac{d^2}{dx^2}\log g=\mu^2 g\frac{d^2 g}{dH^2}=A^2\frac{d^2 g}{dH^2},$$

donc

$$K=\Delta_2\log A-\frac{A^2}{2}\frac{d^2 g}{dH^2}. \tag{12.3}$$

Or, la relation $Z=0$ s'écrit, d'après (4.3), compte tenu de la signification de g,

$$\Delta_2\log A=g(H)+2K. \tag{12.4}$$

Portant dans (12.3), et remplaçant K par H^2-A^2, il vient

$$g+H^2-A^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{d^2 g}{dH^2}\right)=0,$$

ce qui s'écrit plus simplement, en posant $G(H)=g(H)+H^2$,

$$2G-A^2\frac{d^2 G}{dH^2}=0. \tag{12.5}$$

Cette équation est satisfaite par $G=0$, qui équivaut à $f'+f^2=0$; dans ce cas, (12.5) ne détermine pas A, on a les surfaces *de deuxième classe*. Si $G\neq 0$, (12.5) exige que $\frac{d^2 G}{dH^2}$ soit aussi différent de zéro; alors (12.5) détermine A comme fonction de H; on a les surfaces de troisième classe, et l'on constate que ce sont toutes des surfaces W.

13. La condition que $\delta_2\psi$ ne dépende que de x entraîne que, *sur une surface de troisième classe, les lignes* $H=C$ *sont géodésiquement parallèles*. En effet, (10.11) donne alors $\mu=\mu(x)$, donc, d'après (10.4), $r=0$, et, comme

$H_{12}=rH_1$, on a $H_{12}=0$, c'est-à-dire $\Delta_1 H$ fonction de H, ce qui démontre la proposition.

Proposons-nous, réciproquement, de chercher toutes les surfaces sur lesquelles les lignes $H=C$ sont à la fois, comme sur les surfaces d'O. Bonnet de troisième classe, isothermes et géodésiquement parallèles (1). On a la proposition suivante : *les surfaces sur lesquelles les lignes* $H=C$ *sont à la fois isothermes et géodésiquement parallèles sont :* 1° *les surfaces admettant un groupe de mouvements à un paramètre;* 2° *les surfaces d'O. Bonnet de troisième classe.*

En effet, les lignes $H=C$ étant isothermes, $s\omega^1+r\omega^2$ est une différentielle exacte (ω^1 et ω^2 désignant ici les projections de dM sur le repère moyen); donc $s_2=r_1$. Ces lignes étant géodésiquement parallèles, $H_{12}=0$. Or $H_{12}=rH_1$, donc $r=0$ (car on suppose qué la surface est à courbure moyenne variable). Il s'ensuit $r_1=0$, d'où $s_2=0$. La courbure totale $s_1+r_2-r^2-s^2$ se réduit alors à s_1-s^2, qui, à cause de $s_2=0$, n'est fonction que de H; donc la surface est W. Dans la formule (4.5), λ_{12} est présentement nul, λ^*_{12} et L^*_{12} ne dépendent que de H. (4.5) se réduit à

$$\lambda^*_{12}\cos\varphi=L^*_{12}.$$

Si cette équation définit φ, φ ne dépend que de H : les surfaces correspondantes admettent un groupe de mouvements à un paramètre, puisque les coefficients de leurs deux formes fondamentales ne dépendent que d'une variable. Si $\lambda^*_{12}=0$, comme λ_{12} est déjà nul, on a des surfaces d'O. Bonnet, qui sont de troisième classe, puisque W.

14. En examinant les deux formes fondamentales (11.2) d'une surface de O. Bonnet, on voit que la déformabilité spéciale d'une telle surface tient à ce que l'on peut modifier la fonction harmonique $Q(x, y)$ de façon que $\frac{Q'_x}{Q}$ et $\frac{Q'_y}{Q}$ soient changées sans que le soit la somme de leurs carrés, qui, seule, figure dans le ds^2.

Soient Q et $\overline{Q}$ deux fonctions harmoniques, telles que

$$\frac{\overline{Q}'^2_x+\overline{Q}'^2_y}{\overline{Q}^2}=\frac{Q'^2_x+Q'^2_y}{Q^2}, \tag{14.1}$$

et considérons les deux fonctions analytiques de $z=x+iy$, dont Q et $\overline{Q}$ sont les parties imaginaires

$$w=P+iQ, \qquad \overline{w}=\overline{P}+i\overline{Q}.$$

On a

$$\frac{|dw|^2}{Q^2}=\frac{dP^2+dQ^2}{Q^2}=\frac{Q'^2_x+Q'^2_y}{Q^2}(dx^2+dy^2).$$

(1) Sur ce problème, *voir* ma Note aux *C. R. Acad. Sc.*, 226, 1948, p. 1970

Donc, d'après (14.1),

$$\frac{|d\overline{w}|^2}{\overline{Q}^2} = \frac{|dw|^2}{Q^2}. \tag{14.2}$$

La solution est fournie par la transformation fuchsienne générale

$$\overline{w} = \frac{aw+b}{cw+d},$$

où a, b, c, d sont réels, et $ad-bc=1$. On en déduit

$$\frac{d\overline{w}}{dz} = \frac{1}{(cw+d)^2}\frac{dw}{dz}, \qquad \overline{Q} = \frac{Q}{|cw+d|^2};$$

donc, en divisant membre à membre,

$$\frac{1}{\overline{Q}}\frac{d\overline{w}}{dz} = \frac{|cw+d|^2}{(cw+d)^2}\frac{1}{Q}\frac{dw}{dz}.$$

Si α est l'argument de $cw+d$, on aura donc

$$\frac{1}{\overline{Q}}\frac{d\overline{w}}{dz} = \frac{e^{-2i\alpha}}{Q}\frac{dw}{dz},$$

ou, en développant,

$$\frac{\overline{Q}'_y + i\overline{Q}'_x}{\overline{Q}} = e^{-2i\alpha}\frac{Q'_y + iQ'_x}{Q}.$$

Égalant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{Q}'_x}{\overline{Q}} = \dfrac{Q'_x}{Q}\cos 2\alpha - \dfrac{Q'_y}{Q}\sin 2\alpha, \\ \dfrac{\overline{Q}'_y}{\overline{Q}} = \dfrac{Q'_x}{Q}\sin 2\alpha + \dfrac{Q'_y}{Q}\cos 2\alpha. \end{cases} \tag{14.3}$$

Ces formules, qui résolvent le problème, dépendent d'une fonction α, argument de $c(P+iQ)+d$, qui vérifie donc

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{cQ}{cP+d}.$$

On voit qu'on peut prendre comme paramètre le rapport $\frac{c}{d}$. Si l'on remplace dans (14.3), $\frac{Q'_x}{Q}$ et $\frac{Q'_y}{Q}$ par $-\psi'_x$ et $-\psi'_y$, et de même en surlignant, qu'on tienne compte par ailleurs de (10.9) et de l'équation analogue obtenue en surlignant ψ et φ, on obtiendra

$$\frac{\overline{\varphi}}{2} - \frac{\varphi}{2} = \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{cQ}{cP+d}. \tag{14.4}$$

L'angle $\frac{\overline{\varphi}}{2} - \frac{\varphi}{2}$ est l'angle que fait le réseau des lignes de courbure virtuelles

défini par la solution $Q(x, y)$, avec le réseau défini par la solution $Q(x, y)$. (14.4) montre comment cet angle s'exprime en fonction de x et y.

15. Les surfaces de deuxième classe sont *imaginaires*; on ne saurait avoir, en effet, $\frac{\Delta_1 H}{A^2} + H^2 = 0$ sur une surface réelle, avec $H \neq 0$. Cette propriété, ainsi que la relation $\Delta_1 H + A^2 H^2 = 0$, ont été signalées par M. É. Cartan (1).

Sur ces surfaces, $\frac{1}{H}$ est une fonction harmonique. En effet, la relation $g(H) + H^2 = 0$, qui s'écrit aussi $f' + f^2 = 0$, s'intègre par $f = \frac{1}{x - C}$; donc $\frac{1}{H} = x + C$, fonction qui est bien harmonique sur la surface. On peut faire $C = 0$, par un choix convenable de l'origine des x. La formule (10.14) donne alors, pour l'élément linéaire

$$ds^2 = -x^2 \frac{Q_x'^2 + Q_y'^2}{Q^2}(dx^2 + dy^2),$$

où $Q(x, y)$ est une solution *quelconque* de l'équation de Laplace. La formule (10.15) donne ensuite Φ, en faisant $f = \frac{1}{x}$. $\psi = -\log Q$. On passe d'une surface S de cette classe à une autre, $\bar{S}$, en formant $w = P + iQ$, puis en effectuant la transformation fuchsienne

$$\overline{w} = \frac{aw + b}{cw + d}, \qquad \text{d'où} \quad \overline{Q} = \frac{Q}{|cw + d|^2}.$$

$\bar{S}$ ne sera différente de S que si $c \neq 0$, c'est-à-dire, que si la transformation ne conserve pas le point infini.

16. Pour les surfaces de troisième classe, $\delta_1\psi$ et $\delta_2\psi$, qui sont égaux, ne dépendent que de x. Posons donc

$$\frac{Q_x'^2 + Q_y'^2}{Q^2} = X^2(x). \tag{16.1}$$

La fonction $X(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dx^2}\log X = X^2, \tag{16.2}$$

En effet, d'après (16.1),

$$\delta_2 \log X = \delta_2 \log \sqrt{Q_x'^2 + Q_y'^2} - \frac{\delta_2 Q}{Q} - \frac{\delta_1 Q}{Q^2}.$$

Le premier membre est $\frac{d^2}{dx^2}\log X$; au second membre, les deux premiers termes

(1) *Bull. des Sc. Math.*, 61, 1942, p. 57.

disparaissent, parce que $\log\sqrt{Q_x'^2+Q_y'^2}$ et Q sont harmoniques; reste le troisième, qui est X^2; on a donc bien (16.2).

Une fois (16.2) intégrée, $f(x)$ devra vérifier

$$\frac{d^2}{dx^2}\log f' = 2X^2\left(1+\frac{f^2}{f'^2}\right)-2f', \tag{16.3}$$

qui est la forme que prend (12.1). Quant au ds^2, il s'écrit

$$ds^2 = \frac{X^2}{f'}(dx^2+dy^2); \tag{16.4}$$

il est connu dès qu'on a intégré (16.2) et (16.3), sans qu'on ait besoin de connaître Q elle-même.

17. L'équation (16.2) signifie que la courbure de la forme quadratique $X^2(dx^2+dy^2)$ est égale à -1. On peut donc trouver deux fonctions, $P(x, y)$ et $Q(x, y)$, telles qu'on ait

$$X^2(dx^2+dy^2) = \frac{dP^2+dQ^2}{Q^2}, \tag{17.1}$$

car la courbure du second membre est aussi -1. Cette relation montre que $P+iQ$ est fonction de $x+iy$, ou de $x-iy$, et l'on peut choisir les signes de P et Q pour que ce soit de $x+iy$. Posons $P+iQ = w(x+iy) = w(z)$; on en tire $w'(z) = Q_y'+iQ_x'$, d'où en prenant les modules,

$$\frac{dP^2+dQ^2}{dx^2+dy^2} = Q_x'^2+Q_y'^2.$$

Comparant avec (17.1), on voit que Q, partie imaginaire de $w(z)$, vérifie (16.1). Donc, intégrer (16.1), c'est trouver une fonction analytique $w(z) = P+iQ$ qui vérifie (17.1).

Dans le domaine réel (16.2) a trois types de solutions. En choisissant convenablement l'origine des x, et a désignant une constante arbitraire, ce sont

$$X = \frac{a}{\sin ax}, \qquad X = \frac{a}{\operatorname{sh} ax}, \qquad X = \frac{1}{x}.$$

X étant choisi, si l'on connaît une solution $w = P+iQ$ de (17.1), on en déduira la solution générale, du fait qu'on doit avoir

$$\frac{|d\bar{w}|^2}{\bar{Q}^2} = \frac{dw^2}{Q^2};$$

donc, deux solutions w et $\bar{w}$ sont liées par

$$\bar{w} = \frac{aw+b}{cw-d} \qquad (a, b, c, d, \text{réels}; ad-bc=1) \tag{17.2}$$

En ce qui concerne Q, la solution générale ne dépend que de deux constantes arbitraires, car (17.2) entraîne

$$\overline{Q} = \frac{Q}{cw + d^2}. \tag{17.3}$$

On peut remarquer que, si $Q(x, y)$ est une solution de (16.1), $CQ(x, y-m)$ en est une aussi, qui contient deux constantes arbitraires, C et m. Nous constaterons cependant que la totalité des solutions (17.3) ne peut pas toujours être représentée par une seule formule

$$\overline{Q} = CQ(x, y-m), \tag{17.4}$$

où m serait réel.

18. Sur toute surface d'O. Bonnet, il existe une infinité de réseaux orthogonaux aptes à jouer le rôle de lignes de courbure. Pour les surfaces de troisième classe, les équations (1.4), où l'on fait $A_2 = 0$, $r = 0$, $s = \frac{\mu_1}{\mu}$, permettent d'écrire

$$d\varphi = -X \sin\varphi\, dx + \left(X\cos\varphi - \frac{d}{dx}\log X\right) dy, \tag{18.1}$$

équation dont l'étude est indépendante de l'intégration de (16.3). D'après (10.9), φ est l'angle que fait $\operatorname{grad}\psi$ avec $\operatorname{grad} H$; il s'ensuit que les premières lignes de courbure bissectent les lignes tangentes à $\operatorname{grad}\psi$ et celles tangentes à $\operatorname{grad} H$, et que les secondes lignes de courbure bissectent les lignes $\psi = C$ et $H = C$.

Au réseau orthogonal isotherme formé des lignes $H = C$ et de leurs trajectoires orthogonales, nous avons fait correspondre une variable complexe $z = x + iy$; à chaque réseau de lignes de courbure virtuelles, correspondra de même une variable complexe z_m, fonction analytique de z, dont la partie imaginaire restera constante le long des premières lignes de courbure, la partie réelle le long des secondes. Enfin, à chaque solution Q de (16.1) correspond une variable complexe w_m, fonction analytique de z, dont la partie imaginaire reste constante le long des lignes $\psi = C$. Comme les secondes lignes de courbure bissectent les lignes $\psi = C$ et $H = C$, il est possible de choisir le facteur réel qui reste arbitraire dans la définition de z_m et w_m, de sorte qu'on ait

$$dz_m^2 = i\, dw_m\, dz, \tag{18.2}$$

si bien que, une fois déterminée l'une des fonctions $z_m(z)$, $w_m(z)$, l'autre s'obtiendra par une quadrature.

Nous étudierons (18.1) successivement dans les hypothèses

$$X = \frac{a}{\sin ax}, \qquad X = \frac{a}{\operatorname{sh} ax}, \qquad X = \frac{1}{x};$$

les ds^2 correspondants, donnés par (16.4), seront dits respectivement du type A, B ou C, conformément à la terminologie de M. E. Cartan.

Type A : $X = \frac{a}{\sin ax}$. — L'équation (18.1) s'écrit

$$d\varphi = -\frac{a\sin\varphi}{\sin ax}dx + a\frac{\cos\varphi + \cos ax}{\sin ax}dy \tag{18.3}$$

et devient, en posant $\operatorname{tg}\frac{ax}{2} = u$, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = v$,

$$a\,dy = \frac{2\,d(uv)}{1-u^2v^2}. \tag{18.4}$$

On doit distinguer suivant que $|uv|$ est inférieur, supérieur, ou égal à 1.

Cas α : $|uv| < 1$; la solution est

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{th}\frac{a(y-m)}{2}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$$

Cas β :

$$|uv| > 1, \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{cth}\frac{a(y-m)}{2}\cot\frac{ax}{2}.$$

Cas γ :

$$uv = 1, \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \cot\frac{ax}{2}.$$

Cas δ :

$$uv = -1, \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = -\cot\frac{ax}{2}.$$

Dans le cas α, en un point donné de la surface, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ varie, avec m, de $-\cot\frac{ax}{2}$ à $\cot\frac{ax}{2}$, c'est-à-dire que φ varie de $-(\pi - ax)$ à $\pi - ax$, en passant par zéro; dans le cas β, $|\varphi|$ varie de $|\pi - ax|$ à π; dans le cas γ, $\varphi = \pi - ax$; dans le cas δ, $\varphi = -(\pi - ax)$.

Pour obtenir z_m, on observe que, dans le cas α, l'équation différentielle des premières lignes de courbure virtuelles est

$$dx\operatorname{th}\frac{a(y-m)}{2} - dy\operatorname{tg}\frac{ax}{2} = 0;$$

elle exprime la condition pour que $d\log\operatorname{tg}\frac{a(z-im)}{4}$ soit réel. On obtient donc ces lignes en égalant à une constante la partie imaginaire de

$$z_m = \log\operatorname{tg}\frac{a(z-im)}{4}.$$

Pour le cas β, z_m est remplacée par

$$z'_m = i \log \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{a(z - im)}{4}\right].$$

Pour le cas γ, par

$$z'' = e^{ia\frac{z}{2}}.$$

Pour le cas δ, par

$$z''' = e^{-ia\frac{z}{2}}.$$

La fonction w_m s'obtiendra par application de (18.2). En négligeant un facteur $\frac{a}{2}$ sans importance, on aura :

Cas α :

$$w_m = i \operatorname{cotg} \frac{a(z - im)}{2}, \qquad Q_m = \frac{\sin ax}{\operatorname{ch} a(y - m) - \cos ax}.$$

Cas β :

$$w'_m = i \operatorname{tg} \frac{a(z - im)}{2}, \qquad Q'_m = \frac{\sin ax}{\operatorname{ch} a(y - m) + \cos ax}.$$

Cas γ :

$$w'' = e^{iaz}, \qquad Q'' = \sin ax\, e^{-ay}.$$

Cas δ :

$$w''' = e^{-iaz}, \qquad Q''' = -\sin ax\, e^{ay}.$$

19. *Type* **B** : $X = \frac{a}{\operatorname{sh} ax}$. — La solution générale tient en une seule formule

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{a(y - m}{2} \operatorname{cth} \frac{ax}{2}$$

et

$$z_m = \log \operatorname{th} \frac{a(z - im)}{4}, \qquad w_m = i \operatorname{cth} \frac{a(z - im)}{2}, \qquad Q_m = \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} ax - \cos a(y - m)}.$$

Type **C** : $X = \frac{1}{x}$. — L'équation (18.1) devient

$$d\varphi = -\frac{1}{x} \sin \varphi\, dx + \frac{1 + \cos \varphi}{x}\, dy.$$

La solution générale est

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{y - m}{x}$$

et il y a une solution singulière $\varphi = \pi$.

De là, pour le *cas général*

$$z_m = \log(z - im), \qquad w_m = \frac{i}{z - im}, \qquad Q_m = \frac{x}{x^2 + (y - m)^2}$$

et, pour le *cas singulier*,

$$z' = iz, \qquad w' = -iz, \qquad Q' = -x.$$

20. Il est possible, comme l'a montré M. É. Cartan, de faire sur un plan la représentation conforme de n'importe quelle surface d'O. Bonnet de troisième classe de façon que la carte de toutes ses lignes de courbure virtuelles soit formée de cercles (ou droites). Considérons par exemple le type **A**, cas α. Dans le plan (z_m), les lignes de courbure seraient représentées par des parallèles aux axes; si nous posons

$$\zeta_m = e^{z_m},$$

ces mêmes lignes, dans le plan (ζ_m), seraient représentées par les demi-droites rayonnant de l'origine et par les cercles centrés à l'origine.

Pour le cas β, on obtiendrait le même résultat en posant

$$\zeta'_m = e^{-iz'_m}.$$

Or ζ_m, ζ'_m, et aussi z''', sont des fonctions homographiques de z'' : tout faisceau de cercles ou de droites d'un des plans (ζ_m), (ζ'_m), (z''') sera donc représenté aussi par un tel faisceau dans le plan (z''). On voit facilement que, dans le plan (z''), le réseau (m) d'espèce α sera représenté par les faisceaux de cercles orthogonaux ayant pour points de base ou pour points de Poncelet $\pm e^{-\frac{am}{2}}$; le réseau (m) d'espèce β, par les faisceaux ayant pour points de base ou de Poncelet $\pm ie^{-\frac{am}{2}}$; le réseau singulier γ est évidemment représenté par les parallèles aux axes, tandis que le réseau singulier δ est représenté par les cercles tangents en O à l'axe réel ou à l'axe imaginaire. Les deux réseaux singuliers se présentent comme des cas limites communs aux réseaux d'espèce α et β, pour $am = \pm\infty$.

Pour étudier le type **B**, on posera $\zeta_m = e^{z_m}$. Dans le plan (ζ_0), le réseau (m) sera représenté par les faisceaux de cercles orthogonaux ayant pour points de base ou de Poncelet les points $i\,\mathrm{tg}\,\frac{am}{4}$ et $-i\,\mathrm{cotg}\,\frac{am}{4}$. Si l'on prenait comme plan de la carte celui de

$$z' = \frac{\zeta_0 + 1}{\zeta_0 - 1} = -e^{\frac{iz}{2}},$$

on obtiendrait les faisceaux de cercles orthogonaux de points de base ou de Poncelet $\pm e^{\frac{iam}{2}}$, diamétralement opposés sur la circonférence unité. Dans le type **B**, il n'y a pas de réseaux singuliers.

Pour le type **C**, on peut faire la carte sur le plan (z), c'est-à-dire sur le plan (e^z). Les premières lignes du réseau (m) y sont représentées par les droites rayonnant du point im, celles du réseau singulier sont représentées par les parallèles à l'axe imaginaire : c'est le cas limite du précédent pour $m = \pm\infty$.

21. Il nous reste à tirer les conséquences de nos formules, en ce qui concerne l'immersion d'un ds^2 de la forme (16.4).

Si $X = \frac{a}{\sin ax}$ (type **A**), et si nous considérons l'espèce α, la seconde forme fondamentale s'écrira

$$\Phi_m = (H + A\cos\varphi)(\omega^1)^2 + 2A\sin\varphi\,\omega^1\omega^2 + (H - A\cos\varphi)(\omega^2)^2, \tag{21.1}$$

avec $H = f(x)$, solution quelconque de (16.3), $A = \frac{f'}{X}$, et φ donné par

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{th}\frac{a(y-m)}{2}\operatorname{cotg}\frac{ax}{2}.$$

En outre

$$\omega^1 = X f'^{-\frac{1}{2}}\,dx, \qquad \omega^2 = X f'^{-\frac{1}{2}}\,dy.$$

On obtient donc apparemment, pour une solution $f(x)$ déterminée, une infinité d'immersions possibles, dépendant du paramètre m. En fait les surfaces S_m ainsi obtenues ne sont pas essentiellement distinctes; on le prouve immédiatement en remarquant que, par le changement de coordonnées curvilignes

$$x = x', \qquad y - m = y',$$

la surface S_m acquiert les mêmes formes fondamentales que S_0, à la dénomination près des coordonnées. Entre S_0 et S_m, il y a donc lieu de distinguer deux correspondances ponctuelles différentes : si l'on regarde comme homologues les points de S_0 et de S_m ayant les mêmes x et y, on réalise une application de S_0 sur S_m, avec conservation des courbures principales, application qui pourrait s'obtenir par une déformation continue de S_0; si en revanche, on regarde comme homologues le point (x, y) de S_0 et le point $(x, y-m)$ de S_m, on réalise une simple superposition de S_0 sur S_m. En d'autres termes, S_0 est susceptible d'une infinité de déformations, avec conservation des courbures principales, et elle jouit de la propriété remarquable de rester superposable à elle-même après une telle déformation.

Si dans (21.1), on suppose φ donné par

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{cth}\frac{a(y-m)}{2}\operatorname{cotg}\frac{ax}{2},$$

on a les surfaces d'espèce β. Les surfaces S'_m correspondant à un même choix de $f(x)$, sont encore toutes égales entre elles, et s'obtiennent par déformation continue de l'une d'elles, S'_0 par exemple. Mais S'_0 n'est pas superposable à S_0; S'_0 et S_0 sont isométriques, $f(x)$ étant supposé le même, mais S'_0 ne peut s'obtenir par une déformation continue de S_0.

Le cas singulier γ conduit à une forme Φ dont les coefficients, comme ceux du ds^2, ne dépendent que de la coordonnée x. La surface $\mathcal{H}$ correspondante admet donc un groupe de mouvements à un paramètre, et, puisque φ n'est

ni nul, ni égal à π, $\mathcal{H}$ est un hélicoïde. Bien qu'isométrique à S_0 et de S'_0, pour une même solution $f(x)$, cet hélicoïde ne peut s'appliquer sur aucune d'elles par une déformation continue avec conservation des courbures principales.

Des considérations analogues s'appliquent au cas singulier δ. On a encore un hélicoïde $\mathcal{H}'$. Pour un même $f(x)$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ ne sont pas superposables. En effet leurs formes asymptotiques respectives sont

$$\Phi = \frac{X^2}{f'}\left[(H - A\cos ax)\,dx^2 + 2A\sin ax\,dx\,dy + (H + A\cos ax)\,dy^2\right],$$

$$\Phi' = \frac{X^2}{f'}\left[(H - A\cos ax)\,dx^2 - 2A\sin ax\,dx\,dy + (H + A\cos ax)\,dy^2\right].$$

On réalise, à la dénomination près des coordonnées, l'identification, en posant, dans Φ',

$$x = x', \qquad y = -y',$$

mais, quand on effectue ce changement de variables, Φ' ne doit pas être simplement transformé par invariance, du fait que le jacobien de cette transformation est négatif : il faut, concomitamment, changer le signe de Φ', si bien que l'expression finale de Φ' est $-\Phi$: cela prouve que $\mathcal{H}'$ est superposable à un hélicoïde qui serait symétrique de $\mathcal{H}$ par rapport à un plan.

En résumé, dans le type **A**, à chaque solution $f(x)$ de (16.3) et à chaque choix de la constante a correspondent quatre surfaces distinctes, dont deux hélicoïdes symétriques; ces quatre surfaces forment la *famille* relative à la solution $f(x)$ et au choix de a.

Il en va plus simplement dans le type **B** : à chaque solution $f(x)$ de (16.3) et à chaque choix de a, ne correspond qu'une immersion du ds^2 : toutes les surfaces correspondantes sont superposables.

Dans le type **C**, à chaque solution $f(x)$ correspondent deux surfaces distinctes, constituant à elles deux une famille. L'une d'elles est déformable à la Bonnet, et reste superposable à elle-même après une telle déformation. L'autre admet un groupe de mouvements à un paramètre, et c'est une surface de révolution, car ses lignes d'égale courbure moyenne sont lignes de courbure.

ÉTUDE AU VOISINAGE DE LA FRONTIÈRE

DES

FONCTIONS SURHARMONIQUES POSITIVES

DANS UN DEMI-ESPACE (1)

PAR Mme JACQUELINE LELONG-FERRAND.

I. — Généralités.

1. Soit $u(M)$ une fonction surharmonique positive dans un domaine D de l'espace R^p à $p \geq 2$ dimensions. Nous nous proposons d'étudier le comportement de $u(M)$ au voisinage de la frontière de D.

D'après le théorème de décomposition de Riesz, $u(M)$ peut être considérée comme la somme d'une fonction harmonique positive $H(M)$ et d'un potentiel de masse positive par rapport à la fonction de Green de D. Soit

$$U^\mu(M) = \int g(M, P)\, d\mu(P). \tag{1}$$

Il est naturel d'appliquer à $U^\mu(M)$ les méthodes de la théorie du potentiel. Mais il est plus curieux de constater que ces mêmes méthodes s'appliquent aussi à $H(M)$, en considérant cette fonction comme un potentiel de double couche étendue à la frontière de D. On sait qu'une telle représentation est possible lorsque le domaine D est limité par des surfaces suffisamment régulières (à courbure bornée par exemple). Le cas général n'a pas été complètement élucidé et nous ne l'aborderons pas ici (2). Dans le cas où D est la boule S $[OM < 1]$ de R^p, la formule est classique et connue sous le nom d'intégrale de

(1) Les résultats de ce Mémoire ont été exposés dans trois Notes aux *C. R. Ac. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1161-1333-1500.

(2) *Voir* à ce sujet le Mémoire de R. S. MARTIN; *Minimal positive harmonic functions* (*Trans. Ann. Math. Soc.*, t. 49, 1941, p. 137-172).

Poisson-Stieltjès, soit

$$H(M)=\int_{\Sigma}\frac{\partial g}{\partial n}(M, P)\,d\psi(P)=\int_{\Sigma}\frac{1-OM^2}{MP^p}\,d\psi(P),$$

$g(M, P)$ désignant la fonction de Green de S, et $\psi(P)$ une répartition de masse positive sur la surface Σ de S.

Mais nous préférons, à cause de la simplicité des calculs et des applications (en particulier pour le problème de Phragmen et Lindelöf), étudier directement le cas où D est le demi-espace $(x>0)$ de R^p, limité par l'hyperplan $\pi(x=0)$. La formule de représentation est moins classique et plus délicate du fait que D est non borné. Nous l'avons établie dans un article antérieur (1) et nous rappelons ici seulement le résultat :

Toute fonction harmonique positive dans le demi-espace D *peut être représentée sous la forme*

$$H(M)=cx+\int_{\pi}\frac{\partial g}{\partial n}(M, P)\,d\mu(P)=cx+\int_{\pi}\frac{x\,d\mu(P)}{MP^p}, \tag{2}$$

$g(M, P)$ désigne la fonction de Green de D, μ une répartition de masse positive dans π et c une constante positive, qui peut s'interpréter comme étant la masse μ localisée à l'infini.

Notre étude sera fondée sur les formules (1) et (2) et sur des inégalités simples vérifiées par la fonction de Green. La méthode s'appliquerait, sans grande modification, à un domaine D limité par un nombre fini de surfaces à courbure bornée. En particulier, la transformation de Kelvin nous donnera immédiatement les résultats relatifs à une boule. Mais l'extension à un domaine général semble assez difficile, excepté le cas $p=2$ qui peut se traiter par représentation conforme. Il faudrait en effet avoir des connaissances plus précises que celles que nous possédons sur le comportement de la fonction de Green au voisinage de la frontière. C'est sans doute dans la voie ouverte par R. S. Martin (Mémoire cité) qu'il faudrait chercher la solution.

2. Nous rappellerons tout d'abord quelques notions générales relatives aux potentiels.

Soit D un domaine, $g(M, P)$ la fonction de Green de D, $\mu(P)$ une répartition de masse dans D (dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que des répartitions de masse positive). Nous appelons potentiel de Green de la répartition μ, la fonction

$$U^{\mu}(M)=\int g(M, P)\,d\mu(P).$$

(1) J. Lelong, *Bull. des Sc. Math.*, t. 73, 1949, p. 1-12.

On peut refaire, avec les potentiels de Green, toute la théorie classique du potentiel, telle qu'elle est exposée par exemple dans le Mémoire de H. Cartan (¹).

L'énergie de la distribution μ étant l'intégrale

$$\int U^{\mu}(P)\, d\mu(P),$$

nous désignerons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des distributions d'énergie finie dans D, par $\mathcal{M}$ l'ensemble des distributions μ telles que $U^{\mu} \not\equiv \infty$, par $\mathcal{L}$ l'ensemble des distributions λ telles que $\int U^{\mu}\, d\lambda < \infty$ pour toute distribution μ de $\mathcal{M}$. On a évidemment $\mathcal{M} \supset \mathcal{E} \supset \mathcal{L}$.

Un ensemble E de D étant donné, nous désignerons par $\mathcal{E}'_E$ (resp. $\mathcal{M}_E$) l'adhérence forte (resp. fine) des distributions de $\mathcal{E}$ portées par E; par $\mathcal{E}'_E$ (resp. $\mathcal{M}'_E$) l'intersection des $\mathcal{E}'_A$ (resp. $\mathcal{M}'_A$) relatifs aux ensembles ouverts A contenant E.

Pour un ensemble E strictement intérieur à D, on peut définir une capacité intérieure et une capacité extérieure, que nous appellerons capacités de Green; et pour un tel ensemble les capacités de Green sont dans un rapport borné avec les capacités ordinaires. En effet, si Δ est un domaine intérieur à D et contenant E, et si $h(M, P)$ désigne la fonction harmonique fondamentale dans R^p, il existe un nombre $\alpha > 1$ tel que, quels que soient M et P dans Δ, on ait

$$g(M, P) < h(M, P) < \alpha g(M, P).$$

On en déduit, si C est la capacité de Green et C' la capacité ordinaire : $C' < C < \alpha C'$. Donc la notion de capacité nulle est la même, qu'il s'agisse de potentiels de Green ou de potentiels ordinaires.

Mais si l'ensemble E s'accumule sur la frontière de D, il n'existe pas toujours une distribution capacitaire pour la fonction de Green, relative à E; et même si cette distribution existe, elle n'est pas nécessairement d'énergie finie. Nous étudierons les distributions capacitaires à la fin de ce Mémoire; et nous donnerons, dans le cas où D est le demi-espace ($x > 0$), la condition pour que ces distributions existent.

Mais ce n'est pas la notion de capacité qui s'est révélée constructive dans l'étude que nous allons faire. Et nous allons introduire d'autres notions.

3. Nous supposerons désormais que le domaine D considéré est le demi-espace $x > 0$ de R^p, limité par l'hyperplan π. Nous désignerons par $h(M, P)$ la fonction harmonique fondamentale dans R^p $\left[h(M, P) = \log \frac{1}{MP}$ pour $p = 2$, $h(M, P) = \frac{1}{MP^{p-2}}$ pour $p > 2\right]$, par Q le symétrique de P par rapport à π, par x

(¹) H. Cartan, *Théorie générale du balayage en potentiel Newtonien* (*Annales de l'Université de Grenoble*, t. 22, 1946, p. 225).

l'abscisse de M et par ξ celle de P. La fonction de Green de D est alors

$$g(M, P) = h(M, P) - h(M, Q).$$

Or on a

$$MQ^2 - MP^2 = 4x\xi,$$

et l'on en déduit les inégalités

$$l_p \frac{x\xi}{MQ^p} \leq g(M, P) \leq l_p \frac{x\xi}{MP^p}$$

en posant

$$l_p = 2(p-2) \quad \text{pour} \quad p \geq 2,$$
$$l_p = 2 \quad \text{pour} \quad p = 2.$$

Un potentiel U^μ de masse positive satisfait donc à la double inégalité

$$(3) \qquad x l_p \int \frac{\xi\, d\mu(P)}{MQ^p} \leq U^\mu(M) \leq x l_p \int \frac{\xi\, d\mu(P)}{MP^p}.$$

Une condition nécessaire pour que $U^\mu(M) \not\equiv \infty$ est donc que, quel que soit le point A extérieur à D, on ait

$$\int \frac{\xi\, d\mu(P)}{AP^p} < \infty.$$

Cette condition est équivalente à

$$(4) \qquad \int_{OP \leq R} \frac{\xi\, d\mu(P)}{R^p} + \int_{OP > R} \frac{\xi\, d\mu(P)}{OP^p} < \infty.$$

Nous allons voir qu'elle est suffisante.

Considérons dans ce but la fonction

$$u(M) = x \quad \text{pour} \quad OM \leq R,$$
$$u(M) = x \frac{R^p}{OM^p} \quad \text{pour} \quad OM \geq R.$$

Cette fonction est continue et bornée dans D, nulle dans π, harmonique pour $OM < R$ et pour $OM > R$. Sa dérivée normale à la surface $\Sigma_R (OM = R, x > 0)$ de la demi-boule S_R $(OM < R, x > 0)$ subit une discontinuité égale à $-p\frac{x}{R}$ lorsqu'on sort de S_R. On peut donc considérer $u(M)$ comme un potentiel de Green, correspondant à la répartition de masse sur Σ_R

$$d\nu_R(P) = \frac{2p}{l_p k_p} \frac{\xi}{R} d\sigma_P = \frac{2}{l_p h_p} \frac{\xi}{R} d\sigma_P,$$

en désignant par ξ l'abscisse de P, par k_p l'aire $p-1$ dimensionnelle de la

sphère unité dans R^p et par h_p son volume

$$\left[k_p = p h_p = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\frac{p}{2}} \right],$$

$d\sigma_P$ est l'élément d'aire de S_R, l_p le coefficient déjà défini. La masse totale ainsi répartie sur Σ_R est

$$\lambda_R = \frac{2}{R h_p l_p} \int_{\Sigma_R} \xi \, d\sigma_P = R^{p-1} \frac{2 h_{p-1}}{l_p h_p}.$$

L'énergie de cette répartition est

$$\gamma_R = \frac{2}{R h_p l_p} \int_{\Sigma_R} \xi^2 \, d\sigma_P = \frac{R^p}{l_p}.$$

Soit alors μ une répartition telle que $U^\mu \not\equiv \infty$. On aura

$$\int U^\mu \, d\lambda_R = \int U^{\lambda_R} \, d\mu = \int_{OP \leq R} \xi \, d\mu(P) + \int_{OP > R} \frac{\xi R^p}{OP^p} \, d\mu(P),$$

et nous avons vu que si $U^\mu \not\equiv \infty$, le dernier membre de cette égalité est borné.

Réciproquement, si la quantité

$$\int_{OP \leq R} \xi \, d\mu(P) + \int_{OP > R} \frac{\xi R^p}{OP^p} \, d\mu(P)$$

est finie, on en déduit $\int U^\mu \, d\lambda_R < \infty$, donc $U^\mu \not\equiv \infty$. On exprime ce fait en disant que la distribution λ_R appartient à la classe $\mathcal{L}$.

1. *Notion de distribution fondamentale.* — Soit E un ensemble contenu dans la demi-boule $S_R (OM < R, x > 0)$. Le potentiel U^{λ_R} défini précédemment est égal à x en tout point M de E. D'après la théorie du balayage, on peut donc déterminer une distribution λ_e de $\mathcal{E}_E'$ telle que $U^{\lambda_e} = \xi$ en tout point P de E, excepté au plus sur un ensemble de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}_E'$. Cette distribution, portée par l'adhérence de E, sera appelée *distribution fondamentale extérieure* (ou plus brièvement distribution fondamentale) relative à E. L'énergie de cette distribution $\gamma_e = \int \xi \, d\lambda_e(P)$ sera dite *puissance extérieure* de E, et la masse totale ainsi répartie λ_e sera dite *charge extérieure de* E.

On montrerait de même qu'il existe une distribution λ_i de $\mathcal{E}_E'$ (distribution fondamentale intérieure) telle que $U^{\lambda_i} = \xi$ en tout point P de E excepté au plus pour un ensemble de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}_E'$. On définirait ainsi la puissance intérieure $\gamma_i = \int \xi \, d\lambda_i(P)$ et la charge intérieure λ_i de l'ensemble E.

On a évidemment

$$\gamma_i \leq \gamma_e \leq \gamma_R = \frac{R_p}{l_p},$$

$$\lambda_i \leq \lambda_e \leq \lambda_R = 2R^{p-1}\frac{h_{p-1}}{l_p h_p}.$$

Les quantités γ_e et γ_i ne sont autres que les λ_R-capacités de l'ensemble E (¹).

La puissance et la charge d'un ensemble borné sont donc finies. Il n'en serait pas de même pour un ensemble non borné. Et nous verrons (§ 13) à quelle condition doit satisfaire un tel ensemble pour être susceptible d'une distribution fondamentale.

II. — Étude d'un ensemble au voisinage de la frontière.

A. — Notion d'effilement.

5. Pour préciser le degré de raréfaction d'un ensemble E au voisinage d'un point frontière, nous aurons besoin de notions voisines de celle qui a été introduite par M. Brelot (²) sous le nom d'effilement. Nous aurons toujours deux cas à distinguer, selon que le point frontière considéré est à distance finie, auquel cas nous pouvons le supposer à l'origine, ou à l'infini.

Dans le premier cas, nous désignerons par I_n l'intersphère $s^{n+1} < OM \leq s^n$, s étant une constante inférieure à 1 ; dans le deuxième cas, nous désignerons par I_n l'intersphère $s^{n+1} > OM \geq s^n$, s étant une constante supérieure à 1.

Dans les deux cas, nous désignerons par E_n la trace de E sur I_n, par γ_n la puissance extérieure de E_n, et nous dirons que l'*ensemble* E *est effilé à l'origine* (*respectivement à l'infini*) *relativement à* D *si la série* $\sum \frac{\gamma_n}{s^{np}}$ *est convergente.*

Il faut remarquer tout d'abord que la notion que nous venons de définir est indépendante de la valeur de la constante s. On peut en effet exprimer la condition d'effilement sous une forme intégrale, ne faisant plus intervenir s, mais moins commode pour les calculs.

Désignons par $\gamma(r)$ la puissance extérieure de la trace de E sur la boule $B_r(OM \leq r)$. On a évidemment, pour $s < 1$,

$$\gamma_n \leq \gamma(s^n) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i,$$

et l'on voit facilement que la condition d'effilement à l'origine est équivalente à la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\gamma(r)\,dr}{r^{p-}}$.

(¹) *Voir* Cartan, *loc. cit.*, p. 251.

(²) M. Brelot, *Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel* (*Journ. de Math.*, t. 19, 1940, p. 319).

On verrait de même que la condition d'effilement à l'infini est équivalente à la convergence de $\int_1^\infty \frac{\gamma(r)\,dr}{r^{p+1}}$.

6. La forme même des conditions données au paragraphe 5 rappelle beaucoup le critère de Wiener. Il est donc intéressant de comparer la notion d'effilement que nous venons de définir à l'effilement ordinaire.

Au cours de la comparaison, nous nous appuierons sur le lemme suivant, facile à démontrer :

LEMME. — *Si deux distributions de masse positive* λ λ' *de* $\mathcal{E}'_E$ *satisfont à* $U^{\lambda'} \leq k U^{\lambda}$ [$k = const.$], *les masses totales ainsi réparties,* λ, λ', *et les énergies* γ γ' *de ces répartitions satisfont à*

$$\lambda' \leq k\lambda. \qquad \gamma' \leq k^2\gamma.$$

Soit alors E un ensemble contenu dans le cône $C_k\left(\frac{OM}{x} \leq k\right)$. Posons $E_n = E \cap I_n$, I_n étant l'intersphère $s^{n+1} < OM \leq s^n$. L'abscisse x d'un point M de l'adhérence de E_n restant comprise entre $\frac{s^{n+1}}{k}$ et s^n, il en résulte que la puissance extérieure γ_n de E_n et sa capacité extérieure de Green C_n satisfont à l'inégalité

$$\frac{s^{2n+2}}{k^2} C_n \leq \gamma_n \leq s^{2n} C_n.$$

Donc la condition d'effilement à l'origine, relativement à D, équivaut à la convergence de la série $\sum \frac{C_n}{s^{n(p-2)}}$. Il reste à comparer C_n à la capacité ordinaire extérieure de E_n, soit C'_n.

Or si les points M et P sont contenus dans le secteur conique $I_n \cap C_k$ et si Q désigne le symétrique de P par rapport à π, le rapport $\frac{MQ}{MP}$ reste supérieur à un nombre de la forme $1 + \alpha$ (α positif ne dépend que de s et k). On en déduit pour $p > 2$

$$h(M, P) > g(M, P) > [1 - (1 + \alpha)^{2-p}] h(M, P),$$

inégalité de la forme

$$h(M, P) > g(M, P) > \beta h(M, P).$$

On démontrerait une inégalité analogue pour $p = 2$. On en déduit facilement que les capacités C_n et C'_n satisfont à $C_n > C'_n > \beta C_n$.

La convergence de la série $\sum \frac{C_n}{s^{n(p-2)}}$ équivaut donc à celle de la série $\sum \frac{C'_n}{s^{n(p-2)}}$.

En comparant ce résultat au critère de Wiener, on obtient l'énoncé suivant :

Pour un ensemble E *contenu dans un cône d'approximation* $C_k\left(\frac{OM}{x} < k\right)$

l'effilement à l'origine, relatif à D, *est équivalent à l'effilement ordinaire pour* $p > 2$.

Pour un ensemble E quelconque, et pour $p > 2$, l'effilement ordinaire entraîne l'autre.

Pour $p = 2$ les deux notions d'effilement ne sont pas directement comparables.

7. Nous allons montrer qu'*une inversion de pôle* O *transforme un ensemble effilé à l'origine* (*relativement à* D) *en un ensemble effilé à l'infini*. Cela nous dispensera d'étudier spécialement les ensembles effilés à l'infini.

Soit E un ensemble effilé à l'infini; désignons toujours par E_n la trace de E sur l'intersphère I_n ($s^{n+1} > OM \geq s^n$), par γ_n la puissance extérieure de E_n; soit enfin E'_n l'inverse de E_n dans l'inversion de pôle O et de puissance 1, γ'_n sa puissance extérieure. Si x désigne l'abscisse d'un point de I_n, et x' celle de son inverse, on a

$$s^{2n} \leq \frac{x}{x'} \leq s^{2n-2}.$$

D'autre part, si M et P désignent deux points de I_n, M′ et P′ leurs inverses, on a

$$s^{2n} \leq \frac{MP}{M'P'} \leq s^{2n+2} \qquad \text{d'où} \qquad s^{2n(2-p)} \geq \frac{g(M.P)}{g(M',P')} \geq s^{2n+2)(2-p)}.$$

On en déduit facilement que les puissances γ_n et γ'_n satisfont à la double inégalité

$$s^{2np} \leq \frac{\gamma_n}{\gamma'_n} \leq s^{2n+2p}.$$

Donc la convergence de la série $\sum \frac{\gamma_n}{s^{np}}$ est équivalente à celle de la série $\sum \gamma'_n s^{np}$. Et si l'on remarque que E'_n est la trace de l'inverse E′ de E, sur l'intersphère I'_n [$s^{-n} \geq OM > s^{-(n+1)}$], cette condition entraîne l'effilement de E′ à l'origine. C. Q. F. D.

8. Pour terminer ces généralités, nous allons montrer qu'on peut étendre aux ensembles effilés relativement à D une propriété démontrée par M. J. Deny pour les ensembles effilés ordinaires.

Théorème. — *Si l'ensemble* E *est effilé en* O (*resp. à l'infini*) *relativement à* D, *les rayons issus de* O *dont l'intersection avec* E *admet* O (*resp. l'infini*) *pour point limite, découpent sur la sphère de centre* O *et de rayon* 1, *un ensemble de capacité extérieure nulle dans* R^p.

Remarquons d'abord, puisque l'inverse d'un ensemble effilé à l'infini est un ensemble effilé à l'origine, qu'il suffit de faire la démonstration pour un

ensemble effilé en O. Ensuite, comme l'ensemble E peut être considéré comme la limite de la suite croissante $E^{(m)} = E \cap C_m$, où C_n est le cône $\frac{OM}{x} < n$, et que la limite d'une suite croissante d'ensembles de capacité extérieure nulle est encore de capacité extérieure nulle, il suffit de démontrer la propriété pour un ensemble E contenu dans un cône fixe C_k. Mais alors, d'après le paragraphe 6, pour $p > 2$, la propriété découle immédiatement de celle démontrée par M. J. Deny. Nous sommes cependant obligés de refaire la démonstration pour $p = 2$.

Soit donc l'ensemble E, effilé en O relativement à D, et contenu dans le cône $C_k\left(\frac{OM}{x} < k\right)$. Désignons par I_n la couronne $s^{n-1} < OM \leq s^n$, par ω_n la projection, à partir de O, sur le cercle $OM = 1$, de l'ensemble $E_n = E \cap I_n$. L'ensemble Ω découpé sur la sphère unité par les rayons issus de O et dont l'intersection avec E admet O pour point limite, apparaît comme l'ensemble des points communs à une infinité d'ensembles ω_n. Donc si Ω était de capacité extérieure positive, et si A désignait cette capacité, quel que soit le nombre n aussi grand que l'on veut, on pourrait trouver un nombre $n' > n$ tel que la capacité de l'ensemble $\omega_{n-1} + \omega_{n+2} + \ldots + \omega_{n'}$ soit au moins égale à $A - \varepsilon$. Si A_n désigne la capacité extérieure ordinaire de ω_n, on aurait

$$A_{n+1} + A_{n+2} + \ldots + A_{n'} \geq A - \varepsilon.$$

et la série ΣA_n ne pourrait être convergente.

Or la capacité de Green est au moins égale à la capacité ordinaire. Donc si B_n désigne la capacité de Green de ω_n, la série ΣB_n serait aussi divergente. Il reste à comparer B_n à la capacité de Green G_n de E_n. Or si M et P sont deux points de E_n, M′ et P′ leurs projections sur le cercle unité, on vérifie facilement l'inégalité

$$g(M', P') \geq g(M, P)$$

et l'on en déduit $B_n \leq G_n$.

Donc la divergence de la série ΣB_n entraîne celle de la série ΣG_n, et l'ensemble E ne serait pas effilé en O.

Définition. — *Nous dirons, pour abréger, qu'un ensemble de rayons issus de l'origine est un ensemble* J *s'il découpe sur la sphère de centre* O *et de rayon* 1 *un ensemble de capacité extérieure nulle dans* R''.

B. — Ensembles semi-effilés et raréfiés.

9. Définition. — *Nous dirons que l'ensemble* E *est semi-effilé à l'origine (resp. à l'infini) si, avec les notations du paragraphe* 5, *la quantité* $\frac{\nu}{s^n}$, *tend vers zéro.*

Propriétés. — *a.* La condition de semi-effilement est indépendante de la valeur de la constante s choisie. On peut en effet mettre cette condition sous une forme indépendante de s : si $\gamma(r)$ désigne la puissance extérieure de la trace de E sur la boule $B_r(OM \leq r)$, l'ensemble E est semi-effilé à l'origine (resp. à l'infini) si la quantité $\frac{\gamma(r)}{r^{\rho}}$ tend vers zéro lorsque r tend vers zéro (resp. lorsque r tend vers l'infini).

b. L'inverse d'un ensemble semi-effilé à l'origine est semi-effilé à l'infini, et réciproquement.

c. Si E est semi-effilé en O, l'ensemble des rayons issus de O sur lesquels il existe une suite M_n de points de E telle que le rapport $\frac{OM_n}{OM_{n+1}}$ soit borné, est un ensemble J de rayons.

Les propriétés *a*, *b*, *c* se démontrent comme les propriétés analogues des ensembles effilés. Remarquons en passant qu'un ensemble effilé est, *a fortiori*, semi-effilé.

10. Définition. — *Nous dirons qu'un ensemble* E *contenu dans* D *est raréfié extérieurement* (*resp. intérieurement*) *à l'origine si la charge extérieure* (*resp. intérieure*) λ_n *de* E_n *est telle que* $\frac{\lambda_n}{s^{n(\rho-1)}}$ *tende vers zéro* (notations du § 5).

On définirait de même la raréfaction à l'infini.

Un ensemble raréfié extérieurement est aussi semi-effilé. Mais il existe des ensembles semi-effilés qui ne sont pas raréfiés extérieurement : par exemple la portion de D comprise entre l'hyperplan π $(x = 0)$ et un hyperplan π' quelconque parallèle à π. Cet ensemble est semi-effilé à l'infini, mais non raréfié.

La condition de raréfaction peut aussi se mettre sous une forme indépendante de s : en désignant par $\lambda(r)$ la charge de l'ensemble E_r, trace de E sur la boule B_r $(OM \leq r)$, l'ensemble E est raréfié à l'origine (resp. à l'infini) si $\frac{\lambda(r)}{r^{\rho-1}}$ tend vers zéro lorsque r tend vers zéro (resp. lorsque r tend vers l'infini).

III. — Étude du rapport $\frac{u}{x}$.

A. — Étude du potentiel de Green.

11. Soit tout d'abord

$$U^{\mu}(M) = \int_D g(M, P)\, d\mu(P),$$

le potentiel de Green dû à la répartition μ dans le demi-espace $D(x > 0)$.

Étudions le rapport $\frac{U^{\mu}(M)}{x}$ au voisinage de l'infini. Posons

$$\int_{OP<1} \xi\, d\mu(P) = k, \qquad \int_{OP\geq s^n} \frac{\xi\, d\mu(P)}{OP^p} = c_n \qquad (s>1).$$

Puisque $U^{\mu} \not\equiv \infty$, l'intégrale $\int_{OP>1} \frac{\xi\, d\mu(P)}{OP^p}$ est convergente, et c_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Supposons le point M dans l'intersphère I_n ($s^n \leq OM < s^{n+1}$) et décomposons $U^{\mu}(M)$ en la somme des potentiels

$$U_0(M) + U_1(M) + U_2(M) + U_3(M),$$

$U_0(M)$ étant le potentiel des masses contenues dans $OP < 1$, $U_1(M)$ le potentiel des masses contenues dans l'intersphère $1 \leq OP < s^{n-1}$, $U_2(M)$ le potentiel des masses contenues dans l'intersphère $J_n(s^{n-1} \leq OP < s^{n+2})$ et $U_3(M)$ le potentiel des masses contenues dans $OP \geq s^{n+2}$.

On aura successivement, en tenant compte des inégalités (3),

$$\frac{U_0(M)}{x^{l_p}} \leq \int_{OP<1} \frac{\xi\, d\mu(P)}{MP^p} \leq \int_{OP<1} \frac{\xi\, d\mu(P)}{(OM-OP)^p} \leq \frac{k}{(s^n-1)^p},$$

$$\frac{U_1(M)}{x^{l_p}} \leq \int_{1\leq OP<s^{n-1}} \frac{\xi\, d\mu(P)}{(OM-OP)^p} \leq c_0(s-1)^{-p},$$

$$\frac{U_3(M)}{x^{l_p}} \leq \int_{OP\geq s^{n+2}} \frac{\xi\, d\mu(P)}{(OP-OM)^p} \leq c_{n+2}\left(1-\frac{1}{s}\right)^{-p},$$

ε étant donné, on peut déterminer s assez grand pour que

$$c_0(s-1)^{-p} < \frac{\varepsilon}{6^{l_p}},$$

puis n assez grand pour que

$$c_{n+2}\left(1-\frac{1}{s}\right)^{-p} < \frac{\varepsilon}{6^{l_p}} \qquad \text{et} \qquad \frac{k}{(s^n-1)^p} < \frac{\varepsilon}{6^{l_p}}.$$

On aura alors

$$\frac{U_0(M)+U_1(M)+U_3(M)}{x} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit E_{ε} l'ensemble défini par $\frac{U^{\mu}(M)}{x} \geq \varepsilon$. Posons

$$E_n = E_{\varepsilon} \cap I_n.$$

En tout point M de E_n, on aura

$$U_2(M) > \frac{\varepsilon}{2} x.$$

Soit λ_n la répartition fondamentale relative à E_n, et γ_n la puissance extérieure de E_n. On aura

$$\int U_\varepsilon(M)\, d\lambda_n(M) > \frac{\varepsilon}{2}\int x\, d\lambda_n = \frac{\varepsilon}{2}\gamma_n.$$

Mais

$$\int U_\varepsilon(M)\, d\lambda_n(M) = \int_{J_n} U^{\nu_n}\, d\mu \leq \int_{J_n} \xi\, d\mu(P) = \mu_{n-1} + \mu_n + \mu_{n+1},$$

en posant

$$\mu_n = \int_{I_n} \xi\, d\mu(P).$$

Or la convergence de l'intégrale $\int_{P0^{-1}} \frac{\xi\, d\mu(P)}{OP^\rho}$ entraîne celle de la série $\sum \frac{\mu_n}{s^{n\rho}}$, et puisque $\gamma_n < \frac{2}{\varepsilon}(\mu_{n-1} + \mu_n + \mu_{n+1})$ elle entraîne aussi celle de la série $\sum \frac{\gamma_n}{s^{n\rho}}$. L'ensemble E_ε est donc effilé à l'infini.

Théorème 1*a*. — *Quel que soit* $\varepsilon > 0$ *l'ensemble des points de* D *où l'on a* $U^\mu(M) \geq \varepsilon x$, *est effilé à l'infini relativement à* D.

On en déduit que $\frac{U^\mu(M)}{x}$ tend vers zéro lorsque M tend vers l'infini radialement, excepté au plus pour un ensemble J de rayons.

12. Étudions maintenant le comportement de $\frac{U^\mu(M)}{x}$ à l'origine. Posons

$$\gamma = \liminf_{M \to 0} \frac{U^\mu(M)}{x}.$$

Si $\gamma = +\infty$, $\frac{U^\mu(M)}{x} \to +\infty$ lorsque M tend vers O.

Si $\gamma < \infty$, appliquons la première des inégalités (3)

$$\frac{U^\mu(M)}{x l_\rho} \geq \int \frac{\xi\, d\mu(P)}{MQ^\rho} \geq \int \frac{\xi\, d\mu(P)}{(OM + OP)^\rho}.$$

Si M tend vers O on en déduit facilement que l'intégrale $A = \int \frac{\xi\, d\mu(P)}{OP^\rho}$ est convergente et bornée par $\frac{\gamma}{l_\rho}$. Nous allons montrer que $A = \frac{\gamma}{l_\rho}$. A cet effet considérons la répartition fondamentale λ_R sur la demi-sphère $\Sigma_R(OP = R,\ \xi > 0)$, soit

$$d\lambda_R(P) = \frac{2\xi\, d\sigma(P)}{R h_\rho l_\rho} \qquad (\textit{voir}\ \S 3),$$

$$\int U^{\nu_R}\, d\mu(P) = \int_{OP < R} \xi\, d\mu(P) + \int_{OP > R} \frac{R^\rho\, d\mu(P)}{OP^\rho},$$

on a donc

$$\int U^{\mu_R}\, d\mu(P) < \int \xi \frac{R^p\, d\mu(P)}{OP^p} = AR^p,$$

or

$$\int U^{\mu_R}\, d\mu(P) = \int U^{\mu}\, d\nu_R \qquad \text{et} \qquad \int \xi\, d\nu_R = \frac{R^p}{l_p}.$$

Il existe donc au moins un point P de Σ_R où l'on a

$$\frac{U^{\mu}(P)}{\xi} \leq A\, l_p.$$

donc $\gamma \leq A l_p$ et finalement $\gamma = A l_p$. C. Q. F. D.

Désignons alors par E_ε l'ensemble des points de D, où l'on a

$$\frac{U^{\mu}(M)}{x} \geq \gamma + \varepsilon.$$

Supposons M dans l'intersphère $I_n[s^{n-1} < OM \leq s^n\ (s < 1)]$ et décomposons $U^{\mu}(M)$ en $U_1(M) + U_2(M) + U_3(M)$, $U_1(M)$ étant le potentiel des masses contenues dans $OP > s^{n-1}$, $U_2(M)$ le potentiel des masses contenues dans l'intersphère $J_n(s^{n-2} < OP \leq s^{n-1})$ et $U_3(M)$ le potentiel des masses contenues dans $OP \leq s^{n-2}$. On aura, d'après la deuxième inégalité (3)

$$\frac{U_1(M)}{x l_p} \leq \int_{OP > s^{n-1}} \frac{\xi\, d\mu(P)}{(OP - OM)^p} < (1-s)^{-p} A_n,$$

$$\frac{U_2(M)}{x l_p} \leq \int_{OP > s^{n-2}} \frac{\xi\, d\mu(P)}{(OM - OP)^p} < \left(\frac{1}{s} - 1\right)^{-p} A_{n-2},$$

en posant

$$A_n = \int_{OP > s^n} \frac{\xi\, d\mu(P)}{OP^p}.$$

On peut déterminer s assez petit pour que

$$A l_p (1-s)^{-p} < A l_p + \frac{\varepsilon}{4},$$

puis n assez grand pour que

$$A_{n-2} l_p \left(\frac{1}{s} - 1\right)^{-p} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

On aura alors

$$\frac{U_1(M) + U_2(M)}{x} < \gamma + \frac{\varepsilon}{2},$$

donc en tout point M de $E_n = E_\varepsilon \cap I_n$

$$U_3(M) > \frac{\varepsilon x}{2}.$$

Soit λ la répartition fondamentale relative à E_n, γ_n la puissance extérieure de E_n. Posons

$$\int_{I_n} \xi \, d\mu(P) = \mu_n.$$

On aura

$$\int U_2(M)\, d\lambda(M) > \frac{\varepsilon}{2} \int x \, d\lambda(M) = \frac{\varepsilon}{2} \gamma_n,$$

or

$$\int U_2(M)\, d\lambda(M) = \int_{I_n} U^{\lambda}(P)\, d\mu(P) \leq \int_{I_n} \xi \, d\mu(P) = \mu_n + \mu_{n-1} + \mu_{n+1}.$$

Or la convergence de l'intégrale $\int \frac{\xi \, d\mu(P)}{OP^p}$ entraîne celle de la série $\sum \frac{\mu_n}{s^{np}}$ donc aussi celle de la série $\sum \frac{\gamma_n}{s^{np}}$, puisque $\gamma_n < \frac{2}{\varepsilon}(\mu_n + \mu_{n-1} + \mu_{n-1})$. On a donc le résultat suivant :

THÉORÈME $2a$. — *Si* $\liminf_{M \to 0} \frac{U^{\mu}(M)}{x} = \gamma < \infty$, *l'ensemble des points de* D, *où l'on a* $\frac{U^{\mu}(M)}{x} \geq \gamma + \varepsilon$ *est effilé à l'origine relativement à* D; *ce qui montre que* $\frac{U^{\mu}(M)}{x}$ *tend vers* γ *lorsque* M *tend vers* O *radialement, excepté pour un ensemble* J *de rayons. De plus il existe au moins un point* M *sur chaque sphère de centre* O, *tel que* $U^{\mu}(M) \leq \gamma x$.

Enfin on a

$$\gamma = l_p \int \frac{\xi \, d\mu(P)}{OP^p}.$$

13. Il est à remarquer que les deux résultats que nous venons de démontrer (théorèmes $1a$ et $2a$) ne se ramènent pas l'un à l'autre par inversion. Au contraire, la transformation de Kelvin nous donne les résultats nouveaux suivants :

THÉORÈME $3a$. — *Quel que soit* $\varepsilon > 0$, *l'ensemble des points de* D, *où l'on a*

$$U^{\mu}(M) \frac{OM^p}{x} \geq \varepsilon,$$

est effilé à l'origine relativement à D.

THÉORÈME $4a$. — *Si* $\gamma = \liminf_{M \to \infty} U^{\mu}(M) \frac{OM^p}{x} < \infty$, *alors l'ensemble des points où* $U^{\mu}(M) \frac{OM^p}{x} > \gamma + \varepsilon$ *est effilé à l'infini relativement à* D, *et il existe, sur chaque sphère de centre* O, *au moins un point* M *où l'on ait*

$$U^{\mu}(M) < \frac{\gamma x}{OM^p}.$$

Les théorèmes $1a$ et $2a$ sont aussi susceptibles de réciproques.

RÉCIPROQUE $1a$. — *Si l'ensemble* E *est effilé à l'infini, il existe une répartition* μ *de* $\mathfrak{M}_E^e$ *telle que le rapport* $\frac{U^\mu(M)}{x}$ *reste supérieur à* 1 *sur* E *ou même tende vers* $+\infty$ *lorsque* M *tend vers l'infini sur* E, *en négligeant au plus un ensemble de points de* E *de capacité extérieure nulle.*

RÉCIPROQUE $2a$. — *Si l'ensemble* E *est effilé à l'origine, il existe une répartition* μ *de* $\mathfrak{M}_E^e$ *telle que* $\liminf_{M\to 0}\frac{U^\mu(M)}{x}=\gamma<\infty$ *et que* $\frac{U^\mu(M)}{x}$ *reste supérieur à* $\gamma+1$ *sur* E *ou même tende vers* $+\infty$ *lorsque* M *tend vers* 0 *sur* E, *en négligeant au plus un ensemble de points de* E *de capacité extérieure nulle.*

Démontrons par exemple la réciproque $1a$. Supposons E effilé à l'infini. Reprenons les notations du paragraphe 5. La série $\sum \frac{\gamma_n}{s^{n\rho}}$ étant convergente, on peut trouver une suite ε_n tendant vers séro telle que la série $\sum \frac{\gamma_n}{\varepsilon_n s^{n\rho}}$ soit encore convergente.

Soit λ_n la répartition fondamentale relative à E_n. Le potentiel résultant de la somme μ de toutes les répartitions $\frac{\lambda_n}{\varepsilon_n}$ est non identique à l'infini puisque

$$\int_{OP\geq 1}\frac{d\mu(P)}{OP^\rho}<\sum_1^\infty \frac{\gamma_n}{\varepsilon_n s^{n\rho}}<\infty$$

et il répond aux conditions imposées puisque

$$U^\mu(M)>\frac{U^{\lambda_n}(M)}{\varepsilon_n}\geqq\frac{x}{\varepsilon_n}$$

en tout point M de E_n excepté au plus sur un ensemble de points de E_n de capacité extérieure nulle. C. Q. F. D.

La réciproque $2a$ se démontrerait de la même façon.

De l'existence d'une distribution μ de $\mathfrak{M}_E^e$ telle que $U^\mu(M)\geqq x$ en tout point de E, excepté un ensemble de capacité extérieure nulle, on déduit par balayage une distribution λ de $\mathfrak{S}_E^e$ telle que $U^\lambda(M)=x$ en tout point de E excepté au plus un ensemble de capacité extérieure nulle. Comme corollaire de la réciproque $1a$, on peut donc énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble* E *non borné soit susceptible d'une distribution fondamentale, c'est que* E *soit effilé à l'infini relativement à* D.

B. — Étude de $\dfrac{H(M)}{x}$.

14. Soit

$$H(M) = cx + \int_{\pi} \frac{x\, d\mu(P)}{MP^p}.$$

Pour étudier le rapport $\dfrac{H(M)}{x}$ il suffit d'étudier l'intégrale

$$f(M) = \int \frac{d\mu(P)}{MP^p}.$$

Étudions tout d'abord son comportement à l'infini. Nous poserons

$$k = \int_{OP<1} d\mu(P), \qquad c_n = \int_{OP \geq s^n} \frac{d\mu(P)}{OP^p}, \qquad \mu_n = \int_{I_n} d\mu(P).$$

Ces intégrales sont convergentes puisque $H(M) \neq \infty$. Supposons M dans l'intersphère $I_n (s^{n+1} > OM \geq s^n)$ et décomposons $f(M)$ en $f_0(M)+f_1(M)+f_2(M)+f_3(M)$ comme nous l'avons fait pour $U^\mu(M)$. On aura

$$f_0(M) = \int_{OP<1} \frac{d\mu(P)}{MP^p} < \frac{k}{(s^n-1)^p},$$

$$f_1(M) = \int_{1 \leq OP < s^{n-1}} \frac{d\mu(P)}{MP^p} < c_0 (s-1)^{-p},$$

$$f_3(M) = \int_{OP \geq s^{n+1}} \frac{d\mu(P)}{MP^p} \leq c_{n+2} \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{-p}.$$

Comme au paragraphe 11, on peut choisir s et n assez grands pour que

$$f_0(M) + f_1(M) + f_3(M) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit alors E_ε l'ensemble des points M de D où $f(M) \geq \varepsilon$; si λ_n est la répartition fondamentale relative à $E_n = E_\varepsilon \cap I_n$, et γ_n la puissance extérieure de E_n, on aura en tout point de E_n : $f_2(M) > \dfrac{\varepsilon}{2}$ donc

$$\frac{\varepsilon}{2}\gamma_n \leq \int x f_2(M)\, d\lambda_n(M) = \iint_{s^{n-2} > OP \geq s^{n-1}} \frac{x\, d\mu(P)\, d\lambda_n(M)}{MP^p} = \int_{s^{n-2} > OP \geq s^{n-1}} v(P)\, d\mu(P),$$

en posant

$$v(P) = \int \frac{x\, d\lambda_n(M)}{MP^p}.$$

Or d'après les résultats obtenus au paragraphe 12, $v(P)$ apparait comme la plus petite limite du rapport $\dfrac{U^{\lambda_n}(M)}{x^{l_p}}$ lorsque le point M de D tend vers le point fixe P de π (il suffit de prendre P pour origine et d'appliquer le théorème 2a).

Donc, puisque $U^{\lambda_n}(M) \leq x$, on a $c(P) \leq l_p^{-1}$ et l'on en déduit

$$\frac{\varepsilon}{2}\gamma_n \leq \frac{1}{l_p}(\mu_{n-1} + \mu_n + \mu_{n+1}).$$

Or la convergence de l'intégrale $\int_{OP>1} \frac{d\mu(P)}{OP^p}$ entraine celle de la série $\sum \frac{\mu_n}{s^{np}}$ donc aussi celle de la série $\sum \frac{\gamma_n}{s^{np}}$. L'ensemble E_ε est effilé à l'infini.

THÉORÈME 1*b*. — *Si la fonction* H(M) *est harmonique positive dans* D *et si c est la borne inférieure du rapport* $\frac{H(M)}{x}$, *l'ensemble des points de* D, *où l'on a* $H(M) \geq (c+\varepsilon)x$, *est effilé à l'infini quel que soit* $\varepsilon > 0$.

15. La propriété d'effilement ne suffit pas ici à caractériser l'ensemble E_ε. En effet, en nous appuyant sur le principe du maximum, nous voyons que l'ensemble E_ε est fermé relativement à D, d'un seul tenant avec π, et tel que $\Delta = D - E_\varepsilon$ soit un domaine simplement connexe. Il semble plus difficile ici d'obtenir une réciproque analogue à celle du paragraphe 13.

Pour $p = 2$ (cas du plan), il est facile de montrer qu'un ensemble E effilé à l'infini, ou même seulement semi-effilé, et d'un seul tenant avec π, ne peut contenir aucune suite tendant vers l'infini angulairement. Sinon il y aurait des valeurs de n, aussi grandes que l'on veut, pour lesquelles $E_n = E \cap I_n$ posséderait au moins un point M_n intérieur à l'angle $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ fixe); d'après les propriétés topologiques de E, E_n contiendrait aussi un continu joignant ce point soit à π, soit aux deux cercles $[OM = s^n, OM = s^{n+1}]$ et le quotient par s^{2n} de la puissance d'un tel continu ne tend pas vers zéro. E ne pourrait donc pas être semi-effilé.

Du théorème 1*b* on peut donc déduire que $\frac{H(M)}{x}$ tend vers c angulairement, au moins dans le cas $p = 2$. Mais la propriété est générale et peut être démontrée par un procédé plus élémentaire (1). Le théorème 1*b* complète donc le résultat obtenu précédemment, et le contient pour $p = 2$.

16. On étudierait de même le comportement de $\frac{H(M)}{x}$ au voisinage de l'origine.

Posons

$$\gamma_0 = \lim_{M \to 0} \inf f(M),$$

et supposons $\gamma_0 < \infty$.

Nous allons montrer que l'intégrale $A = \int \frac{d\mu(P)}{OP^p}$ est convergente et a pour valeur γ_0.

---

(1) *Voir* J. LELONG, *loc. cit.*

On a, en effet,

$$f(\mathrm{M})=\int\frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}^{\rho}}>\int_{\mathrm{OP}>k\,\mathrm{OM}}\frac{d\mu(\mathrm{P})}{(\mathrm{OP}+\mathrm{OM})^{\rho}}>\frac{k^{\rho}}{(1+k)^{\rho}}\int_{\mathrm{OP}>k\,\mathrm{OM}}\frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{OP}^{\rho}},$$

donc si M tend vers O, on voit que l'intégrale $\int\frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{OP}^{\rho}}$ est convergente, et bornée par $\gamma_0\frac{(1+k)^{\rho}}{k^{\rho}}$. Mais k étant aussi grand que l'on veut, on a $\mathrm{A}\leq\gamma_0$. D'autre part si M est sur l'axe Ox, on a $\mathrm{MP}>\mathrm{OP}$, donc

$$f(\mathrm{M})\leq\int\frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{OP}^{\rho}}=\mathrm{A},$$

et l'on en déduit $\gamma_0\leq\mathrm{A}$, donc $\gamma_0=\mathrm{A}$.

Décomposons alors $f(\mathrm{M})$ en la somme des trois intégrales

$$f_1(\mathrm{M})=\int_{\mathrm{OP}>s^{n-1}}\frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}^{\rho}},\qquad f_2(\mathrm{M})=\int_{s^{n+2}<\mathrm{OP}\leq s^{n-1}}\frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}^{\rho}},\qquad f_3(\mathrm{M})=\int_{\mathrm{OP}\leq s^{n+2}}\frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}^{\rho}},$$

et supposons M dans l'intersphère $\mathrm{I}_n\,[s^{n+1}<\mathrm{OM}\leq s^n\ (s<1)]$. On aura comme au paragraphe 12

$$f_1(\mathrm{M})<\mathrm{A}(1-s)^{-\rho},\qquad f_3(\mathrm{M})<\left(\frac{1}{s}-1\right)^{-\rho}\mathrm{A}_{n+2},$$

en posant

$$\mathrm{A}_n=\int_{\mathrm{OP}\leq s^n}\frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{OP}^{\rho}}.$$

On peut déterminer d'abord s assez petit pour que

$$\mathrm{A}(1-s)^{-\rho}<\mathrm{A}+\frac{\varepsilon}{4},$$

puis n assez grand pour que

$$\mathrm{A}_n\left(\frac{1}{s}-1\right)^{-\rho}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

On aura alors

$$f_1(\mathrm{M})+f_3(\mathrm{M})<\mathrm{A}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit E_ε l'ensemble des points de D où l'on a $f(\mathrm{M})\geq\mathrm{A}+\varepsilon$; désignons par E_n la trace de E sur I_n, par λ_n la distribution fondamentale de E_n et par γ_n l'énergie de cette distribution. On aura sur E_n : $f_2(\mathrm{M})>\frac{\varepsilon}{2}$; donc

$$\int x f_2(\mathrm{M})\,d\lambda_n>\frac{\varepsilon}{2}\gamma_n.$$

Or

$$\int x f_2(\mathrm{M})\,d\lambda_n=\iint_{s^{n+2}<\mathrm{OP}\leq s^{n-1}}\frac{x\,d\mu(\mathrm{P})\,d\lambda_n(\mathrm{M})}{\mathrm{MP}^{\rho}}=\int_{s^{n+2}<\mathrm{OP}\leq s^{n-1}}v(\mathrm{P})\,d\mu(\mathrm{P}),$$

en posant

$$v(\mathrm{P})=\int\frac{x\,d\lambda_n(\mathrm{M})}{\mathrm{MP}^{\rho}}.$$

D'après les résultats du paragraphe 12, $\varphi(P)$ est la plus petite limite du rapport $\frac{U^{\lambda_n}(M)}{x l_p}$ lorsque le point M tend vers le point P de π. On a donc $\varphi(P) \leq l_p^{-1}$ d'où

$$\frac{\varepsilon}{2}\gamma_n \leq \frac{1}{l_p}(\mu_{n-1} + \mu_n + \mu_{n+1}),$$

en posant

$$\mu_n = \int_{I_n} d\mu(P).$$

Or la convergence de l'intégrale $\int \frac{d\mu(P)}{OP^p}$ entraîne celle de la série $\sum \frac{\mu_n}{s^{np}}$, donc aussi celle de la série $\sum \frac{\gamma_n}{s^{np}}$. L'ensemble E_ε est effilé à l'origine.

En revenant à la fonction H(M), en nous rappelant que $A = \gamma_0$, et en posant $\gamma = c + \gamma_0$, nous obtenons le résultat suivant :

THÉORÈME 2*b*. — *Si* γ *est la plus petite limite de* $\frac{H(M)}{x}$ *lorsque* M *tend vers* O, *l'ensemble* E_ε *des points où* $H(M) \geq (\gamma + \varepsilon)x$ *est effilé à l'origine relativement à* D, *quel que soit* $\varepsilon > 0$.

En chaque point de Ox, *on a* $H(M) < \gamma x$.

La propriété d'effilement ne suffit pas ici à caractériser l'ensemble E_ε. On verrait, comme au paragraphe 15, que l'ensemble E_ε est connexe, et d'un seul tenant avec π, tandis que $\Delta = D - E_\varepsilon$ est un domaine simplement connexe. On verrait aussi que le théorème 2*b* contient, pour $p = 2$, un résultat antérieurement démontré, à savoir que le rapport $\frac{H(M)}{x}$ tend vers γ lorsque M tend vers l'origine angulairement. Cependant ce résultat est valable pour $p > 2$.

L'application de la transformation de Kelvin aux théorèmes 1*b* et 2*b* nous donnerait des résultats analogues à ceux qui ont été obtenus au paragraphe 13 pour les potentiels.

C. — APPLICATIONS.

17. Soit $u(M)$ une fonction surharmonique positive dans D. On peut la mettre sous la forme

$$u(M) = H(M) + U^{\mu}(M) = cx + x\int_{\pi} \frac{d\psi(P)}{MP^p} + \int_D g(M, P)\, d\mu(P),$$

c étant une constante positive, $\psi(P)$ une répartition de masse positive dans π et $\mu(P)$ une répartition de masse positive dans D. En groupant les résultats relatifs aux fonctions harmoniques et aux potentiels, nous obtenons facilement des propriétés de $u(M)$.

a. L'ensemble E_ε des points de D où l'on a $u(M) \geqq (c+\varepsilon)x$ est effilé à l'infini relativement à D. Cet ensemble est en effet contenu dans la réunion des ensembles E'_ε [défini par $H(M) \geqq \left(c+\frac{\varepsilon}{2}\right)x$] et E''_ε [défini par $U^\mu(M) \geqq \frac{\varepsilon}{2}x$]; et il est facile de voir que la réunion de deux ensembles effilés est encore un ensemble effilé. Comme on a évidemment $u(M) \geqq cx$, le nombre c est la borne inférieure du rapport $\frac{u(M)}{x}$ dans D. On peut donc énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 1 *c.* — *Si c est la borne inférieure dans* D *du rapport* $\frac{u(M)}{x}$, *l'ensemble des points de* D *où l'on a* $u(M) \geqq (c+\varepsilon)x$, *est effilé à l'infini relativement à* D.

b. Supposons

$$\liminf_{M \to 0} \frac{u(M)}{x} = \gamma < \infty.$$

Il en résulte que les quantités

$$\gamma' = \liminf_{M \to 0} \frac{H(M)}{x} \quad \text{et} \quad \gamma'' = \liminf_{M \to 0} \frac{U^\mu(M)}{x}$$

sont finies.

Donc l'ensemble E'_ε des points où $H(M) \geqq \left(\gamma'+\frac{\varepsilon}{2}\right)x$ et l'ensemble E''_ε des points où $U^\mu(M) \geqq \left(\gamma''+\frac{\varepsilon}{2}\right)x$ sont effilés à l'origine. Il en résulte que l'ensemble des points où $u(M) \geqq (\gamma'+\gamma''+\varepsilon)$ est aussi effilé à l'origine. Donc $\gamma'+\gamma'' \geqq \gamma$. D'autre part, pour $OM = r$ assez petit, on a

$$H(M) > \left(\gamma'-\frac{\varepsilon}{2}\right)x, \qquad U^\mu(M) > \left(\gamma''-\frac{\varepsilon}{2}\right)x,$$

donc $u(M) > (\gamma'+\gamma''-\varepsilon)x$ et par conséquent $\gamma'+\gamma'' \leqq \gamma$. Finalement $\gamma = \gamma'+\gamma''$.

THÉORÈME 2*c.* — *Si* $\liminf_{M \to 0} \frac{u(M)}{x} = \gamma < \infty$, *l'ensemble des points de* D *où l'on a*

$$u(M) > (\gamma+\varepsilon)x,$$

est effilé à l'origine relativement à D.

L'application de la transformation de Kelvin aux théorèmes précédents nous donne les résultats suivants :

THÉORÈME 3*c.* — *Si c est la borne inférieure du rapport* $\frac{OM'}{x}u(M)$, *l'ensemble des points de* D *où l'on a*

$$\frac{OM'}{x}u(M) \geqq c+\varepsilon$$

est effilé à l'origine relativement à D.

THÉORÈME 4 c. — *Si* $\liminf_{M \to \infty} \frac{OM^p}{x} u(M) = \gamma < \infty$, *alors l'ensemble des points de* D *où l'on a*

$$\frac{OM^p}{x} u(M) \geq \gamma + \varepsilon$$

est effilé à l'infini relativement à D.

18. Les résultats du paragraphe 17 s'appliquent encore aux fonctions $u(M)$ surharmoniques dans D, pas nécessairement positives, mais représentables sous la forme

$$u(M) = cx + x \int_{\pi} \frac{d\psi(P)}{MP^p} + \int_{D} g(M, P)\, d\mu(P), \tag{5}$$

c étant une constante de signe quelconque, ψ une répartition de masse positive dans π et μ une répartition de masse positive dans D.

Pour qu'une fonction $u(M)$ surharmonique dans D soit représentable sous cette forme, il faut et il suffit que la fonction sousharmonique $v(M) = -u(M)$ satisfasse aux hypothèses du lemme de Phragmen et Lindelöf, à savoir :

a. $\limsup_{M \to P} v(M) \leq 0$ en tout point P de π à distance finie;

b. $\liminf_{r \to \infty} \frac{m(r)}{r} = \alpha < \infty$, en désignant par $m(r)$ la borne supérieure de $v(M)$ sur la demi-sphère $\Sigma_r\,[OM = r,\ x > 0]$.

Supposons en effet d'abord que $v(M)$ satisfasse à ces hypothèses. D'après le lemme classique de Phragmen et Lindelöf, que nous avons étendu à l'espace R^p à p dimensions (1), il existe une constante j_p ne dépendant que de p, telle que l'on ait partout dans D :

$$v(M) < \alpha x j_p.$$

La fonction

$$u_1(M) = \alpha x j_p - v(M)$$

est donc surharmonique positive dans D, et peut se mettre sous la forme

$$u_1(M) = c_1 x + x \int_{\pi} \frac{d\psi(P)}{MP^p} + \int_{D} g(M, P)\, d\mu(P),$$

avec $c_1 \geq 0$. On en déduit que $u(M) = -v(M)$ est bien de la forme (5) avec $c = c_1 - \alpha j_p$.

Réciproquement soit $u(M)$ de la forme (5). D'après ce que nous avons vu au paragraphe 17, l'ensemble des points de D, où l'on a $u(M) > (c + \varepsilon)x$, est effilé à l'infini relativement à D; le nombre c, qui n'est plus ici nécessairement

(1) *Voir* J. LELONG, *loc. cit.*

positif, est encore la borne inférieure de $\frac{u(M)}{x}$. Si l'on pose

$$v(M) = -u(M),$$

on a bien en tout point P de π à distance finie

$$\limsup_{M \to P} v(M) \leq 0.$$

Posons d'autre part

$$\mu(r) = \text{borne sup}_{OM=r} \frac{v(M)}{x} = -\text{borne inf}_{OM=r} \frac{u(M)}{x}.$$

On sait que $\mu(r)$ tend vers $-c$ lorsque r tend vers l'infini. Or si $\mu(r) \leq 0$, on a $v(M) \leq 0$ pour $OM = r$, donc $m(r) \leq 0$. Si $\mu(r) > 0$, on a

$$v(M) < x\mu(r) < r\mu(r), \qquad \text{donc} \quad \frac{m(r)}{r} < \mu(r).$$

On en déduit

$$\alpha = \liminf_{r \to \infty} \frac{m(r)}{r} < c^-,$$

en posant

$$c^- = \frac{1}{2}[|c| - c].$$

C. Q. F. D.

19. Il suffit d'examiner les résultats précédents pour en déduire le théorème de M. Heins (1).

Soit $v(M)$ une fonction sousharmonique dans D et satisfaisant aux hypothèses a et b du lemme de Phragmen et Lindelöf. Posons

$$\beta = \text{borne sup} \frac{v(M)}{x}.$$

D'après ce que nous venons de voir, β est un nombre fini, et l'ensemble E_ε des points de D où l'on a $v(M) < (\beta - \varepsilon)x$ est effilé à l'infini relativement à D.

a. Supposons $\beta > 0$.

On a tout d'abord $v(M) < \beta x$, donc $\frac{m(r)}{r} < \beta$. D'autre part l'ensemble E_ε étant effilé à l'infini, ne peut contenir aucune suite infinie de calottes sphériques $S_{r_n,k}\left[OM = r_n, \frac{OM}{x} \leq k\right]$ telle que $r_n \to \infty$. Car la puissance de la calotte $S_{r,k}\left[OM = r, \frac{OM}{x} \leq k\right]$ est de l'ordre de r^ρ. Donc pour chaque valeur de r assez

(1) M. Heins, *On the Phragmen. Lindelöf principle* (*Trans. Ann. Math., Soc.*, t. 60, 1946, p. 238-244).

grande, il existe au moins un point M de $S_{r,k}$ n'appartenant pas à E_ε. En ce point M, on a $v(M) > (\beta - \varepsilon)x$, donc

$$\frac{m(r)}{r} > \frac{\beta - \varepsilon}{k} \qquad \text{et} \qquad \liminf \frac{m(r)}{r} > \frac{\beta - \varepsilon}{k}.$$

Mais comme k est aussi voisin de 1 que l'on veut, et ε arbitrairement petit, on en déduit

$$\liminf \frac{m(r)}{r} \geq \beta.$$

Et puisque $\frac{m(r)}{r} < \beta$, on voit que le rapport $\frac{m(r)}{r}$ tend vers β lorsque r tend vers l'infini.

b. Supposons $\beta \leq 0$.

On a tout d'abord $v(M) < \beta x$, donc $m(r) \leq 0$. D'autre part l'ensemble E_ε étant effilé à l'infini ne peut contenir aucune suite infinie de zones sphériques de la forme $S'_{r_n k}\left[OM = r_n, \frac{OM}{x} \geq k\right]$ dont les rayons r_n croîtraient indéfiniment; car la puissance de la zone $S'_{r,k}\left[OM = r, \frac{OM}{x} \geq k\right]$ est de l'ordre de r^p. Donc, pour chaque valeur de r assez grande, il existe au moins un point M sur chaque zone $S'_{r,k}$, où l'on a $v(M) > (\beta - \varepsilon)x$; en prenant ε assez petit pour que $\beta - \varepsilon < 0$, on a $v(M) > (\beta - \varepsilon)\frac{r}{k}$; on en déduit $\frac{m(r)}{r} > \frac{\beta - \varepsilon}{k}$ et puisque k est aussi grand que l'on veut, et ε arbitrairement petit, on a $\liminf \frac{m(r)}{r} \geq 0$, $m(r)$ étant négatif ou nul, on voit ainsi que le rapport $\frac{m(r)}{r}$ tend vers zéro.

Nous retrouvons ainsi le résultat de M. Heins : *Le rapport* $\frac{m(r)}{r}$ *tend vers* α, *et le nombre* α *ne peut être que positif ou nul.*

En fait nous avons obtenu un résultat plus précis; puisque nous avons montré que le rapport $\frac{v(M)}{x}$ avait une pseudo-limite β, telle que $\alpha = \beta^+$.

La propriété des ensembles effilés démontrée au paragraphe 8 nous permet aussi de dire que le rapport $\frac{U(M)}{x}$ a une limite radiale finie β excepté pour un ensemble de rayons découpant sur la sphère unité un ensemble de capacité extérieure nulle.

Remarquons enfin que, sous les hypothèses du lemme de Phragmen et Lindelöf, on a l'inégalité $v(M) \leq \alpha x$, meilleure que l'inégalité démontrée primitivement.

20. Limitons-nous provisoirement au cas $p = 2$ et comparons les résultats

obtenus avec ceux que nous avions démontré antérieurement (¹) en représentation conforme.

Soit Δ un domaine simplement connexe contenu dans le demi-plan $D(x>0)$ de la variable $z=x+iy$. Nous avons résolu ailleurs le problème de la dérivée angulaire, pour un tel domaine; rappelons le résultat :

La condition nécessaire et suffisante pour que dans la représentation conforme de Δ sur D, *il existe une dérivée angulaire à l'infini, c'est que si l'on se donne une suite* R_n *quelconque tendant vers l'infini, et si l'on pose*

$$\delta_n=\log\frac{R_{n+1}}{R_n},\qquad \theta_n=\underset{\substack{z\in D-\Delta\\ R_n\leq|z|\leq R_{n+1}}}{\text{borne sup}}\frac{\pi}{2}-|\operatorname{Arg} z|,$$

la série $\Sigma\theta_n\delta_n$ *soit convergente.*

Nous allons montrer ici que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait dérivée angulaire à l'infini, c'est que* $D-\Delta$ *soit effilé à l'infini relativement à* D. On en déduira immédiatement la caractérisation géométrique des ensembles E effilés à l'infini et tels que $D-E$ soit un domaine simplement connexe.

Soit $\zeta=f(z)$ l'une des fonctions, définies dans D, qui représentent conformément D sur Δ de manière que $f(z)\to\infty$ lorsque $z\to\infty$. Supposons d'abord qu'il y ait dérivée angulaire à l'infini, c'est-à-dire que $\frac{f(z)}{z}$ ait une limite γ non nulle lorsque z tend vers l'infini.

Soit $z=\varphi(\zeta)$ la fonction inverse de $f(z)$, $H(\zeta)$ sa partie réelle. Posons

$$\zeta=\xi+i\eta.$$

Nous pouvons prolonger $H(\zeta)$ dans D en posant

$$u(\zeta)=H(\zeta)\quad\text{si }\zeta\in\Delta,\qquad u(\zeta)=0\quad\text{si }\zeta\in D-\Delta.$$

On vérifie facilement que la fonction $u(\zeta)$ ainsi obtenue est sousharmonique dans D. Or $\frac{u(\zeta)}{\xi}$ a pour limite angulaire $c=\frac{1}{\gamma}$; c est d'ailleurs la borne supérieure de $\frac{H(\zeta)}{\xi}$ dans D. La fonction $v(\zeta)=c\xi-u(\zeta)$ est surharmonique positive dans D et satisfait à

$$\liminf_{\zeta\to\infty}\frac{v(\zeta)}{\xi}=0.$$

Dans l'ensemble des points où $v=c\xi$, c'est-à-dire $D-\Delta$, est effilé à l'infini relativement à D.

Réciproquement, supposons $D-\Delta$ effilé à l'infini relativement à D. La frontière Γ de Δ étant un continu n'a pas de points irréguliers. On peut donc

(¹) J. Ferrand. *C. R. Ac. Sc.*, t. 219, 1944, p. 507-508 et *Bull. Soc. Math.*, t. 69, 1945, p. 165-174.

déterminer une répartition μ sur Γ telle que $U^{\mu}(\zeta)=\xi$ dans $D-\Delta$; la fonction $u(\zeta)=\xi-U^{\mu}(\zeta)$ est harmonique positive dans Δ, nulle sur sa frontière. Elle est donc de la forme $u(\zeta)=\gamma H(\zeta)$; γ est une constante positive non nulle, car la plus grande limite du rapport $\frac{u(\zeta)}{\xi}$ est égale à 1, puisque $\liminf \frac{U^{\mu}(\zeta)}{\xi}=0$. On en déduit que le rapport $\frac{H(\zeta)}{\xi}$ a pour limite angulaire $\frac{1}{\gamma}$, donc que la dérivée angulaire est égale à γ, et non nulle. C. Q. F. D.

IV. — Étude des limites de $u(M)$.

A. — Étude de $U^{\mu}(M)$.

21. Au lieu d'étudier les fonctions $U^{\mu}(M)$ et $H(M)$ elles-mêmes, nous allons voir qu'il est plus commode d'étudier les rapports

$$\frac{OM}{x}U^{\mu}(M) \qquad \text{et} \qquad \frac{OM}{x}H(M).$$

Définition. — *Nous dirons qu'une suite* M_n *est régulière au point* A *si elle converge vers* A *et si le rapport* $\frac{AM_n}{AM_{n+1}}$ *reste borné supérieurement.*

Théorème 5 *a*. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite* M_n *de points de* D *régulière à l'origine et telle que le rapport* $\frac{OM_n}{x_n}U^{\mu}(M_n)$ *reste borné (resp. tende vers zéro), c'est que la quantité* $\frac{1}{R^{p-1}}\int_{OP<R}\xi\, d\mu(P)$ *reste bornée (resp. tende vers zéro) lorsque* R *tend vers zéro.*

1° *La condition est nécessaire.* — Supposons

$$\frac{OM_n}{OM_{n+1}}<\frac{1}{s} \quad (s<1) \qquad \text{et} \qquad \frac{OM_n}{x_n}U^{\mu}(M_n)<k$$

pour n assez grand ($n>N$).

Dans chaque intersphère I_n ($s^{n+1}<OM\leq s_n$), il existe au moins un point de la suite; en supprimant au besoin certains points de la suite, nous pouvons supposer que ce point est M_n. Posons

$$\mu_n=\int_{I_n}\xi\, d\mu(P).$$

D'après les inégalités (3) du paragraphe 3 nous avons

$$\frac{U^{\mu}(M)}{x l_p}>\int\frac{\xi\, d\mu(P)}{(OM+OP)^p}>\int_{I_n}\frac{\xi\, d\mu(P)}{(OM+OP)^p},$$

$$OM_n\frac{U^{\mu}(M_n)}{x_n l_p}>\frac{s^{n+1}}{(2s^n)^p}\mu_n.$$

donc, pour $n > N$

$$\mu_n < \frac{2^p k}{s l_p} s^{n(p-1)}.$$

On en déduit facilement que la quantité

$$\mu(r) = \int_{OP<r} \frac{\xi}{\xi} d\mu(P)$$

est bornée par une quantité de la forme $A k r^{p-1}$ pour $r < s^N$, A étant une constante ne dépendant que de s et p. Donc $\frac{\mu(r)}{r^{p-1}}$ reste borné ou tend vers zéro selon que $\frac{OM_n}{x_n} U^\mu(M_n)$ reste borné ou tend vers zéro.

2° *La condition est suffisante.* — Supposons

$$\mu(r) = \int_{OP<r} \xi \, d\mu(P) \leq K r^{p-1} \quad \text{pour} \quad r > R.$$

Soit $s < 1$. On aura

$$\mu_n = \int_{I_n} \xi \, d\mu(P) \leq \mu(s^n) \leq K s^{n(p-1)}$$

pour n assez grand ($n > N$).

Supposons M dans l'intersphère I_n ($s^{n+1} < OM \leq s^n$) et décomposons $U^\mu(M)$ en $U_0^\mu + U_1^\mu + U_2^\mu + U_3^\mu$, U_0^μ désignant le potentiel des masses contenues dans $OP > s^N$, U_1^μ le potentiel des masses contenues dans l'intersphère $s^N \geq OP > s^{n-1}$, U_2^μ le potentiel des masses contenues dans l'intersphère J_n ($s^{n-1} \geq OP > s^{n+2}$), et U_3^μ le potentiel des masses contenues dans la sphère $OP \leq s^{n+2}$. Nous poserons

$$\alpha = \int_{OP>s^N} \frac{\xi \, d\mu(P)}{OP^p}.$$

Nous aurons alors, d'après les inégalités (3)

$$\frac{U_0^\mu(M)}{x l_p} < \int_{OP>s^N} \frac{\xi \, d\mu(P)}{(OP - OM)^p} < \frac{\alpha}{(1-s)s^p},$$

$$\frac{U_1^\mu(M)}{x l_p} < \int_{s^{n-1}<OP\leq s^N} \frac{\xi \, d\mu(P)}{(OP - OM)^p} < \sum_{i=N}^{n-2} \frac{\mu_i}{(s^{i+1} - s^n)^p},$$

d'où

$$\frac{U_1^\mu(M)}{x l_p} < K \sum_{i=N}^{n-2} \frac{s^{i(p-1)}}{s^{p(i+1)}(1-s)^p} < \frac{K}{(1-s)^{p+1} s^{p+n-2}}$$

et enfin

$$\frac{OM U_1^\mu(M)}{x} < \frac{K}{s^{p-1}(1-s)^{p-1}}.$$

De même

$$\frac{U_2^\mu(M)}{x l_n} \leq \int_{OP \leq s^{n+2}} \frac{\xi\, d\mu(P)}{(OM - OP)^p} \leq \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{\mu_i}{(s^{n+1} - s^i)^p}$$

d'où

$$\frac{OMU_2^\mu(M)}{x l_p} \leq \frac{K s^{p-2}}{(1-s)^{p+1}}.$$

On a ainsi

$$\frac{OM}{x}(U_0^\mu + U_1^\mu + U_2^\mu) < \frac{\alpha s^n}{(1-s)^p} + \frac{K(s^{p-2} + s^{1-p})}{(1-s)^{p+1}}.$$

Il reste à étudier le potentiel U_2^μ. Soit R compris entre s^n et s^{n+1}. Désignons par λ_R la répartition fondamentale relative à la demi-sphère $\Sigma_R(OM = R, x > 0)$. On aura

$$\int U_2^\mu(M)\, d\lambda_R(M) = \int_{J_n} U^{\lambda_R}(P)\, d\mu(P) \leq \int_{J_n} \xi\, d\mu(P) = \mu_n + \mu_{n-1} + \mu_{n+1}$$

donc

$$\int U_2^\mu\, d\lambda_R \leq 3K s^{(p-1)(n-1)}.$$

Or

$$\int \xi\, d\lambda_R = \frac{R^p}{l_p} \geq \frac{s^{p(n+1)}}{l_p}.$$

Il existe donc au moins un point M de Σ_R, où l'on a

$$\frac{U_2^\mu(M)}{x} < 3K l_p \frac{s^{(n-1)(p-1)}}{s^{p(n+1)}},$$

donc

$$\frac{OM}{x} U_2^\mu(M) < \frac{3K l_p}{s^{2p-1}}.$$

En ce point M, on aura

$$\frac{OM}{x} U^\mu(M) < \frac{\alpha s^n}{(1-s)^p} + \beta K, \qquad \beta = \frac{3 l_p}{s^{2p-1}} + \frac{s^{p-2} + s^{1-p}}{(1-s)^{p+1}}.$$

Ceci montre que si K est fixe, $\frac{OM}{x} U^\mu(M)$ est borné.

Si la quantité $\frac{\mu(r)}{r^{p-1}}$ tend vers zéro avec r, on peut déterminer N assez grand pour que $\beta K < \frac{\varepsilon}{2}$, puis, N étant choisi, prendre n assez grand pour que $\frac{\alpha s^n}{(1-s)^p} < \frac{\varepsilon}{2}$. On aura alors

$$\frac{OM}{x} U^\mu(M) < \varepsilon.$$

Donc, si $\frac{\mu(r)}{r^{p-1}}$ reste borné (resp. tend vers zéro) on peut trouver au moins un point M sur chaque demi-sphère Σ_R ($OM = R$, $x > 0$) tel que $\frac{OM}{x} U^\mu(M)$ reste borné (resp. tend vers zéro). C. Q. F. D.

22. Théorème 6*a*. — *Si la quantité* $\frac{1}{r^{p-1}} \int_{OP<r} \xi \, d\mu(p)$ *tend vers zéro avec r, l'ensemble* E_ε *des points de* D *où l'on a* $\frac{OM}{x} U^\mu(M) \geq \varepsilon$ *est semi-effilé à l'origine; et l'ensemble* F_ε *des points de* D *où l'on a* $U^\mu(M) \geq \varepsilon$ *est raréfié extérieurement à l'origine.*

Choisissons une constante $s < 1$ et désignons par E_n la trace de E_ε sur l'intersphère I_n ($s^{n+1} < OM \leq s^n$), par F_n la trace de F_ε sur I_n. Soit λ_n la répartition fondamentale de E_n d'énergie γ_n, ν_n celle de F_n, de charge totale ν_n.

Décomposons U^μ en $U_0^\mu + U_1^\mu + U_2^\mu + U_3^\mu$ comme au paragraphe précédent. On sait que pour n assez grand, on a

$$\frac{OM}{x}(U_0^\mu + U_1^\mu + U_3^\mu) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{donc} \quad U_0^\mu + U_1^\mu + U_3^\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On aura donc $U_2^\mu(M) > \frac{\varepsilon}{2} \frac{x}{OM}$ sur E_n et $U_2^\mu(M) > \frac{\varepsilon}{2}$ sur F_n. On en déduit

$$\int U_2^\mu \, d\lambda_n > \frac{\varepsilon}{2 s^n} \int x \, d\lambda_n(M) = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\gamma_n}{s^n}$$

or

$$\int U_2^\mu \, d\lambda_n = \int_{I_n} U^{\lambda_n} \, d\mu \leq \int_{I_n} \xi \, d\mu(P) = \mu_n + \mu_{n-1} + \mu_{n+1}$$

et puisque $\frac{\mu_n}{s^{n(p-1)}}$ tend vers zéro, on en déduit que $\frac{\gamma_n}{s^{np}}$ tend vers zéro; donc E_ε est semi-effilé en O. De même

$$\int U_2^\mu \, d\nu_n > \frac{\varepsilon}{2} \nu_n,$$

or

$$\int U_2^\mu \, d\nu_n = \int_{I_n} U^{\nu_n} \, d\mu \leq \int_{I_n} \xi \, d\mu(P) = \mu_n + \mu_{n-1} + \mu_{n+1}$$

et puisque $\frac{\mu_n}{s^{n(p-1)}}$ tend vers zéro, on en déduit que $\frac{\nu_n}{s^{n(p-1)}}$ tend aussi vers zéro; donc F_ε est raréfié extérieurement en O. C. Q. F. D.

23. Les résultats relatifs au point à l'infini sont tout à fait analogues. Nous nous contenterons de les énoncer.

DÉFINITION. — *Nous dirons que la suite* M_n *est régulière à l'infini si* M_n *tend vers l'infini de manière que le rapport* $\frac{OM_{n+1}}{OM_n}$ *reste borné.*

THÉORÈME 7*a*. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite* M_n *régulière à l'infini et telle que le rapport* $\frac{OM_n}{x_n} U^{\mu}(M_n)$ *reste borné (resp. tende vers zéro) c'est que la quantité*

$$\frac{1}{r^{p-1}} \int_{OP<r} \xi \, d\mu(P)$$

reste bornée (resp. tende vers zéro) lorsque r tend vers l'infini.

THÉORÈME 8*a*. — *Si la quantité* $\frac{1}{r^{p-1}} \int_{OP<r} \xi \, d\mu(P)$ *tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini, alors l'ensemble* E_ε *des points où l'on a*

$$\frac{OM}{x} U^{\mu}(M) > \varepsilon$$

est semi-effilé à l'infini, et l'ensemble F_ε *des points où l'on a* $U^{\mu} > \varepsilon$ *est raréfié extérieurement à l'infini.*

24. DÉFINITION. — *Nous dirons qu'un point* A *de* π *est régulier pour la répartition* μ *si la quantité*

$$\frac{\mu(r, A)}{r^{p-1}} = \frac{1}{r^{p-1}} \int_{AP<r} \xi \, d\mu(P)$$

tend vers zéro avec r.

LEMME. — *Si* $U^{\mu} \not\equiv \infty$, *l'ensemble des points de* π *qui ne sont pas réguliers pour la répartition* μ *est de mesure* $p - 1$ *dimensionnelle nulle.*

Il nous suffit de démontrer que l'ensemble des points irréguliers contenus dans la sphère $OM \leq R$ est de mesure nulle quel que soit R. Or puisque $U^{\mu} \not\equiv \infty$, on sait que l'intégrale $\int_{OP \leq 2R} \xi \, d\mu(P)$ est convergente. Si nous considérons $\xi \, d\mu(P)$ comme une répartition de masse positive, nous pouvons lui appliquer le lemme de Cartan-Ahlfors (1).

Posons

$$\mu(r, A) = \int_{AP \leq r} \xi \, d\mu(P).$$

(1) *Voir* NEVANLINNA, *loc. cit.*, p. 117.

Soit E la région définie par $0 \leq x \leq \varepsilon$, $OM \leq R$. La masse totale répartie sur E, soit

$$\mu(E) = \int_E \xi \, d\mu(P)$$

tend vers zéro avec ε. D'aprés le lemme de Cartan-Ahlfors, si $h(r)$ est une fonction continue croissante quelconque définie pour $0 \leq r \leq \infty$ et satisfaisant à $h(0) = 0$, $h(\infty) > \mu(E)$, on aura $\mu(r, A) \leq h(r)$ en tout point de E excepté au plus sur un ensemble de points A pouvant être recouvert par une famille de sphères dont les rayons r_n satisfont à $\Sigma h(r_n) < m_p$, m_p étant une constante ne dépendant que de p.

Nous pouvons prendre

$$h(r) = \frac{r^{p-1}}{\sqrt{\mu(E)}}.$$

Si l'on fait tendre ε vers zéro, on en déduit que pour tout point A de π tel que $OA \leq R$, excepté au plus un ensemble de mesure $p-1$ dimensionnelle nulle, la quantité $\frac{\mu(r, A)}{r^{p-1}}$ tend vers zéro avec r. C. Q. F. D.

THÉORÈME $9a$. — *Si* $U^\mu \not\equiv \infty$, *l'ensemble des points de* D *où l'on a* $U^\mu(M) \geq \varepsilon$ *est raréfié extérieurement en presque tout point* A *de* π, (c'est-à-dire : excepté au plus sur un ensemble de mesure $p-1$ dimensionnelle nulle) *quel que soit* $\varepsilon > 0$.

Ce résultat est une simple conséquence des théorèmes $6a$ et $9a$.

25. Certains des résultats que nous venons d'énoncer sont susceptibles de réciproques.

1° *Réciproque du théorème* $6a$. — Si l'ensemble E est semi-effilé à l'origine, il existe une répartition μ de $\mathfrak{M}_E^c$ telle que $\frac{1}{r^{p-1}} \int_{OP<r} \xi \, d\mu(P)$ tende vers zéro avec r, et que $\frac{OMU^\mu(M)}{x}$ reste supérieur à 1 sur E, ou même tende vers l'infini lorsque M tend vers O sur E, en négligeant au plus un ensemble de points de E de capacité extérieure nulle.

2° *Réciproque du théorème* $8a$. — Si l'ensemble E est semi-effilé à l'infini, il existe une répartition μ de $\mathfrak{M}_E^c$ telle que $\frac{1}{r^{p-1}} \int_{OP<r} \xi \, d\mu(P)$ tende vers zéro avec $\frac{1}{r}$, et que $\frac{OMU^\mu(M)}{x}$ reste supérieur à 1 sur E, ou même tende vers l'infini lorsque M tend vers O sur E, en négligeant au plus un ensemble de points de E de capacité extérieure nulle.

Ces deux réciproques se démontrent comme celles du paragraphe 13.

3° *Réciproque 9a.* — Si l'ensemble E_0, contenu dans τ, est de mesure $p-1$ dimensionnelle nulle, il existe une répartition μ de $\mathcal{M}$ telle que tout point de E_0 soit irrégulier pour cette répartition.

Supposons E_0 borné (sinon nous procéderions par passage à la limite, en considérant la trace de E_0 sur la sphère $OM \leqq R$). Nous pouvons enfermer E_0 dans une famille dénombrable $\mathcal{F}_i$ de sphères $\mathcal{S}_i^{(n)}$ dont les rayons $R_i^{(n)}$ satisfont à

$$\sum_{n=1}^{\infty} [R_i^{(n)}]^{p-1} < \varepsilon_i.$$

Nous prendrons pour ε_i le terme général d'une série positive convergente.

Dans chaque sphère $\mathcal{S}_i^{(n)}$ considérons la calotte $T_i^{(n)}$ définie par $x > \frac{1}{2} R_i^{(n)}$, et sur cette calotte répartissons de façon quelconque la masse $\mu_i^{(n)} = [R_i^{(n)}]^{p-2}$. On aura

$$\frac{1}{2} [R_i^{(n)}]^{p-1} \leqq \int_{T_i^{(n)}} \xi \, d\mu(P) \leqq [R_i^{(n)}]^{p-1}.$$

La répartition totale de masse obtenue en recommençant l'opération pour chaque valeur de i et de n, satisfait à

$$\int \xi \, d\mu(P) < \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty.$$

On a donc tout d'abord $U^{\mu} \not\equiv \infty$.

Soit A un point quelconque de E_0. Désignons par $\mathcal{S}_i$ une sphère de la famille $\mathcal{F}_i$ contenant A, par R_i son rayon. La calotte T_i correspondante est contenue dans l'intersphère $\frac{R_i}{2} < AM < 2R_i$.

On a donc, avec les notations du paragraphe 24

$$\mu(2R_i, A) > \int_{T_i} \xi \, d\mu > \frac{1}{2} R_i^{p-1},$$

ce qui montre que A est irrégulier pour la répartition μ. C. Q. F. D.

B. — Étude de H (M) et de u (M).

26. Rappelons tout d'abord les résultats connus (extension du théorème de Fatou à l'espace R^n) (¹).

Si la fonction H(M) est harmonique positive dans le demi-espace D ($x > 0$), elle a une limite angulaire finie en presque tout point A de τ.

(¹) *Voir* Privaloff, *Les problèmes limites de la théorie des fonctions harmoniques et sousharmoniques* (*Rec. Math.*, Moscou, 3 N. S., 1938, p. 3-24; résumé français, p. 24-25). On passe facilement du cas du domaine sphérique, considéré par Privaloff, au cas du demi-espace, étudié ici.

La démonstration est fondée sur la représentation intégrale de H(M) [formule (2)]. Mais, par analogie avec ce qui a été fait pour les potentiels (§§ 21 et 22), on peut compléter ce résultat et démontrer successivement les théorèmes suivants :

THÉORÈME 5 *b*. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite* M_n *régulière en* O *et telle que le rapport* $\frac{OM_n}{x_n} H(M_n)$ *tende vers zéro, c'est que la quantité* $\frac{1}{r^{p-1}} \int_{OP<r} d\mu(P)$ *tende vers zéro avec r.*

THÉORÈME 6 *b*. — *Si la quantité* $\frac{1}{r^{p-1}} \int_{OP<r} d\mu(P)$ *tend vers* γ *lorsque r tend vers zéro, alors* H(M) *tend vers* $\frac{1}{2} k_p \gamma$ *lorsque* M *tend vers* O *angulairement, et l'ensemble défini par* $\left| H(M) - \frac{1}{2} k_p \gamma \right| \geq \varepsilon$ *est raréfié extérieurement en* O, *quel que soit* $\varepsilon > 0$.

THÉORÈME 9 *b*. — *En presque tout point* A *de* π *la fonction* H(M) *a une limite angulaire finie* γ *et l'ensemble défini par* $|H(M) - \gamma| > \varepsilon$ *est raréfié extérieurement en* A.

Le théorème 5 *b* se démontre comme le théorème 5 *a*, avec les mêmes modifications qui permettaient de passer du théorème 1 *a* (§ 11) au théorème 1 *b* (§ 14).

Pour démontrer 6 *b*, on décompose d'abord μ en la somme d'une répartition de densité constante γ dans π, et d'une répartition μ' de densité nulle en O. La répartition μ' n'est plus nécessairement positive, mais elle est bornée sur tout ensemble borné, et on peut lui appliquer le théorème 5 *b* de même que les raisonnements faits au paragraphe 22 pour les potentiels.

Enfin le théorème 9 *b* découle de 5 *b* et 6 *b*, si l'on sait qu'une distribution de masse positive a une densité finie excepté au plus sur un ensemble de mesure nulle.

De ces résultats, nous pouvons déduire le corollaire suivant, nécessaire pour la suite :

COROLLAIRE. — *Si la fonction* H(M) *est harmonique positive et bornée dans* D, *et si, en presque tout point* A *de* π *il existe une suite* M_n *régulière et telle que* $\frac{AM_n}{x_n} H(M_n)$ *tende vers zéro, alors* H(M) *est identiquement nulle.*

En effet la fonction H(M) possède alors une limite angulaire nulle en presque tout point A de π. Étant bornée, elle est identiquement nulle.

27. En groupant les résultats du paragraphe 26 avec ceux des paragraphes 21 et 22, on obtient des propriétés des fonctions surharmoniques positives dans D; en particulier le

THÉORÈME 9c. — *Si la fonction* $u(M)$ *est surharmonique positive dans* D, *en presque tout point* A *de* π, *il existe une constante* γ *telle que l'ensemble défini par* $|u(M)-\gamma| \geq \varepsilon$ *soit raréfié extérieurement en* A, *et que l'ensemble défini par* $|u(M)-\gamma| > \varepsilon \frac{AM}{x}$ *soit semi-effilé en* A.

On peut en déduire, par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 8, que l'ensemble des rayons issus de A sur lesquels il existe une suite M_n régulière en A et telle que la suite $u(M_n)$ n'admette pas γ pour point d'accumulation, est un ensemble J de rayons.

C. — APPLICATION AUX DISTRIBUTIONS CAPACITAIRES.

28. Soit E un ensemble quelconque contenu dans D. Nous appellerons *distribution capacitaire intérieure* (*resp. extérieure*) de E la distribution μ (si elle existe) de $\mathfrak{M}_E^i$ (resp. $\mathfrak{M}_E^e$) telle que $U^\mu = 1$ excepté au plus sur un ensemble de mesure nulle pour toute distribution de $\mathfrak{S}_E^i$ (resp. $\mathfrak{S}_E^e$). On aura donc $U^\mu = 1$ en tout point de E excepté au plus sur un ensemble de points de E de capacité intérieure (extérieure) nulle. Or on sait (§ 24, corollaire) que l'ensemble des points défini par $U^\mu \geq \varepsilon$, est raréfié extérieurement en presque tout point de π. Il en résulte que E, somme d'un ensemble de capacité intérieure (resp. extérieure) nulle, et d'un ensemble raréfié extérieurement en presque tout point de π, est lui-même raréfié intérieurement (resp. extérieurement) en presque tout point de π.

Réciproquement supposons E raréfié intérieurement (resp. extérieurement) en presque tout point de π. Nous allons montrer que E est susceptible d'une distribution capacitaire intérieure (resp. extérieure).

Considérons une suite croissante de domaines D_k épuisant D et désignons par F_k la trace de E sur D_k. F_k étant strictement intérieur à D est susceptible d'une distribution capacitaire intérieure (resp. extérieure) μ_k. La suite U^{μ_k} est croissante et bornée; elle a pour limite une fonction surharmonique $u(M)$ comprise entre zéro et 1. On aura $u(M) = 1$ en tout point de E excepté un ensemble de capacité intérieure (extérieure) nulle. Nous allons montrer, en tenant compte de l'hypothèse faite sur E, que $u(M)$ se réduit à un potentiel.

Posons

$$u(M) = H(M) + U^\mu(M),$$

$H(M)$ étant une fonction harmonique positive dans D et $U^\mu(M)$ un potentiel de masse positive. Soit A un point de π où E est raréfié intérieurement (resp. extérieurement). Désignons par E_n la trace de E sur l'intersphère I_n ($s''^{+1} < AM \leq s''$) ($s < 1$) et par λ_n la distribution fondamentale intérieure (resp. extérieure) relative à E_n, de charge totale λ_n. E étant raréfié, nous pouvons déterminer N

tel que, ε étant donné, $n \geq N$ entraîne $\lambda_n < \varepsilon s^{n(p-1)}$. On aura alors

$$\lambda_n \geq \int_{E_n} U^{\mu_k} d\lambda_n = \int U^{\lambda_n} d\mu_k \geq \int_{I_n} x \, d\mu_k = \mu_{k,n}.$$

Donc, pour $n \geq N$, on aura

$$\mu_{k,n} < \varepsilon s^{n.p-1)},$$

ce qui montre que $\frac{\mu_{k,n}}{s^{n\,p-1)}}$ tend uniformément vers zéro, quel que soit k, lorsque n tend vers l'infini.

Supposons M dans I_n et décomposons U^{μ_k} en $U_1^{\mu_k} + U_2^{\mu_k}$, $U_1^{\mu_k}$ étant le potentiel des masses contenues dans l'intersphère $J_n = I_n + I_{n-1} + I_{n+1}$, et $U_2^{\mu_k}$ le potentiel des masses extérieures à J_n. En reprenant le raisonnement du paragraphe 21, on voit que $U_2^{\mu_k}$ tend uniformément vers zéro, donc pour n assez grand, on aura $U_2^{\mu_k} < \varepsilon$, quel que soit k.

D'autre part, si λ'_R est la répartition fondamentale relative à la demi-sphère Σ_R ($AM = R$, $x > 0$) on a

$$\int U_1^{\mu_k} d\lambda'_R = \int_{J_n} U^{\lambda'_R} d\mu_k \leq \int_{J_n} x \, d\mu_k = \mu^{k,n-1} + \mu^{k,n+1} + \mu^{k,n},$$

donc pour $n \geq N + 1$:

$$\int U_1^{\mu_k} d\lambda'_R \leq 3\varepsilon s^{n\,p-1)}.$$

Pour n assez grand, quel que soit k, on aura

$$\int U^{\mu_k} d\lambda'_R \leq \varepsilon \lambda'_R + 3\varepsilon s^{n\,p-1)} = K\varepsilon s^{n\,p-1)},$$

en posant $K = 3 + \frac{2h_{p-1}}{l_p h_p}$, et en supposant $s^{n+1} < R \leq s$. A la limite $u(M)$ satisfait donc, pour n assez grand, à

$$\int u \, d\lambda'_R \leq K\varepsilon s^{n\,p-1)}.$$

Puisque $H(M) \leq u(M)$ il existe donc sur chaque Σ_R ($s^{n+1} < R \leq s_n$) au moins un point M tel que

$$H(M) \leq K\varepsilon \frac{l_p h_p}{2 s^{p-1} h_{p-1}}.$$

Il en résulte que le minimum $m(R)$ de $H(M)$ sur Σ_R tend vers zéro avec R. Ceci ayant lieu en presque tout point A de π, on a $H(M) \equiv 0$. C. Q. F. D.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Théorème. — *Pour qu'un ensemble* E *de* D *soit susceptible d'une distribution capacitaire intérieure* (*resp. extérieure*) *relativement à la fonction de Green de* D, *il faut et il suffit qu'il soit raréfié intérieurement* (*resp. extérieurement*) *en presque tout point* A *de* π.

29. Dans le cas où E ne satisfait pas à l'hypothèse du théorème précédent, il existe toujours une fonction $u(M)$ surharmonique positive dans D, et telle que $u(M)=1$ excepté au plus pour un ensemble de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}_E^i$ (resp. $\mathcal{E}_E$). Nous allons étudier cette fonction : elle est la somme d'un potentiel de Green $U^\mu(M)$ et d'une fonction harmonique H(M). Le raisonnement fait au paragraphe 28 montre que H(M) tend vers zéro lorsque M converge vers un point de π où E est raréfié intérieurement (resp. extérieurement). Soit E_0 l'ensemble des points de π où E n'est pas raréfié. Nous allons montrer que H(M) a pour limite angulaire 1 en presque tout point de E_0. En effet l'ensemble défini par $U^\mu(M)>\varepsilon$ est raréfié en presque tout point de π; donc l'ensemble défini par $H(M)>1-\varepsilon$ n'est raréfié en presque aucun point de E_0. Or H(M) a une limite angulaire γ en presque tout point A de π, et l'ensemble défini par $H(M)>\gamma-\varepsilon$ est raréfié en A. Donc $\gamma=1$ en presque tout point de E_0. C. Q. F. D.

Les deux propriétés établies pour H(M) montrent que H(M) est identique à la mesure harmonique extérieure de E_0 dans D.

Application. — Supposons E fermé. Alors $u(M)$ représente la mesure harmonique de E dans D — E.

Théorème. — *Si l'ensemble* E *est fermé, la mesure harmonique de* E *dans* D — E *est la somme de la mesure harmonique dans* D *de l'ensemble* E_0 *des points de* π *où* E *n'est pas raréfié, et d'un potentiel de la fonction de Green de* D.

SUR LES VALEURS ALGÉBRIQUES

D'UNE

FONCTION ALGÉBROÏDE

ET

LES INTÉGRALES PSEUDO-ABÉLIENNES

PAR M. NICOLAS BAGANAS.

INTRODUCTION.

Dans ce travail, entrepris sous la direction de M. Paul Montel, nous traitons de questions rattachées au célèbre théorème de É. Picard fixant à deux le nombre maximum des valeurs non prises par une fonction analytique uniforme au voisinage d'un point singulier essentiel isolé et d'autres concernant les intégrales pseudo-abéliennes (1). La plupart de nos résultats, obtenus suivant des méthodes élémentaires se basant sur certaines nouvelles généralisations des théorèmes de M. É. Borel concernant l'identité $\sum_{1}^{n} f_i(z)e^{F_i(z)} \equiv 0$ (f_i, F_i, fonctions entières assujetties à certaines conditions), comprennent comme cas particuliers des résultats classiques.

Le théorème de M. Paul Montel (2) fixant à deux le nombre maximum des branches distinctes d'une fonction algébrique exceptionnelle pour une fonction

(1) La terminologie sera précisée au Chapitre correspondant.

(2) P. MONTEL, *Sur les valeurs algébriques d'une fonction entière ou méromorphe* (*Journ. Math. pures et appl.*, 1941, p. 305-324).

transcendante méromorphe et celui de G. Remoundos (¹), fixant à $2n$ le nombre maximum des valeurs exceptionnelles d'une fonction transcendante algébroïde à n branches, sont des corollaires du théorème (fondamental) : *Si la fonction* $u(z)$, *transcendante algébroïde à* n *branches, admet comme exceptionnelle la fonction algébrique* $b(z)$ *à* m *branches distinctes, on a*

$$m \leq 2n.$$

Ce théorème comporte des améliorations analogues à celles, apportées par MM. Th. Varopoulos, M. Ghermanescu et J. Dufresnoy, au théorème de G. Remoundos et d'autres, sous certaines conditions concernant, par exemple, l'irréductibilité de l'équation définissant $b(z)$ ou les points de ramification de $b(z)$, ..., aussi qu'une extension que l'on établit en supposant que $b(z)$ est une fonction algébroïde d'ordre inférieur à celui de $u(z)$. La théorie classique des combinaisons linéaires exceptionnelles des fonctions entières, fondée par M. P. Montel, trouve sa généralisation dans la théorie des combinaisons linéaires exceptionnelles dont les coefficients sont des fonctions algébriques ou algébroïdes.

La théorie de M. G. Valiron, relative aux fonctions entières à valeurs exceptionnelles ou quasi exceptionnelles, est généralisée et complétée sur un point.

La recherche des fonctions algébriques, suggérée par un problème de M. P. Montel, strictement exceptionnelles pour une algébrique donnée et l'étude de la dérivée logarithmique d'une classe de fonctions algébroïdes nous ont amené à faire une étude sommaire des intégrales pseudo-abéliennes et donner une extension d'une identité d'Abel rattachée aux mêmes questions.

Nous avons démontré les théorèmes concernant les identités généralisées de M. Borel, et les théorèmes qui en découlent, en nous limitant aux fonctions d'ordre fini ; par des procédés calqués, avec de légères modifications, sur ceux employés dans ce travail, on établirait des théorèmes analogues dans le cas des fonctions d'ordre *infini non transfini*. A plusieurs reprises nous parlerons d'identités dans lesquelles figurent les branches des différentes fonctions algébroïdes (ou algébriques) : par là nous entendons des relations liant les valeurs, en chaque point d'un domaine d'holomorphie D, des branches de ces différentes fonctions.

Qu'il me soit maintenant permis d'exprimer ma profonde reconnaissance envers la France qui, en m'accueillant généreusement, m'a donné l'occasion de puiser dans la science de ses savants. Je suis heureux d'exprimer ma respectueuse reconnaissance à M. Paul Montel qui m'a suggéré d'entreprendre ce travail et n'a cessé de me prodiguer ses conseils et de m'encourager. Je tiens à adresser également mes vifs remercîments à M. G. Valiron pour l'appui qu'il m'a donné et pour sa bienveillance envers mes travaux.

(¹) G. Remoundos, *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes* [*Ann. Fac. Sc. de Toulouse*, (2), t. 8, 1906, p. 1-72].

CHAPITRE I.

Généralisation d'une identité de M. É. Borel.

1. *Définitions.* — On appelle *fonction algébroïde méromorphe*, dans un cercle $|z|<R$, la fonction $u(z)$ définie par une équation algébrique

$$F(u, z)\equiv f_0(z)\,u^n+f_1(z)\,u^{n-1}+\ldots+f_n(z)=0, \tag{I}$$

dont les coefficients $f_i(z)$ sont des fonctions données de la variable z holomorphes dans le cercle $|z|<R$. On suppose essentiellement que les $f_i(z)$ ne s'annulent pas simultanément pour une même valeur de z. Nous ne nous occuperons que des fonctions algébroïdes dont le domaine d'existence est le plan ouvert.

Nous appellerons *fonction algébroïde transcendante* toute fonction algébroïde non algébrique dont le domaine d'existence est le plan ouvert.

Les coefficients $f_i(z)$ de l'équation (I), définissant une fonction algébroïde transcendante $u(z)$, sont des fonctions entières.

Nous pouvons supposer que $f_0(z)$ est un produit canonique.

Avec cette condition, on dit que la fonction algébroïde transcendante $u(z)$ définie par l'équation (I) est *d'ordre fini* ρ, si les fonctions $f_i(z)$ sont toutes d'ordre ρ au plus, l'une au moins étant d'ordre ρ.

2. Lemme. — *Si, pour* $|z|$ *supérieur à* r_0, *toutes les branches de* $u_i(z)$ *vérifient l'inégalité*

$$|u_j(z)|<r^N, \tag{1}$$

où N *désigne une constante,* $u(z)$ *est une fonction algébrique.*

La démonstration de ce lemme s'appuie sur une extension du théorème de Liouville en tenant compte des relations entre les valeurs de $u_j(z)$ et les coefficients $f_j(z)$ $(j=0, 1, 2, \ldots, n)$.

La relation

$$(-1)^\nu\frac{f_\nu(z)}{f_0(z)}=\Sigma u_1(z)\ldots u_\nu(z).$$

grâce à l'inégalité (1), montre que l'on a

$$\left|\frac{f_\nu(z)}{f_0(z)}\right|<r^M \qquad (|z|=r>r_1;\ M \text{ const.}). \tag{2}$$

De l'inégalité (2) on conclut que $f_0(z)$ a un nombre fini de pôles, c'est-à-dire que le produit canonique $f_0(z)$ est un polynome. Par conséquent, à partir d'une valeur du $|z|$, on a

$$|f_\nu(z)| < r^{M_1} \qquad (M_1 \text{ const.}). \tag{3}$$

L'inégalité (3) prouve que $f_\nu(z)$ est un polynome.

3. Théorème. — *Soit $u(z)$ une fonction algébroïde transcendante d'ordre fini ρ, ayant un nombre fini de zéros, de pôles et de points de ramification.*

La dérivée logarithmique de $u(z)$ est une fonction algébrique.

Soit $u_j(z)$ une branche de $u(z)$. Puisque le nombre des zéros, des pôles et des points de ramification de $u(z)$ est fini, les fonctions $u_j(z)$ et $\log u_j(z)$ (1) sont, pour $|z_0|$ suffisamment grand, holomorphes dans le cercle fermé $|z - z_0| \leq 1$ et vérifient les inégalités

$$e^{-|z|^{\rho+1}} < |u_j(z)| < e^{|z|^{\rho+1}}, \qquad |\log u_j(z)| < |z|^{\rho+2} \leq (|z_0|+1)^{\rho+2} < |z_0|^{\rho+3};$$

nous aurions pu remplacer ces inégalités par d'autres plus précises mais cela n'a aucune importance pour la démonstration.

Le théorème de Cauchy, appliqué à la fonction $\log u_j(z)$, holomorphe dans le cercle fermé $|z - z_0| \leq 1$, donne

$$\left|\frac{u_j'(z_0)}{u_j(z_0)}\right| < \frac{\text{max de } |\log u_j(z)| \text{ sur } |z - z_0| = 1}{1} < |z_0|^{\rho+3}.$$

Cette dernière inégalité prouve, d'après le lemme du paragraphe 2, que la fonction $\dfrac{u'(z)}{u(z)}$ est une fonction algébrique.

4. *Généralisation d'une identité de M. É. Borel.*

Théorème I. — *Considérons l'identité*

$$f_1(z)F_1(z) + f_2(z)F_2(z) + \ldots + f_n(z)F_n(z) \equiv 0, \tag{I}$$

où :

a. les $f_i(z)$ sont des branches algébroïdes (ou algébriques) d'ordre $< \rho$ (2);

b. les $F_i(z)$ sont des branches de fonctions algébroïdes d'ordre fini ayant un nombre limité de pôles, de zéros et de points de ramification;

c. les branches $\dfrac{F_i(z)}{F_j(z)}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$ sont d'ordre fini $> \rho$.

---

(1) Nous appelons $\log u_j(z)$ la branche de $\log u(z)$ qui prend au point z la valeur $\log|u_j(z)| + i\omega$ avec $|\omega| \geq \pi$.

(2) Par le mot « ordre » d'une branche algébroïde $u_j(z)$, nous entendons l'ordre de l'algébroïde $u(z)$, dont $u_j(z)$ est une branche, qui est définie par une équation irréductible.

Une telle identité entraîne

$$f_1(z)=f_2(z)=\ldots=f_n(z)\equiv 0.$$

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Nous pouvons alors supposer que

$$f_1(z)f_2(z)\ldots f_n(z)\not\equiv 0,$$

sinon nous aurions à nous occuper d'une identité ayant moins de n termes. Divisons par $f_1(z)\,\mathrm{F}_1(z)$ les deux membres de l'identité (I) et prenons la dérivée du premier membre ainsi obtenu.

Nous aurons

$$\left[\left(\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right)'+\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\left(\frac{\mathrm{F}_2'(z)}{\mathrm{F}_2(z)}-\frac{\mathrm{F}_1'(z)}{\mathrm{F}_1(z)}\right)\right]\frac{\mathrm{F}_2(z)}{\mathrm{F}_1(z)}+\ldots$$
$$+\left[\left(\frac{f_n(z)}{f_1(z)}\right)'+\frac{f_n(z)}{f_1(z)}\left(\frac{\mathrm{F}_n'(z)}{\mathrm{F}_n(z)}-\frac{\mathrm{F}_1'(z)}{\mathrm{F}_1(z)}\right)\right]\frac{\mathrm{F}_n(z)}{\mathrm{F}_1(z)}\equiv 0,$$

ou, en posant

$$\mathrm{X}_i(z)=\left(\frac{f_i(z)}{f_1(z)}\right)'+\frac{f_i(z)}{f_1(z)}\left(\frac{\mathrm{F}_i'(z)}{\mathrm{F}_i(z)}-\frac{\mathrm{F}_1'(z)}{\mathrm{F}_1(z)}\right),$$

(II) $$\mathrm{X}_2(z)\,\mathrm{F}_2(z)+\ldots+\mathrm{X}_n(z)\,\mathrm{F}_n(z)\equiv 0.$$

Les fonctions qui entrent dans l'identité (II) à $n-1$ termes, remplissent toutes les conditions remplies par celles qui entrent dans l'identité (I).

Considérons, en effet, la fonction $\mathrm{X}_i(z)$: elle est d'ordre $<\rho$, car les fonctions $f_1(z)$, $f_i(z)$ sont d'ordre $<\rho$, et $\frac{\mathrm{F}_1'(z)}{\mathrm{F}_1(z)}$, $\frac{\mathrm{F}_i'(z)}{\mathrm{F}_i(z)}$ sont des fonctions algébriques (théorème du paragraphe 3).

D'ailleurs, $\mathrm{X}_i(z)\not\equiv 0$, sinon nous aurions

$$\frac{\mathrm{F}_i(z)}{\mathrm{F}_1(z)}\frac{f_i(z)}{f_1(z)}=\text{const.}\not\equiv 0,$$

ce qui est impossible puisque, par hypothèse, l'ordre de $\frac{\mathrm{F}_i(z)}{\mathrm{F}_1(z)}$ est au moins égal à ρ tandis que les ordres de $f_i(z)$, $f_1(z)$ sont plus petits que ρ.

En partant de l'identité (II), nous arriverons, par la même voie, à une autre identité ayant $n-2$ termes, et, en continuant ainsi, nous aurons finalement une identité

$$\psi_n(z)\,\mathrm{F}_n(z)\equiv 0,$$

où $\psi_n(z)$ et $\mathrm{F}_n(z)$ sont $\not\equiv 0$, ce qui est absurde. Donc,

$$f_1(z)=f_2(z)=\ldots=f_n(z)\equiv 0.$$

Corollaire. — *Une identité de la forme*

(III) $$f_1(z)+f_2(z)\mathrm{F}_2+\ldots+f_n(z)\,\mathrm{F}_n(z)\equiv 0$$

se décompose en les identités

$$f_1(z) \equiv 0, \qquad f_2(z)\,F_2(z) + \ldots + f_n(z)\,F_n(z) \equiv 0,$$

sous les conditions suivantes :

a. les fonctions $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ *sont des branches d'algébroïdes (ou algébriques) d'ordre* $< \rho$;

b. les fonctions $F_2(z), \ldots, F_n(z)$ *sont des branches d'algébroïdes ayant un nombre fini de pôles, de zéros et de points de ramification ;*

c. les ordres des fonctions $F_2(z), \ldots, F_n(z)$ *sont* $\geq \rho$.

Supposons, en effet, d'abord que tous les rapports $\frac{F_i(z)}{F_j(z)}$ aient des ordres $\geq \rho$.

Notre corollaire est alors un cas particulier du théorème qne nous venons de démontrer ($F_1 \equiv 1$). Dans le cas général, partageons le groupe des fonctions $F_2, \ldots, F_n$ en un certain nombre de classes

$$\begin{array}{llll} F_2, & \ldots, & F_{\mu_1}, \\ F_{\mu_1+1}, & \ldots, & F_{\mu_2}; \\ \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

jouissant des propriétés suivantes :

a. Les fonctions d'une même classe, comprenant plus d'une fonction, sont proportionnelles à des fonctions d'ordre $< \rho$;

b. Le rapport de deux fonctions appartenant à des classes différentes est d'ordre $\geq \rho$.

En écrivant (III) sous la forme

$$f_1(z) + \left(f_2 \frac{F_2}{F_{\mu_1}} + \ldots + f_{\mu_1}\right) F_{\mu_1} + \ldots \equiv 0,$$

nous arriverons à la conclusion que

$$f_1(z) \equiv 0, \qquad f_2\,F_2 + \ldots + f_{\mu_1}\,F_{\mu_1} \equiv 0, \qquad \ldots.$$

Les raisonnements qui précèdent permettent d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Une identité de la forme*

$$f_1\,F_1 + f_2\,F_2 + \ldots + f_n\,F_n \equiv 0, \tag{IV}$$

dans laquelle :

a. $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *sont des branches d'algébroïdes d'ordre* $< \rho$, *non identiquement nulles ;*

b. $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *sont des branches d'algébroïdes d'ordre* $\geq \rho$ *ayant un nombre limité de zéros, de pôles et de points de ramification,*

se décompose en les identités

$$f_1 F_1 \quad + \ldots + f_{\mu_1} F_{\mu_1} \equiv 0,$$
$$f_{\mu_1+1} F_{\mu_1+1} + \ldots + f_{\mu_2} F_{\mu_2} \equiv 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

jouissant des propriétés suivantes :

a. chacune de ces identités comprend au moins deux termes;

b. les termes F_i *de chacune de ces identités sont proportionnels à des fonctions d'ordre* $< \rho$.

En particulier, si les f_i *sont algébriques, on démontre de la même manière que, dans chaque identité partielle, les rapports* $\frac{F_i}{F_j}$ *sont algébriques.*

CHAPITRE II.

NOMBRE MAXIMUM DE BRANCHES D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE EXCEPTIONNELLE POUR UNE FONCTION ALGÉBROÏDE.

5. Soit $u(z)$ une fonction transcendante algébroïde à n branches et $b(z)$ une fonction algébrique à m branches distinctes.

Nous dirons, avec M. P. Montel, que la fonction $u(z)$ admet comme exceptionnelle la fonction $b(z)$ si elle ne prend qu'un nombre fini de fois les valeurs de cette fonction $b(z)$ pour la même valeur de z.

Cette définition est équivalente à la suivante :

La fonction algébrique $b(z)$, définie par l'équation

$$(1) \qquad A(u, z) \equiv a_0(z)\, u^m + a_1(z)\, u^{m-1} + \ldots + a_m(z) = 0 \qquad (a_i \text{ polynomes}),$$

sera dite exceptionnelle pour la fonction algébroïde $u(z)$ définie par l'équation

$$(2) \qquad F(u, z) \equiv f_0(z)\, u^{n-1} + f_1(z)\, u^{n-1} + \ldots + f_n(z) = 0,$$

si le résultat de l'élimination de u entre les équations $F(u, z) = 0$, $A(u, z) = 0$ est de la forme

$$P(z)\, e^{Q(z)},$$

où $P(z)$ est un polynome et $Q(z)$ une fonction entière.

6. THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si la fonction algébroïde* $u(z)$, *de degré* n *et d'ordre fini, admet comme exceptionnelle la fonction algébrique* $b(z)$ *de degré* m, *à branches distinctes, on a*

$$m \leq 2n.$$

Supposons $m \geqq 2n+1$. Soient $b_1(z)$, $b_2(z)$, ..., $b_m(z)$ les branches distinctes de $b(z)$. Posons

$$(A)\quad \begin{cases} F[b_1(z), z] = f_0(z)\, b_1^n(z) + f_1(z)\, b_1^{n-1}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_1(z), \\ F[b_2(z), z] = f_0(z)\, b_2^n(z) + f_1(z)\, b_2^{n-1}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_2(z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F[b_{2n}(z), z] = f_0(z)\, b_{2n}^n(z) + f_1(z)\, b_{2n}^{n-1}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_{2n}(z), \\ F[b_{2n+1}(z), z] = f_0(z)\, b_{2n+1}^n(z) + f_1(z)\, b_{2n+1}^{n-1}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_{2n+1}(z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les fonctions $G_1(z)$, $G_2(z)$, ..., $G_{2n-1}(z)$, ... sont des branches d'une algébroïde $G(z)$ d'ordre fini ayant un nombre limité de zéros, de pôles et de points de ramification, car $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$ sont des fonctions entières et $b_1(z)$, $b_2(z)$, $b_{2n+1}(z)$, ... sont les branches de la fonction algébrique $b(z)$, exceptionnelle pour la fonction $u(z)$.

Démontrons d'abord que n au plus des $G_i(z)$ sont des branches algébriques. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait, par exemple,

$$\begin{aligned} &f_0(z)\, b_1^n(z) + f_1(z)\, b_1^{n-1}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_1(z), \\ &f_0(z)\, b_2^n(z) + f_1(z)\, b_2^{n-1}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_2(z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &f_0(z)\, b_{n+1}^n(z) + f_1(z)\, b_{n+1}^{n-1}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_{n+1}(z); \end{aligned}$$

où G_1, G_2, ..., G_{n+1} sont des branches algébriques et le déterminant des coefficients de $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$ n'est pas identiquement nul.

En résolvant le système précédent par rapport à f_0, f_1, ..., f_n, on en déduirait que toutes ces fonctions sont des polynomes, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En éliminant $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$ entre les $n+2$ premières équations du système (A) nous obtenons

$$\delta_1(z)\, G_1(z) + \delta_2(z)\, G_2(z) + \ldots + \delta_{n+2}(z)\, G_{n+2}(z) \equiv 0.$$

Le nombre des termes algébriques de cette identité est au plus égal à n et tous les déterminants $\delta_i(z)$, ayant comme éléments des branches algébriques distinctes, sont $\not\equiv 0$.

D'après la remarque finale du Chapitre précédent, cette identité donne au moins une identité de la forme

$$G_{\sigma_2} \equiv G_{\sigma_1}\gamma_1(z) \qquad (1 \leqq \sigma_2 \neq \sigma_1 \leqq n+2),$$

où $\gamma_1(z)$ désigne une branche algébrique.

En remplaçant, dans le système des $n+2$ équations considérées, l'équation qui correspond à la branche $b_{\sigma_2}(z)$ par celle du système (A) qui correspond à la branche $b_{n+3}(z)$ et raisonnant comme ci-dessus, nous aurons une identité de

la forme

$$G_{\sigma_2}(z) \equiv G_{\sigma_1}(z)\gamma_2(z) \qquad (1 \leq \sigma_2 \neq \sigma_1,\ \sigma_2 \leq n+3),$$

où $\gamma_2(z)$ désigne une branche algébrique.

Notre mode de raisonner nous permet d'écrire au moins les $m-n-1 \geq n$ identités

$$\begin{aligned}
G_{\sigma_2}(z) &\equiv \gamma_1(z)\,G_{\sigma_1}(z),\\
G_{\sigma_3}(z) &\equiv \gamma_2(z)\,G_{\sigma_1}(z),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
G_{\sigma_{n+1}}(z) &\equiv \gamma_n(z)\,G_{\sigma_1}(z).\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

En résolvant le système des équations formé avec $n+1$ des G_{σ_i},

$$\begin{aligned}
&f_0(z)\,b^n_{\sigma_1}(z) \quad + f_1(z)\,b^{n-1}_{\sigma_1}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_{\sigma_1}(z),\\
&f_0(z)\,b^n_{\sigma_2}(z) \quad + f_1(z)\,b^{n-1}_{\sigma_2}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_{\sigma_2}(z) \equiv \gamma_1(z)\,G_{\sigma_1}(z),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&f_0(z)\,b^n_{\sigma_{n+1}}(z) + f_1(z)\,b^{n-1}_{\sigma_{n+1}}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_{\sigma_{n+1}}(z) \equiv \gamma_n(z)\,G_{\sigma_1}(z),
\end{aligned}$$

par rapport à $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$, on en déduirait que toutes les fonctions $f_i(z)$ sont proportionnelles à des fonctions algébriques, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous sommes conduits à une contradiction en supposant $m \geq 2n+1$; donc $m \leq 2n$.

7. La démonstration n'exige pas que l'équation (1) définissant $b(z)$ soit irréductible. On peut supposer que toutes les branches $b_i(z)$ de $b(z)$, ou quelques-unes d'entre elles, soient des fonctions rationnelles. Dans le cas particulier où les $b_i(z)$ sont des constantes différentes, on obtient le théorème de G. Remoundos (1) :

Une fonction algébroïde à n branches dont le domaine d'existence est tout le plan fini ne peut admettre plus de $2n$ valeurs exceptionnelles à moins que toutes ses déterminations ne se réduisent à des constantes.

En supposant $n=1$, on retrouve le théorème de M. P. Montel (2) :

Toute fonction transcendante méromorphe dans le plan prend une infinité de fois les valeurs de toute fonction algébrique qui admet au moins trois déterminations.

8. Supposons que le nombre des pôles de $u(z)$ soit limité. On a alors

$$m \leq 2n-1.$$

---

(1) G. Remoundos, *loc. cit.*

(2) P. Montel, *loc. cit.*, p. 309.

Considérons en effet l'algébrique $U(z)$ définie par l'équation

$$0.u^{m+1}+a_0(z)u^m+\ldots+a_m(z)=0 \qquad (a_0\not\equiv 0),$$

qui admet la branche $u\equiv\infty$; cette algébrique est exceptionnelle pour $u(z)$, donc

$$m+1\leq 2n.$$

9. Le maximum $2n$ peut être atteint.

Considérons, en effet, l'équation

$$P_n(u,z)+e^zQ_n(u,z)=0,$$

où P_n, Q_n sont des polynomes de degré n par rapport à u tels que les équations

$$P_n(u,z)=0, \qquad Q_n(u,z)=0$$

définissent deux fonctions algébriques dépourvues de branches multiples et n'ayant aucune branche commune.

La fonction $u(z)$ admet comme exceptionnelle la fonction algébrique $b(z)$ à $2n$ branches distinctes définie par l'équation

$$P_n(u,z)Q_n(u,z)=0.$$

Cette dernière équation n'est pas irréductible. Voici un exemple où l'équation est irréductible.

Considérons l'équation irréductible

$$A(u,z)=u^{2n}-z=0,$$

et la fonction algébroïde $u(z)$ définie par l'équation

$$F(u,z)=\frac{e^{\sqrt{z}}-e^{-\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}}u''+\frac{e^{\sqrt{z}}+e^{-\sqrt{z}}}{2}=0.$$

Le résultat de l'élimination de u entre les équations $A(u,z)=0$, $F(u,z)$ est identiquement égal à 1; $u(z)$ admet comme exceptionnelle l'algébrique $b(z)$.

10. Dans ce paragraphe, nous traitons quelques cas intéressants où $m<2n$ pour une équation (1) irréductible.

Théorème I. — *Si la fonction algébrique $b(z)$ à m branches, définie par une équation irréductible et dépourvue de points de ramification d'ordre supérieur à 1, est exceptionnelle pour l'algébroïde $u(z)$ à n branches, d'ordre fini, on a*

$$m\leq n+1.$$

Pour démontrer ce théorème, reprenons la démonstration du théorème fondamental.

Supposons $m \geqq n+2$. — En éliminant $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$ entre les $n+2$ équations

$$F[b_i(z), z] = f_0(z)b_i^n(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_i(z) \quad (i = 1, \ldots, n+2),$$

nous obtenons l'identité

$$\partial_1(z)G_1(z) + \partial_2(z)G_2(z) + \ldots + \partial_{n+2}(z)G_{n+2}(z) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2),$$

$$\partial_i(z) \not\equiv 0.$$

Un au moins des rapports de deux $G_i(z)$, par exemple le rapport $G_{\lambda_1}(z) : G_{\lambda_2}(z)$ sera algébrique.

Puisque la fonction $b(z)$ est définie par une équation irréductible et que tous ses points de ramification sont d'ordre 1, autour de chacun d'eux ne se permutent que deux branches de $b(z)$, et deux branches quelconques peuvent être échangées de cette façon. Par conséquent, en partant d'un point z et en suivant un chemin fermé convenable, nous pouvons passer de la branche $b_{\lambda_1}(z)$ à la branche $b_{\lambda_2}(z)$ sans que $b_{\lambda_2}(z)$ soit changée; et, par conséquent, de $G_{\lambda_1}(z)$ à $G_{\lambda_2}(z)$ sans que $G_{\lambda_2}(z)$ soit changée; le rapport $G_{\lambda_1}(z) : G_{\lambda_2}(z)$ devient $G_{\lambda_2}(z) : G_{\lambda_3}(z)$ qui est donc algébrique.

De même, en passant de b_{λ_1} à b_{λ_3} sans que b_{λ_2} et b_{λ_3} soient changées, on en conclut que le rapport de G_{λ_1} à G_{λ_3} est algébrique et par conséquent que les rapports de deux des $G_{\lambda_1}(z)$, $G_{\lambda_2}(z)$, $G_{\lambda_3}(z)$, $G_{\lambda_4}(z)$ sont algébriques. En continuant ainsi, on montre que les rapports de deux quelconques des G_1, G_2, G_3, ..., G_{n+2} sont algébriques, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc

$$m \leqq n+1.$$

THÉORÈME II. — *Supposons que la fonction algébroïde* $u(z)$ *à* n *branches admette comme exceptionnelles les fonctions algébriques* $\beta(z)$, $b(z)$ *à* μ *et* m *branches respectivement; on a*

$$m \leqq n,$$

si l'équation définissant $b(z)$ *est irréductible et si les points de ramification de cette fonction sont distincts de ceux de la fonction* $\beta(z)$.

Supposons $m \geqq n+1$. — Soient $b_1(z), \ldots, b_{n+1}(z), \ldots, b_m(z)$, les branches de $b(z)$, et $\beta(z)$ une branche de la fonction $\beta(z)$.

Posons encore

$$F[b_i(z), z] = f_0(z)b_i^n(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_i(z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1);$$
$$F[\beta(z), z] = f_0(z)\beta^n(z) + \ldots + f_n(z) \equiv B(z).$$

En éliminant $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$ entre ces $n+2$ équations, nous obtenons

$$d_1(z)G_1(z) + d_2(z)G_2(z) + \ldots + d_{n+1}(z)G_{n+1}(z) + d_{n+2}(z)B(z) \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, n+2),$$

où

$$d_i(z) \not\equiv 0.$$

Cette identité donne naissance à au moins une identité de la forme

$$\frac{G_\sigma(z)}{B(z)} \equiv \gamma_1(z),$$

$\gamma_1(z)$ étant algébrique. Puisque les points de ramification de $b(z)$ sont distincts de ceux de $\beta(z)$, en partant d'un point z et suivant un chemin fermé convenable, nous pouvons passer de $G_\sigma(z)$ à n'importe lequel des $G_i(z)$ sans que $B(z)$ soit changé, et par conséquent tous les rapports $\frac{G_i(z)}{B(z)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ sont algébriques, ce qui est contre l'hypothèse.

Donc

$$m \leq n.$$

La condition imposée aux points de ramification des $b(z)$ et $\beta(z)$ est vérifiée quand $\beta(z)$ est une fraction rationnelle ou une constante c. En prenant c égal à zéro ou à l'infini, nous obtenons le corollaire :

Corollaire. — *Si la fonction algébrique $b(z)$ à m branches, définie par une équation irréductible, est exceptionnelle pour la fonction transcendante algébroïde $u(z)$ à n branches, on a*

$$m \leq n,$$

lorsque le nombre des zéros, ou celui des pôles, de $u(z)$ est limité.

Théorème III. — *Supposons que la fonction exceptionnelle $b(z)$ soit définie par une équation de la forme*

$$A_1(u, z)A_2(u, z)\ldots A_\lambda(u, z) = 0,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_\lambda$ $(\lambda \geq 2)$ désignent des polynomes indécomposables en u et z. Soit m_i le degré du polynome A_i par rapport à u.

Si les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_\lambda$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, chacun d'eux ne dépasse pas n.

Supposons $m_1 \geq n+1$. — Soient $a_1(z), a_2(z), \ldots, a_{m_1}(z)$ les branches de la fonction définie par l'équation $A_1(u, z) = 0$ et $b_1(z), b_2(z), \ldots, b_{m_i}(z)$, les branches de la fonction définie par $A_i(u, z) = 0$ $(i \neq 1)$.

Posons

$$F[a_j(z), z] = f_0(z)a_j^n(z) + \ldots + f_n(z) = G_j(z) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1, \ldots, m),$$
$$F[b_h(z), z] = f_0(z)b_h^n(z) + \ldots + f_n(z) = H_h(z) \qquad (h = 1, \ldots, m_1).$$

En éliminant $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ entre les $n+2$ équations

$$F[a_\lambda(z), z] = f_0(z)a_\lambda^n(z) + \ldots + f_n(z) = G_\lambda(z) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n+1),$$
$$F[b_1(z), z] = f_0(z)b_1^n(z) + \ldots + f_n(z) = H_1(z),$$

nous en concluons comme précédemment que l'un au moins des rapports $\frac{G_j(z)}{H_1(z)}$ est algébrique.

Soit

$$G_1(z), \quad \ldots, \quad G_\sigma(z), \quad H_1(z), \quad \ldots, \quad H_\rho(z)$$

le groupe formé par *toutes* les branches $G_i(z)$ et $H_j(z)$, telles que les rapports $\frac{G_i(z)}{H_j(z)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \sigma;\ j = 1, 2, \ldots, \rho)$ soient algébriques.

Nous savons que $\sigma < n+1$.

En passant, suivant un chemin convenable, de $G_1(z)$ à $G_{\sigma+1}(z)$ nous obtenons le groupe

$$G_{\sigma+1}(z), \quad \ldots, \quad G_{2\sigma}, \quad H_{\rho+1}(z), \quad \ldots, \quad H_{2\rho}(z),$$

formé par des branches telles que les rapports $\frac{G_{\sigma+i}}{H_{\rho+j}}$ soient algébriques; les fonctions de ce nouveau groupe sont différentes de celles contenues dans le premier groupe. En continuant ainsi, s'il est nécessaire, nous formons ν $(\nu \geq 2)$ groupes contenant toutes les $G_j(z)$. Ces ν groupes contiennent aussi toutes les $H_h(z)$. Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Soit $H_{\rho+\lambda}(z)$ une branche qui n'y figure pas. En passant de $H_1(z)$ à $H_{\rho+\lambda}(z)$ on forme, à partir du $G_1, \ldots, G_\sigma$, $H_1, \ldots, H_\rho$, un groupe qui sera nécessairement un des ν groupes déjà formés.

Ces ν groupes contiennent donc toutes les $H_j(z)$. Chacun de ces groupes contenant σ branches parmi les G_i et ρ parmi les H_j, on a

$$m_1 = \sigma\nu, \qquad m_l = \rho\nu \qquad (\nu \geq 2);$$

puisque le nombre ν des groupes formés par des branches G dont les rapports sont algébriques ne varie pas quand i prend successivement les valeurs $2, \ldots, \lambda$, les nombres $m_1, \ldots, m_\lambda$ ont un diviseur commun $\nu \geq 2$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc

$$m_1 \leq n.$$

Si m_1 et m_2 ne sont pas premiers entre eux, il peut arriver que l'un d'eux dépasse n. Par exemple, l'algébroïde $u(z)$ définie par l'équation

$$\left(\frac{e^{\sqrt{z}}}{1+\sqrt{z}} + \frac{e^{-\sqrt{z}}}{1-\sqrt{z}}\right)u^3 + \left(\frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}e^{\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}e^{-\sqrt{z}}\right)u^2$$
$$+ \left(\frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}e^{\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}e^{-\sqrt{z}}\right)u + z\left(\frac{e^{\sqrt{z}}}{1+\sqrt{z}} + \frac{e^{-\sqrt{z}}}{1-\sqrt{z}}\right) = 0,$$

admet comme fonction exceptionnelle l'algébrique $b(z)$ définie par l'équation

$$(u^4 - z)(u^2 - z) = 0,$$

dans laquelle

$$m_1 = 4 > n = 3.$$

On peut donner des exemples plus généraux.

Mentionnons un autre théorème, dont la démonstration est analogue à celle du précédent.

THÉORÈME IV. — *Si la fonction algébrique $b(z)$ à m branches, définie par une équation irréductible, est exceptionnelle pour l'algébroïde $u(z)$ à n branches, on a*

$$m \leq n + 1,$$

lorsque m est un nombre premier.

CHAPITRE III.

COMBINAISONS EXCEPTIONNELLES (1).

11. La théorie des combinaisons exceptionnelles des fonctions entières, fondée par M. P. Montel, repose sur l'impossibilité des identités de M. É. Borel. La généralisation que nous avons donnée de ces identités nous permet d'étendre cette théorie aux combinaisons exceptionnelles dont les coefficients sont des fonctions algébriques.

Dans ce Chapitre, nous nous contenterons d'énoncer les théorèmes, leur démonstration étant tout à fait semblable à celle des théorèmes correspondants obtenus en remplaçant dans les énoncés les mots « branche algébrique » par le mot « constante ».

12. *Définitions.* — Considérons un système (f) de $n+1$ fonctions entières d'ordre fini

$$f_0(z), \quad f_1(z), \quad \ldots, \quad f_n(z),$$

et formons une combinaison linéaire homogène à coefficients algébriques

$$G(z) \equiv g_0(z) f_0(z) + g_1(z) f_1(z) + \ldots + g_n(z) f_n(z),$$

où les $g_i(z)$ sont des branches de fonctions algébriques; nous dirons que le système des $n+1$ fonctions admet la combinaison exceptionnelle $G(z)$, si cette

(1) *Voir* P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales;* M. GHERMANESCU, *Les combinaisons exceptionnelles* (*Actualités scientifiques*, n° 889, 1940); J. DUFRESNOY, *Théorie nouvelle des familles...* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 61, 1944).

fonction, qui est en général une branche d'algébroïde, est une branche d'une algébroïde ayant un nombre fini de zéros (¹).

Nous dirons que $n+1$ combinaisons exceptionnelles

$$\begin{aligned}
&g_0^1(z)f_0(z)+g_1^1(z)f_1(z)+\ldots+g_n^1(z)f_n(z),\\
&g_0^2(z)f_0(z)+g_1^2(z)f_1(z)+\ldots+g_n^2(z)f_n(z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&g_0^{n+1}(z)f_0(z)+g_1^{n+1}(z)f_1(z)+\ldots+g_n^{n+1}(z)f_n(z)
\end{aligned}$$

sont algébriquement indépendantes si le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} g_0^1(z) & g_1^1(z) & \ldots & g_n^1(z)\\ g_0^2(z) & g_1^2(z) & \ldots & g_n^2(z)\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ g_0^{n+1}(z) & g_1^{n+1}(z) & \ldots & g_n^{n+1}(z)\end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul.

Substituons aux fonctions $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$ les fonctions $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, ..., $\varphi_n(z)$ définies par une substitution à coefficients algébriques $\gamma_i^j(z)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(z)&=\gamma_0^1(z)f_0(z)+\gamma_1^1(z)f_1(z)+\ldots+\gamma_n^1(z)f_n(z),\\
\varphi_1(z)&=\gamma_0^2(z)f_0(z)+\gamma_1^2(z)f_1(z)+\ldots+\gamma_n^2(z)f_n(z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi_n(z)&=\gamma_0^{n+1}(z)f_0(z)+\gamma_1^{n+1}(z)f_1(z)+\ldots+\gamma_n^{n+1}(z)f_n(z),
\end{aligned}$$

dans laquelle le déterminant

$$D=\begin{vmatrix} \gamma_0^1(z) & \ldots & \gamma_0^n(z)\\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ \gamma_0^{n+1}(z) & \ldots & \gamma_n^{n+1}(z)\end{vmatrix}$$

est supposé $\not\equiv 0$. Nous dirons que les deux systèmes f_0, f_1, ..., f_n et φ_0, φ_1, ..., φ_n appartiennent à la même classe.

Si, dans une combinaison exceptionnelle

$$g_0(z)f_0(z)+g_1(z)f_1(z)+\ldots+g_n(z)f_n(z)$$

relative au système (f), on remplace f_0, f_1, ..., f_n par leurs valeurs en fonction de φ_0, φ_1, ..., φ_n tirées des équations précédentes, on obtient une combinaison

$$\delta_0(z)\varphi_0(z)+\delta_1(z)\varphi_1(z)+\ldots+\delta_n(z)\varphi_n(z)$$

relative au système (φ) et qui est aussi exceptionnelle.

Donc : *Le nombre des combinaisons exceptionnelles demeure le même pour tous les systèmes appartenant à une même classe.*

(¹) Le nombre de pôles de $G(z)$ est fini puisque les $g_i(z)$ sont des branches algébriques.

13. Théorème I. — *Soit un système de $n+1$ fonctions entières d'ordre fini $f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z)$ dont une, au moins, est transcendante :*

Le nombre des combinaisons linéaires homogènes exceptionnelles, algébriquement indépendantes $n+1$ à $n+1$, entre ces fonctions ne peut dépasser $2n$.

Ce théorème peut être précisé comme suit :

Théorème II. — *S'il n'existe entre les $n+1$ fonctions $f_i(z)$ que λ relations linéaires homogènes algébriquement indépendantes au plus $(\lambda < n)$, le nombre des combinaisons exceptionnelles (algébriquement indépendantes $n+1$ à $n+1$) entre ces fonctions ne peut dépasser $n+\lambda+1$.*

Corollaire I. — *Soit $u(z)$, une algébroïde, d'ordre fini, définie par l'équation*

$$f_0(z)\,u^n + f_1(z)\,u^{n-1} + \ldots + f_n(z) = 0.$$

Supposons qu'il n'existe entre les $f_i(z)$ que λ relations linéaires homogènes, algébriquement indépendantes $(\lambda < n)$.

Si la fonction algébrique $b(z)$ à m branches distinctes est exceptionnelle pour la fonction $u(z)$, on a

$$m \leq n+\lambda+1.$$

En supposant que les m branches de la fonction $b(z)$ soient m constantes distinctes, on retrouve le théorème de M. Th. Varopoulos (1) qui précise celui de G. Remoundos.

Le théorème II de ce paragraphe peut être précisé comme suit.

Théorème III. — *S'il existe entre les $n+1$ fonctions $f_i(z)$ au plus λ relation linéaires homogènes algébriquement indépendantes, $(\lambda < n)$, le nombre de combinaisons exceptionnelles (algébriquement indépendantes $n+1$ à $n+1$) entre ces $n+1$ fonctions ne peut dépasser le nombre $n+\frac{n}{n-\lambda}$.*

Corollaire II. — *Soit $u(z)$ l'algébroïde, d'ordre fini, définie par l'équation*

$$f_0(z)\,u^n + f_1(z)\,u^{n-1} + \ldots + f_n(z) = 0.$$

Supposons qu'il existe entre les $f_i(z)$ au plus λ relations linéaires homogènes, algébriquement indépendantes, $(\lambda < n)$.

---

(1) Th. Varopoulos, *Sur le nombre des valeurs exceptionnelles des fonctions multiformes* (*C. R. Acad. Sc.*, 177, 1923, p. 306; *Bull. Soc. Math. de France*, 53, 1925, p. 23-34).

Si la fonction algébrique $b(z)$ à m branches distinctes, est exceptionnelle pour la fonction $u(z)$, on a

$$m \leq n + \frac{n}{n-\lambda}.$$

En supposant que les m branches de la fonction $b(z)$ soient des constantes distinctes, on retrouve un théorème de M. Ghermanescu.

CHAPITRE IV.

NOUVELLE GÉNÉRALISATION DE L'IDENTITÉ DE M. E. BOREL ET NOUVELLES EXTENSIONS.

14. L'examen de la démonstration du théorème concernant l'identité

$$f_1(z)\,F_1(z) + f_2(z)\,F_2(z) + \ldots + f_n(z)\,F_n(z) \equiv 0$$

nous montre que nous sommes parvenus à démontrer que

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n \equiv 0,$$

en passant de cette identité à une autre analogue

$$X_2(z)\,F_2(z) + \ldots + X_n(z)\,F_n(z) \equiv 0,$$

ayant un terme de moins; les fonctions $X_2(z), \ldots, X_n(z)$ conservent la propriété d'être des fonctions d'ordre $< \rho$ parce que ce sont des fonctions rationnelles des fonctions $f_i(z)$, $f_i'(z)$, dont les ordres sont inférieurs à ρ, et des dérivées logarithmiques des fonctions $F_i(z)$ qui, par suite des conditions imposées, sont des fonctions algébriques.

Mais pour que l'ordre de la fonction $X_i(z)$ soit inférieur à ρ, il n'est pas nécessaire que les dérivées logarithmiques des fonctions $F_i(z)$, soient algébriques; il suffit qu'elles soient d'ordre inférieur à ρ.

Nous avons défini une classe de fonctions algébroïdes dont la dérivée logarithmique est algébrique. Peut-on définir une classe de fonctions algébroïdes dont la dérivée logarithmique soit une fonction algébroïde d'ordre inférieur à ρ, quel que soit l'ordre fini des fonctions de cette classe?

Le théorème suivant fournit la réponse.

THÉORÈME I. — *L'ordre de la dérivée logarithmique d'une fonction algébroïde $u(z)$ d'ordre fini est au plus égal à l'ordre* réel *de ses zéros et à celui des pôles de sa dérivée $u'(z)$.*

Nous démontrerons ce théorème en suivant une voie élémentaire (1).

(1) On peut donner une démonstration indirecte de ce théorème en se servant d'un résultat de M. G. Valiron [*Sur la dérivée des fonctions algébroïdes* (*Bull. Soc. Math. de France*, 1931, fasc. I, p. 17-39)].

Rappelons d'abord la démonstration du théorème de M. Hadamard concernant le module minimum d'une fonction entière, en suivant la marche de M. É. Borel (¹), et en apportant quelques compléments utiles pour la suite.

Ce théorème s'énonce comme il suit :

Étant donnés un produit canonique de facteurs primaires $G(z)$ *et un nombre positif arbitraire* ε, *on peut trouver une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants sur chacun desquels on a l'inégalité*

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

M. Borel examine d'abord le cas où le nombre ρ est inférieur à l'unité. Rappelons ses conclusions. Soit

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \qquad (|a_n| = r_n),$$

une fonction entière d'ordre ρ inférieur à 1. Traçons deux cercles, de centre $z=0$, de rayons respectifs $r_n - 1$, $r_n + 1$ qui limitent la couronne $C_n(r_n - 1, r_n + 1)$ d'épaisseur 2.

Considérons le cercle $K(O, R)$ et les couronnes C_i intérieures à ce cercle.

Soit S, l'épaisseur totale de ces couronnes, M. Borel démontre que

1° $$\lim_{R=\infty} \frac{S}{R} = 0.$$

2° Pour chaque point z extérieur aux couronnes C_i, on a l'inégalité

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}},$$

à partir d'une valeur de $|z| = r$; $r > r(\varepsilon)$.

Il passe ensuite au cas d'une fonction d'ordre $\rho \geq 1$. En prenant un entier $q > \rho$ et considérant la fonction auxiliaire

$$F(y) = G(z)\,G(\omega z)\ldots G(\omega^{q-1} z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{y}{a_n^q}\right),$$

où $y = z^q$ et ω est une racine $q^{\text{ième}}$ primitive de l'unité, il démontre l'existence d'une infinité de circonférences de rayons indéfiniment croissants sur lesquels on a

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Ajoutons quelques compléments.

Les couronnes correspondant à la fonction $F(y)$ sont $C_n(r_n^q - 1, r_n^q + 1)$, donc les couronnes correspondant à la fonction $G(z)$ sont $C'_n\left(\sqrt[q]{r_n^q - 1}, \sqrt[q]{r_n^q + 1}\right)$.

(¹) *Voir* É. Borel, *Leçons sur les fonctions entières.*

Soit S', l'épaisseur totale des couronnes C'_i comprises dans le cercle K(O, R), on a

$$\lim_{R\to\infty}\frac{S'}{R}=0.$$

Considérons maintenant les couronnes

$$\ldots,\quad \Gamma_n\left(\sqrt[q]{r_n'^q-1}-\frac{1}{r_n'^q},\ \sqrt[q]{r_n'^q+1}+\frac{1}{r_n'^q}\right),\quad \ldots;$$

soit Σ, l'épaisseur totale des couronnes Γ_i comprises dans le cercle K(O, R).

Puisque l'épaisseur $\gamma_n=\left(\sqrt[q]{r_n'^q+1}+\frac{1}{r_n'^q}\right)-\left(\sqrt[q]{r_n'^q-1}-\frac{1}{r_n'^q}\right)$ de Γ_n est, pour r_n assez grand, inférieure à $3\left(\sqrt[q]{r_n'^q+1}-\sqrt[q]{r_n'^q-1}\right)$, on a encore

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\Sigma}{R}=0.$$

Soit $a>1$ et la couronne L(R, aR), d'épaisseur égale à $(a-1)R$; on a

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\Sigma}{(a-1)R}=0.$$

Appelons *exceptionnelles* les couronnes Γ_i correspondant à la fonction G(z).

Ces compléments nous permettent d'énoncer les conclusions suivantes :

1° L'épaisseur totale des couronnes exceptionnelles Γ_i, comprises dans la couronne L(R, aR), est négligeable par rapport à l'épaisseur $(a-1)R$ de la couronne L, quand $R\to\infty$.

2° A partir d'une valeur R_0 de R, il existe une infinité de circonférences $(|z|=R_i)$ situées dans la couronne L(R, aR) telles qu'à chaque point z_0 de chacune d'elles peut être attaché le cercle fermé $|z-z_0|\leq\frac{1}{z_0^q}$ dans lequel G(z) vérifie l'inégalité

$$|G(z)|>e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

3° Supposons que nous ayons un nombre fini des fonctions entières f_1, f_2, ..., f_n d'ordre fini. En considérant les couronnes exceptionnelles correspondant à chaque fonction f_i comprises dans la couronne L(R, aR), nous arrivons à la conclusion suivante :

A partir d'une valeur R_0 de R, il existe une infinité de circonférences $(|z|=R_i)$ situées dans la couronne L(R, aR) telles qu'à chaque point z_0 de chacune d'elles peut être attaché le cercle fermé $|z-z_0|\leq\frac{1}{z_0^N}$, N étant fixe et fini, dans lequel on a

$$|f_i(z)|>e^{-r^{\rho_i+\varepsilon}}\qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

ρ_i étant l'ordre de la fonction $f_i(z)$.

Soit maintenant $u(z)$, une fonction algébroïde d'ordre ρ.

En considérant les zéros, les pôles et les points de ramification de $u(z)$, on démontre aisément la proposition :

A partir d'une valeur R_0 de R, il existe une infinité de circonférences situées dans la couronne $L(R, aR)$ telles que à chaque point z_0 de chacune d'elles peut être attaché le cercle fermé $|z - z_0| \leq \frac{1}{r^N}$, N désignant un nombre fixe et fini, dans lequel chaque branche $u_j(z)$ de la fonction $u(z)$ est holomorphe et vérifie l'inégalité

$$e^{r^{\rho+\varepsilon}} > |u_j(z)| > e^{-r^{\rho-\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0);$$

dans le même cercle, la fonction $\log u_j(z)$ est holomorphe et vérifie, pour r assez grand, l'inégalité

$$|\log u_j(z)| < r^{\rho+1}.$$

Nous possédons maintenant les éléments nécessaires pour démontrer le théorème I de ce paragraphe.

Soit $u(z)$ une fonction algébroïde d'ordre ρ définie par l'équation

$$F(u, z) = f_0(u)\, u^n + f_1(z)\, u^{n-1} + \ldots + f_n(z) = 0.$$

Supposons que ses zéros et les pôles de sa dérivée $u'(z)$ aient σ pour ordre réel; on a évidemment $\sigma \leq \rho$. Il faut montrer que l'ordre de la fonction

$$V(z) = \frac{u'(z)}{u(z)}$$

est au plus égal à σ.

Les pôles de $V(z)$ proviennent des zéros de $u(z)$ et des pôles de $u'(z)$. On peut former un produit canonique $\Pi(z)$ d'ordre σ tel que la fonction

$$W(z) = V(z)\, \Pi(z)$$

soit dépourvue de pôles (à distance finie); on a

$$V(z) = \frac{W(z)}{\Pi(z)}.$$

Il suffit de montrer que l'ordre σ_1 de la fonction $W(z)$ est au plus égal à σ.

Soit

$$E(u, z) = W^n + \varphi_1(z)\, W^{n-1} + \ldots + \varphi_n(z) = 0,$$

l'équation qui définit $W(z)$; les $\varphi_i(z)$ sont des fonctions entières.

Une au moins des fonctions $\varphi_i(z)$ est d'ordre σ_1, les autres ont des ordres inférieurs ou égaux à σ_1; soit $\varphi_i(z)$ une des fonctions d'ordre σ_1 et soient ε, ε' deux nombres positifs arbitraires $\varepsilon' > \varepsilon > 0$.

Il existe une suite infinie de points

$$(A) \qquad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n, \quad \ldots \ldots \qquad \lim_{n=\infty} |z_n| = \infty,$$

tels que l'on ait

$$|\varphi_i(z_n)| > e^{r_n^{\sigma_1-\varepsilon}}, \qquad |W_j(z)| > e^{r_n^{\sigma_1-\varepsilon'}},$$

où $W_j(z)$ est une branche de $W(z)$, qui varie en général pour les différents points de la suite (A).

Prenons un point z_n de module arbitrairement grand.

Sur la circonférence C, qui se trouve dans la couronne $L(r_n, ar_n; a>1)$ et hors des couronnes exceptionnelles, considérons le point z_0 où le module de $\varphi_i(z)$ atteint son maximum. On a

$$|\varphi_i(z_0)| > |\varphi(z_n)| > e^{r_n^{\sigma_1-\varepsilon}};$$

donc, il existe une branche $W_j(z)$ telle que

$$|W_j(z_0)| > e^{r_n^{\sigma_1-\varepsilon'}},$$

et par conséquent

$$(1) \qquad |V_j(z_0)| = \frac{|W_j(z_0)|}{|H(z_0)|} > \frac{e^{r_n^{\sigma_1-\varepsilon'}}}{e^{r_0^{\sigma+\varepsilon}}} \geqq e^{r_n^{\sigma_1-\varepsilon'}-a^{\sigma+1}r_n^{\sigma+1}}.$$

D'ailleurs, dans le cercle fermé $K\left(z_0, \frac{1}{|z_0|^N}\right)$, où N est fixe et fini, la fonction $\log u_j(z)$ est holomorphe et vérifie l'inégalité

$$|\log u_j(z)| < r^{\rho+1}.$$

Le théorème de Cauchy donne

$$(2) \qquad \left|\frac{u_j'(z_0)}{u_j(z_0)}\right| = |V_j(z_0)| < \frac{\text{max de } |\log u_j(z)| \text{ sur circonf. de K}}{\frac{1}{r_0^N}}$$

$$< r^{\rho+1} r_0^N < (ar_n)^{\rho+1} (ar_n)^N = a^{\rho+N+1} r_n^{\rho+N+1}.$$

Les nombres N, ρ, a sont finis et fixes, le nombre r_n est arbitrairement grand, tandis que ε, ε' sont arbitrairement petits. Si le nombre σ_1 était plus grand que σ, les inégalités (1) et (2) seraient incompatibles.

Donc,

$$\sigma_1 \leqq \sigma.$$

15. En remarquant que les pôles de $u'(z)$ proviennent des pôles et, peut-être, de points de ramification de $u(z)$, nous pouvons énoncer le corollaire suivant :

COROLLAIRE I. — *L'ordre de la dérivée logarithmique d'une fonction algébroïde d'ordre fini est au plus égal à l'ordre réel de l'ensemble de ses zéros, pôles et points de ramification.*

En supposant que $u(z)$ ait un nombre fini de zéros et $u'(z)$ un nombre fini de pôles, nous obtenons le corollaire :

COROLLAIRE II. — *Soit $u(z)$ une fonction algébroïde d'ordre fini ayant un nombre fini de zéros dont la dérivée $u'(z)$ a un nombre limité de pôles.*

La dérivée logarithmique de $u(z)$ est une fonction algébrique.

16. Ayant établi ce théorème I (Chap. IV, § 1), nous sommes en mesure de donner les extensions suivantes des théorèmes concernant les identités de M. Borel.

THÉORÈME I. — *Soit l'identité*

$$\Sigma f_i(z)\,\mathrm{F}_i(z) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

1° *$f_i(z)$ sont des branches algébroïdes (ou algébriques) d'ordre $< \rho$;*

2° *les zéros des fonctions algébroïdes dont les $\mathrm{F}_i(z)$ sont des branches et les pôles des fonctions algébroïdes dont les $\mathrm{F}_i'(z)$ sont des branches ont des ordres réels $\leq \rho$; ou les pôles, zéros et points de ramification des fonctions algébroïdes, dont les $\mathrm{F}_i(z)$ sont des branches, ont des ordres réels $< \rho$;*

3° *les fonctions $\dfrac{\mathrm{F}_i(z)}{\mathrm{F}_j(z)}$ $(i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j)$ sont d'ordre $\geq \rho$.*

Une telle identité entraîne

$$f_1(z) = f_2(z) = \ldots = f_n(z) \equiv 0.$$

THÉORÈME II. — *Une identité de la forme*

$$f_1(z) + \Sigma f_i(z)\,\mathrm{F}_i(z) \equiv 0 \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

donne

$$f_1(z) \equiv 0$$

sous les conditions suivantes :

1° *les fonctions $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ sont d'ordre $< \rho$;*

2° *les branches algébroïdes $\mathrm{F}_i(z)$ sont d'ordre $\geq \rho$;*

3° *les zéros des fonctions algébroïdes, dont les $\mathrm{F}_i(z)$ sont des branches, et les pôles de leurs dérivées premières ont des ordres réels $< \rho$; ou les pôles, zéros et points de ramification des fonctions, dont les $\mathrm{F}_i(z)$ sont des branches, ont des ordres réels $< \rho$.*

THÉORÈME III. — *Une identité de la forme*

$$f_1(z)\,\mathrm{F}_1(z) + \ldots + f_n(z)\,\mathrm{F}_n(z) = 0.$$

se décompose en d'autres analogues

$$f_1(z)\,\mathrm{F}_1(z) + \ldots + f_\lambda(z)\,\mathrm{F}_\lambda(z) \equiv 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dont chacune a au moins deux termes sous les conditions du théorème précédent où l'on suppose $f_i(z) \not\equiv 0 \ (i = 1, \ldots, n)$; *les fonctions* $F_i(z)$ *qui entrent dans une quelconque de ces identités sont proportionnelles à des fonctions d'ordre* $< \rho$.

17. *Fonctions algébroïdes exceptionnelles, au sens Borel-Montel, pour une algébroïde donnée.* — Soit $u(z)$ une algébroïde d'ordre ρ et $v(z)$ une algébroïde (ou algébrique) d'ordre $\sigma < \rho$.

Nous dirons que $u(z)$ *admet* $v(z)$ *comme exceptionnelle au sens de Borel-Montel, si l'ordre réel des points où les fonctions* $u(z)$, $v(z)$ *prennent la même valeur est plus petit que* ρ.

Les généralisations des théorèmes de M. Borel, que nous avons établies, nous permettent d'énoncer les propositions :

THÉORÈME I. — *Si l'algébroïde* $u(z)$ *à n branches, d'ordre* ρ, *admet comme fonction exceptionnelle au sens de Borel-Montel* $v(z)$ *à m branches distinctes, d'ordre* $\sigma < \rho$, *on a*

$$m \leq 2n \qquad \text{et} \qquad m \leq 2n - 1,$$

si l'ordre réel des pôles de $u(z)$ *est* $< \rho$.

THÉORÈME II. — *Supposons que la fonction exceptionnelle* $v(z)$ *soit définie par une équation de la forme*

$$\Phi_1(u, z)\,\Phi_2(u, z) \ldots \Phi_\lambda(u, z) = 0 \qquad [\Phi_i(u, z) = 0 \text{ est irréductible}],$$

où $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\lambda \ (\lambda \geq 2)$ *désignent des polynomes en u dont les coefficients sont des fonctions entières.*

Soit m_i *le degré par rapport à u du polynome* Φ_i.

Si les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_\lambda$ *sont premiers entre eux, chacun d'eux ne dépasse pas n.*

THÉORÈME III. — *Si l'algébroïde* $u(z)$ *à n branches, d'ordre* ρ, *admet comme exceptionnelle l'algébroïde de* $v(z)$ *à m branches d'ordre* $\sigma < \rho$, *définie par une équation irréductible, on a*

$$m \leq n,$$

si l'ordre réel des zéros (ou celui des pôles) de $u(z)$ *est plus petit que* ρ.

18. Les théorèmes concernant les combinaisons exceptionnelles dont les coefficients sont des branches algébriques comportent des extensions que l'on peut établir en suivant la même voie lorsqu'on fixe l'ordre maximum des fonctions entières supposées d'ordre fini. Supposons que les fonctions entières f_0,

$f_1, \ldots, f_n$ soient d'ordre ρ au plus et que l'une d'elles soit effectivement d'ordre ρ. Nous pouvons reprendre nos raisonnements en désignant par g_0, $g_1, \ldots, g_n$ des branches algébroïdes dont l'ordre est inférieur à ρ.

CHAPITRE V.

SUR LES ALGÉBROÏDES EXCEPTIONNELLES OU QUASI EXCEPTIONNELLES POUR UNE ALGÉBROÏDE DONNÉE.

19. Dans ce Chapitre, nous étendons aux fonctions algébroïdes les théorèmes de M. G. Valiron (1) relatifs aux fonctions entières à valeurs exceptionnelles ou quasi exceptionnelles. Un des importants progrès réalisés sur ce sujet qui a fait l'objet des travaux de MM. Carathéodory, Landau, Montel, Bloch et Fatou, dû à M. Valiron, consiste à remplacer la considération des zéros dont l'ordre est multiple d'un entier donné par celle des zéros d'ordre au moins égal à cet entier. Rappelons les résultats de M. Valiron.

Soit $F(z)$, une fonction uniforme admettant le point à l'infini comme point singulier isolé essentiel. On dit (Valiron) que les zéros de $F(z) - x$ sont exceptionnels B (pour la valeur x) lorsque leur ordre réel est inférieur à l'ordre (apparent) de $F(z)$, et que les zéros *d'ordre de multiplicité p* sont exceptionnels B pour la valeur x lorsque l'ordre de la suite de ces zéros de $F(z) - x$ est inférieur à l'ordre de $F(z)$. On a les propositions suivantes (Valiron) :

S'il existe une valeur a pour laquelle *les zéros* sont exceptonnels B, les *zéros simples* ne peuvent être exceptionnels B pour une valeur x distincte de a.

Il ne peut exister plus de deux valeurs a, b pour lesquelles les *zéros simples* soient exceptionnels B.

S'il existe une valeur a pour laquelle les *zéros simples* et les *zéros doubles* sont exceptionnels B, les *zéros simples* ne peuvent *être* exceptionnels B pour x distinct de a.

20. Soient $u(z)$ une fonction transcendante algébroïde d'ordre fini ρ et $v(z)$ une fonction algébroïde (ou algébrique) d'ordre $\sigma < \rho$.

Nous convenons de dire que la fonction $u(z)$ admet $v(z)$ comme fonction quasi exceptionnelle (E_1) lorsque l'ordre réel de la suite des zéros de la fonction $\psi(z) = u(z) - v(z)$, dont l'ordre (2) est plus petit que *deux*, est inférieur à ρ; et que $u(z)$ admet $v(z)$ comme fonction quasi exceptionnelle (E_2)

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 173, 1921, p. 1059-1061.

(2) Précisons ce que nous entendons ici par le mot « ordre » d'un zéro (ξ, η_1) d'une fonction algébroïde $u(z)$: soit $r - 1 \geq 0$, l'ordre de ramification du point (ξ, η_1); dans le domaine de ce point, la

lorsque l'ordre réel des zéros de la fonction $\psi(z)$, dont l'ordre n'est pas plus grand que *deux*, est inférieur à ρ.

Nous dirons enfin qu'une fonction algébroïde est de la classe (A) lorsque l'ordre réel des pôles de sa dérivée est inférieur à l'ordre (apparent) de cette fonction.

Il est évident qu'une fonction entière est de la classe (A).

Dans la suite, *nous supposons* que la fonction transcendante algébroïde $u(z)$ d'ordre ρ *est de la classe* (A) et que *les fonctions exceptionnelles* pour $u(z)$ sont des fonctions *algébroïdes* (ou algébriques) *d'ordre inférieur à* ρ.

THÉORÈME I. — *S'il existe une fonction $v_1(z)$ exceptionnelle au sens Borel-Montel pour $u(z)$, la fonction $u(z)$ ne peut pas admettre une autre fonction $v_2(z)$ quasi exceptionnelle* (E_1).

Supposons que la fonction $u(z)$ admette la fonction $v_1(z)$ comme exceptionnelle au sens Borel-Montel et la fonction $v_2(z)[v_1(z) \not\equiv v_2(z)]$ comme exceptionnelle (E_1).

Les fonctions $\psi_1(z) = u(z) - v_1(z)$, $\psi_2(z) = u(z) - v_2(z)$ sont de la classe (A); l'ordre réelle des pôles de leurs dérivées $\psi_1'(z)$, $\psi_2'(z)$ est inférieur à ρ.

L'ordre réel des zéros de la fonction $\psi_1(z)$ et l'ordre réel des pôles de sa dérivée étant plus petits que ρ, la fonction $\frac{\psi_1'(z)}{\psi_1(z)}$ est d'ordre $\sigma < \rho$ (§ 14, th. I).

Posons

$$(1) \qquad \sqrt{\psi_1(z)} - \sqrt{\psi_2(z)} \equiv G_1(z), \qquad \sqrt{\psi_1(z)} + \sqrt{\psi_2(z)} \equiv G_2(z),$$

les déterminations, pour chaque valeur de z, des expressions $\sqrt{\psi_1(z)}$, $\sqrt{\psi_2(z)}$ étant les mêmes dans les identités ci-dessus. L'ordre réel des pôles et, puisque $G_1(z)G_2(z) \equiv v_2(z) - v_1(z)$, l'ordre réel des zéros des $G_1(z)$, $G_2(z)$ sont inférieurs à ρ. D'ailleurs, puisque l'ordre réel des zéros de $\psi_1(z)$ et l'ordre réel des zéros de $\psi_2(z)$ dont l'ordre est plus petit que deux sont inférieurs à ρ, l'ordre réel des pôles de la dérivée $G_1'(z)$ et celui des pôles de $G_2'(z)$ sont plus petits que ρ; les fonctions $\frac{G_1'(z)}{G_1(z)}$, $\frac{G_2'(z)}{G_2(z)}$ sont d'ordre $< \rho$ (§ 14, th. I).

Des relations (1) on tire

$$2\sqrt{\psi_1(z)} \equiv G_1(z) + G_2(z).$$

---

fonction $u(z)$ sera représentée par un développement de la forme

$$u(z) = c_s(z-\xi)^{\frac{s}{r}} + c_{s+1}(z-\xi)^{\frac{s+1}{r}} + \ldots + c_{s+n}(z-\xi)^{\frac{s+n}{r}} + \ldots \qquad (s = \text{entier} \geq 1,\ c_s \neq 0).$$

C'est le nombre $\frac{s}{r}$ que nous entendons ici par le mot « ordre » du zéro (ξ, η) et non pas le nombre s comme il est adopté généralement.

cette identité exige que l'on ait (§ 16; th. III) (¹)

$$G_1(z) \equiv 2\sqrt{\psi_1(z)}\, g_1(z), \qquad G_2(z) \equiv 2\sqrt{\psi_1(z)}\,[1 - g_1(z)],$$

$g_1(z)$ désignant une fonction d'ordre inférieur à ρ.

Par conséquent, on a

$$\psi_2(z) \equiv \left[\frac{G_2(z) - G_1(z)}{2}\right]^2 \equiv \psi_1(z)\,[1 - 2g_1(z)]^2,$$

et la relation

$$\psi_1(z) - \psi_2(z) \equiv [u(z) - v_1(z)] - [u(z) - v_2(z)] \equiv v_2(z) - v_1(z)$$

s'écrit

$$\psi_1(z) - \psi_1(z)[1 - 2g(z)]^2 \equiv v_2(z) - v_1(z);$$

cette dernière identité exige que l'on ait (§ 16; th. II)

$$v_2(z) \equiv v_1(z),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

THÉORÈME II. — *Il n'existe pas deux fonctions algébroïdes* $v_1(z)$, $v_2(z)[v_1(z) \not\equiv v_2(z)]$ *quasi exceptionnelles respectivement* (E_2), (E_1) *pour* $u(z)$.

Supposons que $u(z)$ admette les fonctions $v_1(z)$, $v_2(z)$ exceptionnelles respectivement (E_2), (E_1). Conservons les notations utilisées pour la démonstration du théorème précédent (I).

Soit z_0 un zéro de $\psi_1(z)$ dont l'ordre est plus grand que deux (²); ce point est aussi un zéro de la fonction $\left[\sqrt{\psi_1(z)}\right]' = \frac{d\sqrt{\psi_1}}{dz}$. On a

$$(2) \qquad 2\sqrt{\psi_1(z_0)} = G_1(z_0) + G_2(z_0) = 0, \qquad G_1'(z_0) + G_2'(z_0) = 0.$$

Les fonctions $\frac{G_1'(z)}{G_1(z)}, \frac{G_2'(z)}{G_2(z)}$ étant d'ordre $< \rho$, on a

$$(3) \qquad G_1'(z) \equiv G_1(z)\gamma_1(z), \qquad G_2'(z) \equiv G_2(z)\gamma_2(z),$$

$\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ désignant des fonctions d'ordre $< \rho$.

Des relations (2) et (3), on tire

$$(4) \qquad G_1(z_0)[\gamma_1(z_0) - \gamma_2(z_0)] = 0.$$

Supposons $\gamma_1(z) \not\equiv \gamma_2(z)$, puisque l'ordre réel des zéros de la fonction $G_1(z)$ et l'ordre (apparent) des fonctions $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ sont inférieurs à ρ, la rela-

(¹) D'après ce qui est dit plus haut, les fonctions $\psi_1(z)$, $G_1(z)$, $G_2(z)$ remplissent les conditions sous lesquelles le théorème mentionné s'applique.

(²) S'il n'y avait pas de tels points, la fonction $v_1(z)$ serait exceptionnelle au sens Borel-Montel et l'on se trouverait dans le cas du théorème démontré.

tion (4) montre que l'ordre réel des zéros de $\psi_1(z)$, dont l'ordre est plus grand que deux, est plus petit que ρ; la fonction $v(z)$ est exceptionnelle au sens Borel-Montel pour $u(z)$. On retombe dans le cas du théorème I.

Si $\gamma_1(z) \equiv \gamma_2(z)$, on a alors

$$\frac{G_1'(z)}{G_1(z)} = \frac{G_2'(z)}{G_2(z)}, \qquad G_2(z) \equiv CG_1(z) \qquad (C \text{ const.});$$

la relation $G_1(z_0) + G_2(z_0) = 0$ s'écrit

$$G_1(z_0)(1 + C) = 0. \tag{5}$$

La constante C ne pouvant être égal à -1, car, autrement, on aurait $2\sqrt{\psi_1(z)} \equiv G_1(z) + G_2(z) \equiv 0$, la relation (5) montre que l'ordre réel des points z_0 est plus petit que ρ; on se retrouve de nouveau dans le cas examiné.

THÉORÈME III. — *Il n'existe pas de fonctions algébroïdes $v(z)$ ayant au moins trois branches distinctes quasi exceptionnelles (E_1) pour $u(z)$.*

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, soient

$$v_1(z), \quad v_2(z), \quad v_3(z), \quad \ldots, \quad v_m(z),$$

les branches distinctes de la fonction $v(z)$ exceptionnelle (E_1) pour $u(z)$. Posons

$$\psi_1(z) \equiv u_1(z) - v_1(z), \qquad \psi_2(z) \equiv u_1(z) - v_2(z),$$
$$\psi_3(z) \equiv u_1(z) - v_3(z), \qquad \ldots, \qquad \psi_m(z) \equiv u_1(z) - v_m(z);$$

$$\sqrt{\psi_1(z)} + \sqrt{\psi_2(z)} \equiv G_1(z), \qquad \sqrt{\psi_1(z)} - \sqrt{\psi_2(z)} \equiv \overline{G}_1(z), \qquad \sqrt{\psi_1(z)} + \sqrt{\psi_3(z)} \equiv G_2(z),$$
$$\sqrt{\psi_1(z)} - \sqrt{\psi_3(z)} \equiv \overline{G}_2(z), \qquad \ldots, \qquad \sqrt{\psi_1(z)} + \sqrt{\psi_m(z)} \equiv G_{m-1}(z),$$
$$\sqrt{\psi_1(z)} - \sqrt{\psi_m(z)} \equiv \overline{G}_{m-1}(z).$$

On démontre encore que l'ordre réel des zéros des fonctions $G_1(z)$, $\overline{G}_1(z)$, $\ldots$, $G_{m-1}(z)$, $\overline{G}_{m-1}(z)$ et celui des pôles de leurs dérivées sont inférieurs à ρ.

On a

$$2\sqrt{\psi_1(z)} \equiv G_1(z) + \overline{G}_1(z) \equiv G_2(z) + \overline{G}_2(z),$$

d'où

$$G_1(z) + \overline{G}_1(z) - G_2(z) - \overline{G}_2(z) \equiv 0. \tag{6}$$

On constate que l'identité (6) ne peut se décomposer en d'autres; par conséquent (§ 16; th. III) les fonctions G_1, $\overline{G}_1$, G_2, $\overline{G}_2$ sont proportionnelles à des fonctions d'ordre $< \rho$; on a ainsi

$$\overline{G}_1(z) = G_1(z)\gamma_1(z)$$

et, par suite,

$$2\sqrt{\psi_1(z)} \equiv G_1(z)\,[1+\gamma_1(z)], \tag{7}$$

où $\gamma_1(z)$ désigne une fonction d'ordre $< \rho$.

La relation (7), puisque l'ordre réel des zéros de $G_1(z)$ est inférieur à ρ et que $\gamma_1(z)$ est d'ordre $< \rho$, nous montre que l'ordre réel des zéros de la fonction $\psi_1(z)$ est plus petit que ρ. Les fonctions (branches) $\psi_1\psi_2, \ldots, \psi_m$ jouant un rôle identique dans nos raisonnements, on en conclut que l'ordre réel des zéros de toutes ces fonctions est inférieur à ρ.

Considérons maintenant l'identité

$$\psi_1(z) - \psi_2(z) \equiv e_2(z) - e_1(z), \tag{8}$$

l'ordre des $e_1(z)$, $e_2(z)$ et l'ordre réel des zéros des ψ_1, ψ_2 et des pôles des $\psi_1' = u_1' - e_1'$, $\psi_2' = u_1' - e_2'$ étant inférieurs à ρ, tandis que l'ordre (apparent) des ψ_1, ψ_2 est égal à ρ, l'identité (8) exige que l'on ait (§ 16; th. II)

$$e_1(z) \equiv e_2(z),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

On obtient les théorèmes mentionnés, dans le cas des fonctions entières d'ordre fini, de M. Valiron, en supposant que la fonction $u(z)$ soit une fonction entière d'ordre ρ et que les fonctions exceptionnelles $e(z)$ se réduisent à des constantes différentes.

Théorème IV. — *Il n'existe pas de fonction $e(z)$ (d'ordre inférieur à ρ) ayant au moins deux branches distinctes exceptionnelles au sens Borel-Montel pour $u(z)$.*

Voici quelques indications sur la démonstration. On supposera qu'il existe une fonction $e(z)$ ayant $m \geq 2$ branches distinctes exceptionnelles au sens Borel-Montel pour $u(z)$ et l'on posera, $u_i(z)$ étant une branche quelconque de $u(z)$,

$$u_i(z) - e_1(z) \equiv G_1(z), \qquad u_i(z) - e_2(z) \equiv G_2(z), \qquad \ldots;$$

on a

$$G_1(z) - G_2(z) \equiv e_2(z) - e_1(z). \tag{9}$$

On constate que l'identité (9) exige que l'on ait

$$e_2(z) \equiv e_1(z).$$

Ce théorème généralise, dans le cas des fonctions d'ordre fini, celui de M. H.-L. Selberg (1), d'après lequel une fonction transcendante algébroïde $u(z)$, dont la dérivée $u'(z)$ est dépourvue de pôles, ne peut admettre plus d'une valeur exceptionnelle (l'infini non compris). Nous voulons clore ce Chapitre en

(1) *Algebroïde Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale*, Oslo, 1934, p. 57-58.

énonçant des théorèmes, dont nous ne donnerons pas la démonstration (leur démonstration est abordable par des procédés calqués sur ceux que nous venons d'employer pour la démonstration des théorèmes précédents) :

THÉORÈME V. — *Il n'existe pas de fonctions algébroïdes $v(z)$ ayant au moins deux branches distinctes quasi exceptionnelles* (E_2) *pour* $u(z)$.

THÉORÈME VI. — *S'il existe une fonction algébroïde $v(z)$ à deux branches distinctes quasi exceptionnelles* (E_1) *pour* $u(z)$; *l'ordre réel des zéros de la fonction* $\psi(z) = u(z) - v(z)$ *dont l'ordre est plus grand que deux est inférieur à* 2.

COROLLAIRE. — *Soit* $F(z)$ *une fonction entière d'ordre fini. S'il existe deux valeurs a, b pour lesquelles les zéros simples des* $F(z) - a$, $F(z) - b$ *sont exceptionnels* B [1]; *les zéros d'ordre de multiplicité* $p \geq 3$ *sont aussi exceptionnels* B [2].

CHAPITRE VI.

SUR LES ALGÉBRIQUES STRICTEMENT EXCEPTIONNELLES POUR UNE ALGÉBRIQUE DONNÉE.

21. Remarquant, dans son article [3] que les seules fonctions entières qui ne peuvent jamais prendre les valeurs d'une fonction algébrique admettant au moins deux branches sont des polynomes, qu'il appelle *exceptionnnels* par rapport à cette algébrique, M. P. Montel pose et résout le problème de trouver les polynomes exceptionnels pour une algébrique donnée.

Ce problème est un cas particulier du suivant :

Étant donnée une fonction algébrique $u(z)$, *trouvez les fonctions algébriques exceptionnelles (au sens strict) pour* $u(z)$.

Est-il possible de résoudre ce problème par des opérations algébriques en nombre fini ?

La réponse paraît négative, du moins dans le cas général. En voici un exemple :

Considérons la fonction $u = \sqrt{R(z)}$, où $R(z)$ est un polynome premier avec sa dérivée; cherchons les fonctions rationnelles $\frac{A(z)}{B(z)}$ exceptionnelles pour $u(z)$,

---

(1) *Voir* les définitions de M. Valiron (§ 19).

(2) Nous croyons que ce théorème est nouveau et qu'il n'est pas une conséquence immédiate des résultats de M. Valiron.

(1) P. MONTEL, *loc. cit.*

$A(z)$ et $B(z)$ désignant des polynomes premiers entre eux. Pour que la fonction $\frac{A(z)}{B(z)}$ soit exceptionnelle pour $u(z)$, il faut et il suffit que l'on ait

$$A^2(z) - B^2(z)\,R(z) \equiv C, \tag{1}$$

C étant une constante non nulle.

L'identité (1) est l'identité d'Abel. Il est clair que, pour qu'il existe deux polynomes A, B vérifiant (1), il est nécessaire que le degré $R(z)$ soit pair. Abel a été amené à cette identité en se posant le problème suivant (1) :

Étant donné un polynome $R(z)$, *premier avec sa dérivée, de degré pair, reconnaître si l'on peut trouver un autre polynome* ρ *tel que l'intégrale* $\int \frac{\rho\,dz}{\sqrt{R}}$ *s'exprime par un logarithme d'une fonction algébrique; il a montré que, si* ρ *existe, l'identité* (1) *est possible et réciproquement.*

En rattachant la solution de ce problème à la théorie des fractions continues algébriques, Abel a donné le critère suivant : *pour qu'il existe un polynome* ρ *répondant à la question, il faut et il suffit que le développement de* $\sqrt{R(z)}$ *en fraction continue algébrique soit périodique. Mais il ne semble pas possible, au moins dans le cas général, de trouver, étant donné* $R(z)$, *une limite pour le nombre des essais à faire pour reconnaître si le développement de* $\sqrt{R(z)}$ *est périodique ou non* (2).

Dans le cas spécial où $R(z)$ est du quatrième degré et ses coefficients sont commensurables ou sont des nombres entiers complexes, le problème a été résolu, au moyen d'un nombre fini d'opérations algébriques, par Tchebycheff (3) et Jolotareff (4).

Sur des problèmes du même genre, I. Dolbnia (5) a obtenu des résultats intéressants.

22. Nous nous proposons d'obtenir la solution, au moyen d'un nombre fini d'opérations algébriques, du problème suivant :

Étant donnée une fonction algébrique $b(z)$, *trouver les fonctions algébriques exceptionnelles au sens strict pour* $b(z)$, *dépourvues de pôles à distance finie et dont les branches forment un seul système circulaire dans le domaine du point* $z = \infty$.

---

(1) N.-H. Abel, *Sur l'intégration de la formule différentielle* $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$, etc. (*Œuvres complètes*, t. I).

(2) Pour plus de détails sur ce sujet, *voir* Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques*, 2e édit., t. I, p. 347-358.

(3) *Journal de Liouville*, 1864.

(4) Voir, *Bull. Sci. math.*, 1879, p. 475-478.

(5) *Œuvres mathématiques*, Hermann, 1913.

Ce problème contient comme cas particulier celui de M. Montel :

Trouver les polynomes exceptionnels au sens strict pour une fonction algébrique donnée.

Considérons d'abord une équation irréductible

$$F(u, z) = u^n + A_1(z)u^{n-1} + \ldots + A_n(z) = 0,$$

les $A_i(z)$ étant des polynomes définissant une fonction algébrique $a(z)$, dépourvue de pôles à distance finie et qui admet le point $z = \infty$ comme point de ramification d'ordre $n - 1$.

LEMME. — *Toute fonction algébrique $b(z)$ exceptionnelle au sens strict pour $a(z)$ est définie par une équation de la forme*

$$E(u, z)F(u, z) + C = 0,$$

$E(u, z)$ *étant un polynome en* u, z *et* C *une constante* $\neq 0$; *la réciproque est évidente.*

Soit $\Phi(u, z) = 0$ l'équation définissant $b(z)$, et $a_1(z)$, $a_2(z)$, ..., $a_n(z)$ les branches de $a(z)$.

On a

$$\Phi[a_1(z), z]\Phi[a_2(z), z], \ldots, \Phi[a_n(z), z] \equiv C,$$

C étant une constante $\neq 0$; les fonctions $\Phi[a_i(z), z]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont les branches d'une fonction algébrique $G(z)$, dépourvue de pôles à distance finie.

Le point $z = \infty$ étant un point de ramification d'ordre $n - 1$, les branches $\Phi[a_i(z), z]$ ont le même développement dans le domaine de ce point et par conséquent puisque l'on a $\Phi[a_1, z], \ldots, \Phi[a_n, z] \equiv C$, $G(z)$ est finie pour $z = \infty$.

La fonction algébrique $G(z)$, dépourvue de pôles à distance finie ou infinie, est une constante. Donc

$$\Phi[a_1, z] = \Phi[a_2, z] = \ldots = \Phi[a_n, z] \equiv C$$

ou

$$\Phi[a_i, z] - C \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après un théorème classique, on a

$$\Phi(u, z) \equiv E(u, z)F(u, z) + C,$$

$E(u, z)$ désignant un polynome en u, z et C une constante.

Ce lemme nous permet d'affirmer, dans certains cas, que deux courbes algébriques ont au moins un point commun à distance finie.

Exemple. — Soit $u(z)$ la fonction algébrique définie par l'équation

$$u^3 - au + bz = 0 \qquad (a, b = \text{const.}\ b \neq 0);$$

le point $z = \infty$ est un point de ramification d'ordre 2.

Il n'existe pas de polynomes, de fonctions rationnelles, ni de fonctions algébriques à deux branches, exceptionnels pour $u(z)$.

Les courbes $u^3 - au + bz = 0$, $P(z)u^2 + Q(z)u + R(z) = 0$ (P, Q, R polynomes) se coupent toujours à distance finie.

Passons maintenant à la solution de notre problème. Soit $b(z)$, une fonction algébrique donnée définie par l'équation

$$\Phi(u, z) = B_0(z)u^m + B_1(z)u^{m-1} + \ldots + B_m(z) = 0.$$

Nous allons montrer que l'on saura toujours reconnaître, au moyen d'un nombre fini d'opérations algébriques, s'il existe des fonctions algébriques $a(z)$, du type considéré, exceptionnelles pour $b(z)$, et donner leur expression.

Soit, en effet, $a(z)$ définie par

$$F(u, z) = u^n + A_1(z)u^{n-1} + \ldots + A_n(z) = 0.$$

D'après le lemme précédent, on aura l'identité

$$\Phi(u, z) \equiv F(u, z)E(u, z) + C. \tag{1}$$

Pour reconnaître, au bout d'un nombre fini d'opérations algébriques, s'il existe des identités de la forme (1) et les déterminer il suffit de limiter le nombre n et les degrés des polynomes $A_i(z)$. On a évidemment $n \leq m$.

Il est aisé de limiter l'ordre *commun* s du pôle $z = \infty$ pour chaque branche $a_i(z)$ de $a(z)$. Écrivons

$$\Phi[a_i(z), z] = B_0(z)a_i^m(z) + B_1(z)a_i^{m-1}(z) + \ldots + a_m(z) \equiv C.$$

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ les degrés des polynomes $B_0(z), B_1(z), \ldots, B_m(z)$. Dans chaque terme de la forme $B_\nu(z)a_i^{m-\nu}(z)$ supposé développé dans le domaine du point $z = \infty$ figure un monome de plus haut degré $\alpha_\nu + (m - \nu)\frac{s}{n}$. Pour que l'expression se réduise à une constante, il faut qu'il y ait au moins deux de ces monomes qui soient semblables, leur degré commun étant supérieur ou égal à celui de tous les autres. On doit donc avoir

$$\alpha_h + (m - h)\frac{s}{n} = \alpha_\nu + (m - \nu)\frac{s}{n},$$

$$\alpha_{h'} + (m - h')\frac{s}{n} \leq \alpha_\nu + (m - \nu)\frac{s}{n} \qquad (h' \neq h).$$

Donc

$$s = \frac{n\alpha_h - n\alpha_\nu}{h - \nu}, \qquad n\alpha_{h'} \leq n\alpha_\nu + (h' - \nu)s.$$

On en déduit que, pour chaque valeur de $n \leq m$, s est égal à la pente d'un des côtés du polygone de Newton formé avec les points $(i, n\alpha_i)$. Si tous les côtés de ce polygone correspondant à la valeur n_0 de $n \leq m$ ont des pentes négatives ou fractionnaires, il n'existe pas de fonction $a(z)$ à n_0 branches.

Les nombres n, s étant limités, les relations

$$\Sigma a_1(z), \ldots, a_j(z) = (-1)^j A_j(z) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

nous permettent de limiter les degrés μ_j des polynomes $A_j (j = 1, 2, \ldots, n)$, on a

$$\mu_j \leq j \frac{s}{n}.$$

23. Supposons que, $R(z)$ étant donné et supposé premier avec sa dérivée, l'identité d'Abel admette une solution $A_1(z)$, $B_1(z)$. Soit m le maximum des nombres entiers donnant lieu à une identité de la forme

$$A_1(z) + B_1(z)\sqrt{R(z)} \equiv [A_0(z) + B_0(z)\sqrt{R}]^m,$$

$A_0(z)$, $B_0(z)$ désignant des polynomes (on a $[A_0^2(z) - B_0^2(z)]^m \equiv 1$); choisissons $A_0(z)$, $B_0(z)$ tels que l'on ait

$$A_0^2(z) - B_0^2(z) R(z) \equiv 1.$$

Nous allons voir que la formule

$$A(z) + B(z)\sqrt{R(z)} \equiv \pm [A_0(z) + B_0(z)\sqrt{R(z)}]^m$$

donne, en y faisant $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, la solution générale.

En effet, soient $A(z)$, $B(z)$ deux polynomes vérifiant l'identité d'Abel.

Le degré du polynome $R(z)$ étant pair, la surface de Riemann correspondant à l'algébrique $u = \sqrt{R(z)}$ a deux points distincts ∞_1, ∞_2 à l'infini.

Les fonctions algébriques $F(z) = A(z) + B(z)u$, $\Phi(z) = A_0(z) + B_0(z)u$ sont dépourvues de pôles et de zéros à distance finie. Soient s_1, s_0 les ordres de ∞_1 (pôle ou zéro) respectivement pour $F(z)$, $\Phi(z)$; $-s_1$, $-s_0$ seront ceux de ∞_2 (1). La fonction algébrique $\frac{[F(z)]^{s_0}}{[\Phi(z)]^{s_1}}$ est régulière partout. Donc

$$F(z) \equiv [C[\Phi(z)]^{s_1}]^{\frac{1}{s_0}}.$$

La fonction $\Phi(z) = A_0(z) + B_0(z)u$ ne pouvant pas vérifier une identité de la forme

$$A_0(z) + B_0(z)u \equiv [\Gamma_0(z) + \Delta_0(z)u]^n,$$

$\Gamma_0(z)$, $\Delta_0(z)$ désignant des polynomes et n un nombre entier > 1, des considérations élémentaires, que nous omettons pour abréger, montrent que $\frac{s_1}{s_0}$ doit être un entier et que l'identité $F(z) \equiv [C[\Phi(z)]^{s_1}]^{\frac{1}{s_0}}$ pourra s'écrire sous la

(1) Les nombres s_1 et s_0 sont entiers.

forme

$$A(z)+B(z)u\equiv\varepsilon[A_0(z)+B_0(z)u]^n,$$

où n est un entier et $\varepsilon=\pm 1$. Cette formule est analogue à celle qui donne la solution générale de l'équation arithmétique de Fermat

$$x^2-Ky^2=1.$$

CHAPITRE VII.

SUR LES INTÉGRALES PSEUDO-ABÉLIENNES.

24. Soit $G(z)$ une fonction algébroïde d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles, de zéros et de points de ramification; la dérivée logarithmique $\frac{G'(z)}{G(z)}$ étant une fonction algébrique (§ 3), la fonction $H(z)=\log G(z)$ est une intégrale abélienne.

Cette remarque nous a conduit à traiter quelques questions concernant les intégrales que nous appelons pseudo-abéliennes. Ce sont des intégrales abéliennes qui s'expriment par une somme de logarithmes de fonctions algébroïdes ou algébriques.

Avant de passer à l'étude des intégrales pseudo-abéliennes nous rappellerons quelques notions sur les intégrales abéliennes attachées à une courbe algébrique donnée.

Soit $F(u,z)=0$ une équation algébrique entière irréductible, de degré m par rapport à u, s la surface de Riemann correspondante, composée de m feuillets plans, de genre p, et $u(z)$ la fonction algébrique définie par cette équation.

On rend la surface s simplement connexe par un système de p rétrosections (a_ν,b_ν) $(\nu=1,2,\ldots,p)$ reliées à la manière d'une chaîne par des coupures auxiliaires. Un point analytique (z,u) de cette surface est obtenu en associant une valeur quelconque z à une des m valeurs correspondantes de u. A la courbe $F(u,z)=0$ sont attachées p intégrales normales $W^{(1)}(z,u),\ldots,W^{(p)}(z,u)$ de première espèce linéairement indépendantes.

Le tableau suivant donne les modules de périodicité de ces intégrales :

	a_1.	a_2.	...	a_p.	b_1.	b_2.	...	b_p.
$W^{(1)}$	$2\pi i$	0	0...	0	$2\alpha_{11}$	$2\alpha_{12}$	...	$2\alpha_{1p}$
$W^{(2)}$	0	$2\pi i$	0...	0	$2\alpha_{21}$	$2\alpha_{22}$	...	$2\alpha_{2p}$
....	...	...	....	...	....	....	...	....
$W^{(p)}$	0	0	....	$2\pi i$	$2\alpha_{p1}$	$2\alpha_{p2}$	...	$2\alpha_{pp}$

$(\alpha_{mn}=\alpha_{nm})$;

les modules de périodicité de chaque intégrale $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, ..., $W^{(p)}$ sont inscrits sur une même ligne et, dans une même colonne, sont inscrits les modules relatifs à chaque coupure a_m ou b_m.

Appelons $\Pi_{(\alpha,\beta)}^{(\alpha',\beta')}(z, u)$ l'intégrale normale de troisième espèce, attachée à la même courbe, ayant comme points singuliers logarithmiques les points (α, β), (α', β'). Les modules de périodicité de cette intégrale sont

Sur les coupures $a_i (i = 1, 2, \ldots, p)$	0
Sur une coupure $b_i (i = 1, 2, \ldots, p)$	$W^{(i)}(\alpha', \beta') - W^{(i)}(\alpha, \beta)$
Modules correspondant aux points (α, β), (α', β')	$2\pi i$

Soient enfin $Z(z, u; \xi, \eta)$, $Z^{(1)}(z, u; \xi, \eta)$, ..., $Z^{(\nu)}(z, u; \xi, \eta)$ les intégrales normales de deuxième espèce ayant le seul pôle (ξ, η) avec respectivement les parties principales $\frac{1}{(z-\xi)^{\frac{1}{r}}}$, $\frac{1}{(z-\xi)^{\frac{2}{r}}}$, ..., $\frac{1.2\ldots\nu}{(z-\xi)^{\frac{\nu+1}{r}}}$, où r désigne le nombre de feuillets passant par le point (ξ, η); si $\xi = \infty$, il faut remplacer $z - \infty$ par $\frac{1}{z}$.

Les modules de périodicité de ces intégrales le long des coupures a sont tous nuls.

Soit

$$W^{(i)}(z, u) = W^{(i)}(\xi, \eta) + (z-\xi)^{\frac{1}{r}}\varphi_i(\xi, \eta) + \frac{(z-\xi)^{\frac{2}{r}}}{1.2}\varphi_i^{(1)}(\xi, \eta) + \ldots + \frac{(z-\xi)^{\frac{\nu+1}{r}}}{1.2\ldots(\nu+1)}\varphi_i^{(\nu)}(\xi, \eta) + \ldots,$$

le développement d'une intégrale $W^{(i)}(i = 1, 2, \ldots, \rho)$ dans le domaine du point (ξ, η); les modules de périodicité des intégrales Z, $Z^{(1)}$, ..., $Z^{(\nu)}$ le long d'une coupure $b_i (i = 1; 2, \ldots, \rho)$ sont respectivement $-\varphi_i(\xi, \eta)$, $-\varphi_i^{(1)}(\xi, \eta)$, ..., $-\varphi_i^{(\nu)}(\xi, \eta)$.

Les quantités $\varphi_i(\xi, \eta)$, $\varphi_i^{(1)}(\xi, \eta, \ldots, \varphi_i^{(\nu)}(\xi, \eta)$, ... sont les valeurs des dérivées successives de l'intégrale $W_i(z, u)$ au point (ξ, η) lorsque ce point n'est pas un point de ramification, ni un point à l'infini; en général leur signification résulte du développement écrit plus haut pour cette intégrale.

On dit que N intégrales $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$ abéliennes, composées uniquement d'intégrales de première et de seconde espèce sont *algébriquement distinctes* s'il n'existe aucune combinaison linéaire à coefficients constants, non tous nuls, telle que

$$W = A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 + \ldots + A_N\zeta_N$$

qui se réduise à une fonction rationnelle de z et de u. On dit aussi que $2p$ intégrales algébriquement distinctes $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2p}$ forment un *système fondamental*. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le déterminant d'ordre $2p$ formé par les $(2p)^2$ périodes de ces $2p$ intégrales soit différent de zéro.

On démontre que :

Toute intégrale abélienne, n'ayant aucun point critique logarithmique, est égale à une combinaison linéaire à coefficients constants des $2p$ intégrales $\zeta_1, \ldots, \zeta_{2p}$ formant un système fondamental augmentée d'une fonction rationnelle de z et de u.

25. Théorème. — *Soit (ξ, η_1) un point analytique donné, d'ordre de ramification $r-1$, à distance finie ou infinie; il existe un système de p intégrales normales de seconde espèce, $Z^{\mu_1}(z, u; \xi, \eta_1)$, $Z^{\mu_2}(z, u; \xi, \eta_1)$, $\ldots$, $Z^{\mu_p}(z, u; \xi, \eta)$, formant avec les intégrales normales de première espèce $W^{(1)}, W^{(2)}, \ldots, W^{(p)}$ un système fondamental.*

Il suffit de démontrer qu'il existe un système de p intégrales

$$Z^{(\mu_1)}(z, u; \xi, \eta_1), \quad \ldots, \quad Z^{(\mu_p)}(z, u; \xi, \eta_1),$$

tel que le déterminant d'ordre p formé par les p^2 modules de périodicités de ces p intégrales soit différent de zéro.

Considérons le tableau

$$\left\| \begin{array}{cccc} \varphi_1(\xi, \eta_1) & \varphi_1^{(1)}(\xi, \eta_1) & \ldots & \varphi_1^{(i)}(\xi, \eta_1) \quad \ldots \\ \varphi_2(\xi, \eta_1) & \varphi_2^{(1)}(\xi, \eta_1) & \ldots & \varphi_2^{(i)}(\xi, \eta_1) \quad \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \quad \ldots \\ \varphi_p(\xi, \eta_1) & \varphi_p^{(1)}(\xi, \eta_1) & \ldots & \varphi_p^{(i)}(\xi, \eta_1) \quad \ldots \end{array} \right\|$$

à p lignes et un nombre infini de colonnes, formé par les modules de périodicité des intégrales $Z(z, u; \xi, \eta_1)$, $Z^{(1)}(z, u; \xi, \eta_1)$, $\ldots$, $Z^{(i)}(z, u; \xi, \eta_1)$, $\ldots$, les modules de périodicité de l'intégrale $Z^{(i)}(z, u; \xi, \eta_1)$ étant inscrites dans la même $(i+1)^{\text{ième}}$ colonne. Nous allons démontrer que l'on peut extraire de ce tableau au moins un déterminant d'ordre p, en prenant les éléments communs à un nombre p de colonnes et aux p lignes qui ne soit pas nul. En effet, si tous les déterminants d'ordre p, extraits du tableau considéré, étaient nuls, il existerait un système de p constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non toutes nulles, tel que l'on ait

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \varphi_1(\xi, \eta_1) + \lambda_2 \varphi_2(\xi, \eta_1) + \ldots + \lambda_p \varphi_p(\xi, \eta_1) = 0, \\ \lambda_1 \varphi_1^{(1)}(\xi, \eta_1) + \lambda_2 \varphi_2^{(1)}(\xi, \eta_1) + \ldots + \lambda_p \varphi_p^{(1)}(\xi, \eta_1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \lambda_1 \varphi_1^{(i)}(\xi, \eta_1) + \lambda_2 \varphi_2^{(i)}(\xi, \eta_1) + \ldots + \lambda_p \varphi_p^{(i)}(\xi, \eta_1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array} \right.$$

en prenant en considération les relations (1), en nombre infini, et les p développements

$$W^{(i)}(z, u) = W^{(i)}(\xi, \eta_1) + (z-\xi)^{\frac{1}{r}} \varphi_i(\xi, \eta_1) + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

des p intégrales normales $W^{(i)}(z, u)$ $(i = 1, \ldots, p)$, linéairement indépendantes,

on obtient la relation

$$\lambda_1 W^{(1)}(z, u) + \lambda_2 W^{(2)}(z, u) + \ldots + \lambda_p W^{(p)}(z, u) = \lambda_1 W^{(1)}(\xi, \eta) + \lambda_2 W^{(2)}(\xi, \eta) + \ldots + \lambda_p W^{(p)}(\xi, \eta),$$

ce qui est absurde. La proposition énoncée est donc établie.

26. Soit $v(z)$ une algébroïde transcendante (d'ordre fini ou non), définie par une équation irréductible, ayant m branches et un nombre *fini* de points de ramification. On peut former, comme l'on fait dans le cas d'une fonction algébrique, une surface S, composée de m feuillets superposés ayant un nombre limité de lignes de croisement sur laquelle $v(z)$ est uniforme. A cette surface S, d'après un théorème classique, correspond une fonction algébrique $u(z)$ (une classe de fonctions algébriques) ramifiée de la même manière que $v(z)$; la fonction $v(z)$ est une fonction uniforme du point analytique $z(u)$: on a

$$v(z) = f_0(z) + f_1(z)\, u(z) + \ldots + f_{m-1}(z)\, u^{m-1}(z),$$

$f_0(z), f_1(z), \ldots, f_{m-1}(z)$ désignant des fonctions méromorphes.

La fonction $v(z)$ étant une fonction uniforme du point analytique (z, u), considérons l'intégrale

$$I(z, u) = \int_{v_0(z_0)}^{v(z)} v(z)\, dz = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} E(z, u)\, dz,$$

où $v_0(z_0) = E(z_0, u_0)$, $v(z) = E(z, u)$, $E(z, u)$ étant le polynome de $u(z)$ à coefficients des fonctions méromorphes donnant les valeurs de $v(z)$.

Nous supposons la limite inférieure placée en un point analytique déterminé (z_0, u_0), et l'intégration effectuée le long d'une certaine courbe tracée sur la surface S et aboutissant au point analytique (z, u) qui forme la limite supérieure. Il est évident que l'on peut établir pour cette intégrale des propriétés analogues à celles d'une intégrale abélienne attachée à une fonction algébrique :

1° *la valeur de l'intégrale* $I(z, u)$ *dépend, du chemin d'intégration allant du point* (z_0, u_0) *au point* (z, u); *quand, ces points restant fixes, le chemin d'intégration varie, les différentes valeurs que peut acquérir l'intégrale ne diffèrent que par certaines constantes additives, les modules de périodicité.*

2° *Les périodes sont de deux sortes. Les unes, périodes polaires, proviennent de points singuliers logarithmiques de* $I(z, u)$; *elles peuvent être en nombre infini. Les autres périodes, cycliques en nombre* $2p$, *proviennent de coupures* (1) $a_1, a_2, \ldots, a_p; b_1, b_2, \ldots, b_p$.

3° *Si l'intégrale* $\int_{v_0}^{v} v\, dz = \int_{z_0, u_0}^{z, u} E(z, u)\, dz$ *est dépourvue de points critiques*

(1) Ces coupures ont la même signification que celles du paragraphe 24.

logarithmiques, elle s'exprime par une combinaison linéaire à coefficients constants des $2p$ *intégrales abéliennes* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2p}$ [*attachées à la fonction algébrique* $u(z)$] *formant un système fondamental augmenté d'une fonction algébroïde uniforme sur la surface* S.

27. Passons maintenant à l'étude des intégrales pseudo-abéliennes. Nous gardons les notations du paragraphe 24. Soit

$$I = \int R(z, u)\, dz$$

une intégrale abélienne attachée à la courbe $F(u, z) = 0$, où $R(z, u)$ est une fonction rationnelle de z et de u. Supposons que l'intégrale considérée s'exprime par une somme de logarithmes de fonctions algébroïdes (ou algébriques), d'ordre fini ou infini, uniformes sur la surface S, c'est-à-dire que l'on ait

$$(1) \qquad I = \int R(z, u)\, dz = C_1 \log v_1(z) + C_2 \log v_2(z) + \ldots + C_\mu \log v_\mu(z),$$

$C_1, C_2, \ldots, C_\mu$ étant des constantes, et $v_1(z), v_2(z), \ldots, v_\mu(z)$ étant des fonctions algébroïdes uniformes sur la surface S. Les points singuliers de l'intégrale I, qui sont à distance finie, proviennent de zéros et de pôles des fonctions $v_i(z)$. Donc, cette intégrale doit être dépourvue de pôles à distance finie; *tous les points singuliers à distance finie de* I *sont des points singuliers logarithmiques*. Il est loisible d'admettre qu'il n'existe entre les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_\mu$, aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers; si, en effet, il existait une pareille relation

$$m_1 C_1 + m_2 C_2 + \ldots + m_\mu C_\mu = 0,$$

où l'un au moins des coefficients, m_μ par exemple, est différent de zéro, on en tirerait

$$C_\mu = -\frac{m_1 C_1 + m_2 C_2 + \ldots + m_{\mu-1} C_{\mu-1}}{m_\mu},$$

et l'expression (1) pourrait s'écrire

$$I = \frac{C_1}{m_\mu} \log\left(\frac{v_1^{m_1}}{v_\mu^{m_1}}\right) + \ldots + \frac{C_{\mu-1}}{m_\mu} \log\left(\frac{v_{\mu-1}^{m_{\mu-1}}}{v_\mu^{m_{\mu-1}}}\right).$$

La nouvelle formule, dans laquelle les fonctions figurant avec leur logarithme sont évidemment des fonctions algébroïdes uniformes sur S, contient un logarithme de moins que la précédente. Si donc on suppose qu'on a réduit, de cette façon, autant que possible le nombre des logarithmes, il ne peut exister entre les constantes C_i aucune relation de la forme indiquée; *c'est ce que nous admettrons désormais*.

Démontrons que chacune des fonctions $v_i(z)$ a un nombre fini de zéros et de pôles. Pour cela, étant donné que le nombre des points singuliers d'une intégrale abélienne est fini, il suffit de démontrer que chaque zéro ou pôle d'une ou plusieurs fonctions v_i est un point singulier pour l'intégrale $\int R(z, u)\,dz$. Soit (ξ, η_1) un zéro ou pôle des fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$ $(\lambda \leq \mu)$ d'ordre respectivement $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\lambda$; $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\lambda$ sont des nombres entiers, positifs ou négatifs. Dans le domaine du point (ξ, η), on a

$$\begin{aligned}\int R(z, u)\,dz &= C_1 \log(z-\xi)^{\nu_1} + C_2 \log(z-\xi)^{\nu_2} + \ldots + C_\lambda \log(z-\xi)^{\nu_\lambda} \\ &\quad + \text{fonction régulière} = (C_1\nu_1 + C_2\nu_2 + \ldots + C_\lambda\nu_\lambda)\log(z-a) \\ &\quad + \text{fonction régulière.}\end{aligned}$$

La relation écrite ci-dessus montre, étant donné que la quantité $C_1\nu_1 + \ldots + C_\lambda\nu_\lambda$ ne peut être égal à zéro (après la supposition faite sur les C_i), que le point (ξ, η_1) est un point singulier logarithmique pour l'intégrale $\int R(z, u)\,dz$. Notre proposition est donc établie.

On en conclut que la dérivée logarithmique $\frac{v_i'(z)}{v_i(z)} = \gamma_i(z)$ est une fonction ayant un nombre fini de pôles et, par conséquent, un point ∞_1 à l'infini de la surface S est pour la fonction $\gamma_i(z)$ ou un point régulier, ou un point singulier isolé; on peut parler du développement et en série de $\frac{v_i'(z)}{v_i(z)}$ dans le domaine d'un point quelconque, à distance finie ou infinie, de la surface S.

Soient $(\xi_1, \eta_{11}), (\xi_2, \eta_{12}), \ldots, (\xi_\rho, \eta_{1\rho})$ l'ensemble des zéros et des pôles à distance finie de la fonction $v_i(z)$ d'ordre respectivement $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho$; ces nombres entiers sont les résidus de la fonction $\gamma_i(z) = \frac{v_i'(z)}{v_i(z)}$ respectivement au points $(\xi_1, \eta_{11}), (\xi_2, \eta_{12}), \ldots, (\xi_\rho, \eta_{1\rho})$.

Soient aussi $s_1, s_2, \ldots, s_\sigma$ les résidus de la fonction $\gamma_i(z)$ respectivement aux points à l'infini $\infty_1, \infty_2, \ldots, \infty_\sigma$ de la surface S; *les nombres s_i sont entiers*. En effet, le résidu s_i est égal à la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{v_i'}{v_i}dz = \frac{1}{2\pi i}\int d[\log v_i(z)]$, prise dans le sens positif sur une circonférence tracée dans le domaine du point ∞_i et entourant ce point, cette circonférence étant parcourue un nombre de fois égal au nombre des feuillets passant par le point ∞_i; or, il est connu que la valeur de cette intégrale est un nombre entier.

La fonction $\frac{v_i'(z)}{v_i(z)}$ étant uniforme sur la surface S et ayant un nombre fini de points singuliers, la somme de ses résidus en tous les points de S doit être égale à zéro; donc, on a

$$(2) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\rho + s_1 + s_2 + \ldots + s_\sigma = 0.$$

Appelons c_{i_0} la valeur de $c_i(z)$ au point (z_0, u_0); on a

$$\log\frac{c_i}{c_{i_0}} = \int_{(z_0,u_0)}^{(z,u)} \frac{c_i'}{c_i}\,dz.$$

La différence

$$J = \int_{(z_0,u_0)}^{(z,u)} \frac{c_i'}{c_i}\,dz - \mu_1 \Pi_{x_\sigma}^{\xi_{11},\gamma_{11}} - \mu_2 \Pi_{x_\sigma}^{\xi_{21},\gamma_{12}} - \ldots - \mu_\rho \Pi_{x_\sigma}^{\xi_{\rho 1},\gamma_{\rho 1}} - s_1 \Pi_{x_\sigma}^{x_1} - \ldots - s_{\sigma-1}\Pi_{x_\sigma}^{x_{\sigma-1}}$$

est dépourvue de points singuliers logarithmiques à distance finie ou infinie (et de pôles à distance finie). Soit $Z^{(\mu_1)}(z, u; x_1)$, $Z^{(\mu_2)}(z, u; x_1)$, ..., $Z^{(\mu_p)}(z, u; x_1)$, $W^{(1)}(z, u)$, $W^{(2)}(z, u)$, ..., $W^{(p)}(z, u)$ un système fondamental formé par p intégrales normales de deuxième espèce admettant comme pôle un des points à l'infini, le x_1 par exemple, et les p intégrales normales de première espèce W^1, ..., W^p; nous avons vu (§ 25) qu'un tel système existe. L'intégrale J, dépourvue des points singuliers logarithmiques, peut s'exprimer (§ 26) par une combinaison linéaire à coefficients constants de ces $2p$ intégrales $Z^{(\mu_1)}$, ..., $Z^{(\mu_p)}$, $W^{(1)}$, ..., $W^{(p)}$ augmentée d'une fonction algébroïde $g_i(z)$ uniforme sur la surface S; *on voit tout de suite que cette fonction $g_i(z)$ ne peut avoir de pôles à distance finie.* Donc, on a

$$\log\frac{c_i}{c_{i_0}} = \sum_{j=1}^{\rho} \mu_j \Pi_{x_\sigma}^{\xi_{ji},\gamma_{ij}} + \sum_{j=1}^{\sigma-1} s_j \Pi_{x_\sigma}^{x_j} + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j W^j + \sum_{j=1}^{p} \delta_j Z^{(\mu_j)}(z, u; x_1) + g_i(z),$$

d'où

$$c_i(z) = c_{i_0}\, e^{\sum_1^{\rho} \mu_j \Pi_{x_\sigma}^{\xi_{ji},\gamma_{ij}} + \sum_1^{\sigma-1} s_j \Pi_{x_\sigma}^{x_j} + \sum_1^{p} \varepsilon_j W^j + \sum_1^{p} \delta_j Z^{(\mu_j)}(z,u;x_1)}\, e^{g_i(z)}, \tag{3}$$

où les ε_j, δ_j sont des constantes; les fonctions $c_i(z)$, $e^{\alpha_i(z)}$ étant des algébroïdes uniformes sur la surface S, la fonction

$$A_i(z) = c_{i_0}\, e^{\Sigma \mu_j \Pi_{x_\sigma}^{\xi_{ji},\gamma_{ij}} + \ldots} = c_{i_0}\, e^{B_i(z)} \qquad (B_i = \Sigma \mu_j \Pi_{x_\sigma}^{\xi_{ji},\gamma_{ij}} + \ldots) \tag{4}$$

est aussi une fonction algébroïde uniforme sur S, c'est-à-dire toutes les périodes que la fonction $B_i(z)$ puisse avoir sont des multiples entiers de $2\pi i$. Les points singuliers à distance finie de $B_i(z)$ étant des points critiques logarithmiques et ceux à distance infinie étant des pôles ou (et) des points critiques logarithmiques, nous concluons que l'algébroïde $A_i(z)$ *est d'ordre fini. Ainsi nous avons démontré que les fonctions $c_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ figurant dans la relation* (1) *sont de la forme*

$$c_i(z) = A_i(z)\, e^{\alpha_i(z)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{5}$$

où $A_i(z)$ est une algébroïde d'ordre fini uniforme sur S, *et $g_i(z)$ est une fonction algébroïde dépourvue de pôles à distance finie uniforme sur la surface* S.

La relation (1) peut s'écrire

$$\int R(z, u)\,dz = C_1 \log A_1(z) + C_2 \log A_2(z) + \dots + C_\mu \log A_\mu(z) + C_1 g_1(z) + C_2 g_2(z) + \dots + C_\mu g_\mu(z).$$

Les fonctions $\log A_i(z) = \int \frac{A_i'(z)}{A_i(z)} dz$ étant des intégrales abéliennes, car les $A_i(z)$ sont d'ordre fini et ont un nombre fini de zéros, de pôles et de points de ramification, la relation ci-dessus montre que la fonction

$$g(z) = C_1 g_1(z) + C_2 g_2(z) + \dots + g_\mu(z)$$

est dépourvue de points singuliers essentiels; donc, cette fonction $g(z)$ est une fonction algébrique uniforme sur S *et dépourvue de pôles, à distance finie.* En écrivant maintenant la relation (5) sous la forme

$$(6) \qquad \int R(z, u)\,dz = C_1 \log A_1(z) + C_2 \log A_2(z) + \dots + C_\mu \log[A_\mu(z)\, e^{g(z)}],$$

nous pouvons énoncer ce théorème général :

THÉORÈME. — *Si l'intégrale* $I = \int R(z, u)\,dz$ *peut être exprimée au moyen d'une somme de logarithmes des fonctions $v_i(z)$ algébroïdes uniformes sur* S, *on pourra toujours supposer que ces fonctions $v_i(z)$ sont d'ordre fini et qu'elles ont un nombre fini de pôles et de zéros.*

28. *Remarque.* — La condition imposée *a priori*, de l'uniformité sur S des fonctions $v_i(z)$ n'est pas indispensable : en effet, on peut démontrer que, si l'intégrale considérée s'exprime par une somme de logarithmes de fonctions algébroïdes, on pourra toujours supposer que ces fonctions sont uniformes sur S. Voici une démonstration de cette proposition dans le cas particulier où l'intégrale $I = \int R(z, u)\,dz$ s'exprime par un seul logarithme d'une fonction algébroïde $v(z)$ (1), de sorte que l'on ait

$$(a) \qquad I = \int R(z, u)\,dz = C \log v(z) \qquad (C = \text{const.})$$

On a

$$v(z) = e^{\frac{1}{C}\int R(z, u)\,dz};$$

la fonction algébroïde $v(z)$ ayant, en chaque point z, un nombre fini de déterminations, toutes les périodes de l'intégrale $J = \frac{1}{C}\int R(z, u)$ doivent être

(1) On remarquera que cette fonction est nécessairement d'ordre fini et a un nombre fini de zéros et de pôles.

commensurables avec $2\pi i$ et, par suite, il existe un entier n tel que toutes les périodes de l'intégrale $n\mathrm{J}$ soient des multiples entiers de $2\pi i$. Pour un tel nombre n les différentes valeurs de $n\mathrm{J} = \frac{n}{\mathrm{C}}\int \mathrm{R}(z, u)\,dz$, en chaque point analytique (z, u), ne diffèrent que par des multiples entiers de $2\pi i$ et, par conséquent, la fonction $[v(z)]^n = e^{\frac{n}{\mathrm{C}}\int \mathrm{R}(z,u)\,dz} = \mathrm{V}(z)$ est une fonction uniforme du point (z, u); la démonstration s'achève en écrivant la relation (a) sous la forme

$$(b) \qquad \int \mathrm{R}(z, u)\,dz = \frac{\mathrm{C}}{n}\log[v(z)]^n = \frac{\mathrm{C}}{n}\log \mathrm{V}(z).$$

29. Comme application de la théorie précédente, traitons le problème suivant (extension du problème d'Abel; § 21) :

Étant donné un polynome $\mathrm{R}(z)$, *premier avec sa dérivée, trouver la forme générale du polynome* $\rho(z)$ *tel que l'intégrale* $\int \frac{\rho(z)}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}\,dz$ *puisse s'exprimer au moyen du logarithme d'une fonction algébroïde transcendante.*

Soit $\rho(z)$ un polynome tel que l'on ait

$$(1) \qquad \int \frac{\rho(z)}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}\,dz = \mathrm{A}\log v(z) \qquad (\mathrm{A\ const.}),$$

où $v(z)$ désigne une fonction algébroïde, nécessairement d'ordre fini, que l'on peut supposer (§ 28), *et nous le supposons*, uniforme sur la surface S, à deux feuillets, correspondant à la fonction $u(z) = \sqrt{\mathrm{R}(z)}$. En prenant en considération que l'intégrale $\int \frac{\rho(z)}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}\,dz$ est dépourvue de singularités à distance finie, on démontre aisément que la fonction $v(z)$ doit être de la forme

$$v(z) = f_1(z) + f_2(z)\,u(z) \qquad [u(z) = \sqrt{\mathrm{R}(z)}],$$

où $f_1(z)$, $f_2(z)$ désignent des fonctions entières d'ordre fini.

Soient $u_1(z)$, $u_2(z) = -u_1(z)$ les deux valeurs, en un point quelconque z, de $u(z)$ et $v_1(z) = f_1(z) + f_2(z)\,u_1(z)$, $v_2(z) = f_1(z) + f_2(z)\,u_2(z)$ les deux valeurs correspondantes de $v(z)$; d'après la relation (1), on a

$$\frac{v_1'(z)}{v_1(z)} + \frac{v_2'(z)}{v_2(z)} \equiv \frac{1}{\mathrm{A}}\left[\frac{\rho(z)}{u_1(z)} + \frac{\rho(z)}{u_2(z)}\right] \equiv 0,$$

et, par suite, le produit

$$[f_1(z) + f_2(z)\,u_1(z)][f_1(z) + f_2(z)\,u_2(z)] \equiv f_1^2(z) - f_2^2(z)\,\mathrm{R}(z)$$

doit être égal à une constante que l'on peut supposer égale à l'unité. Donc, les

fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$ doivent vérifier l'identité

$$f_1^2(z) - f_2^2(z)\,\mathrm{R}(z) \equiv 1. \tag{2}$$

Inversement, si deux fonctions entières $f_1(z)$, $f_2(z)$, d'ordre fini, donnent lieu à l'identité (2), on en déduit une solution du problème proposé. En effet, soient $f_1(z)$, $f_2(z)$ deux telles fonctions. La fonction

$$\varphi(z) = f_1(z) + f_2(z)\,u(z) \qquad (u = \sqrt{\mathrm{R}}),$$

est une algébroïde d'ordre fini, dépourvue de zéros et de pôles à distance finie, et ayant un nombre fini de points de ramification; par conséquent, sa dérivée logarithmique doit être une fonction algébrique. Cherchons la forme de cette fonction algébrique : on a

$$\begin{aligned}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} &= \frac{f_1 + f_2 u + \frac{1}{2u} f_2 \mathrm{R}'}{(f_1 + f_2 u)(f_1 - f_2 u)}(f_1 - f_2 u) = f_1 f_1' - f_2 f_2' \mathrm{R} - \frac{1}{2} f_2^2 \mathrm{R}' \\ &\quad + f_1 f_2' u + \frac{1}{2u} f_1 f_2 \mathrm{R}' - f_1' f_2 u = \frac{1}{2}[f_1^2 - f_2^2 \mathrm{R}]' \\ &\quad + \frac{1}{u}\left[(f_1 f_2' - f_1' f_2)\mathrm{R} + \frac{1}{2} f_1 f_2 \mathrm{R}'\right] = \frac{1}{u}\left[(f_1 f_2' - f_1' f_2)\mathrm{R} + \frac{1}{2} f_1 f_2 \mathrm{R}'\right];\end{aligned}$$

puisque $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ est une fonction algébrique, la fonction qui entre dans le dernier crochet doit être un polynome $\rho(z)$. On a ainsi

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\rho(z)}{u(z)}, \qquad \log\varphi(z) = \int \frac{\rho(z)}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}\,dz = \log[f_1(z) + f_2(z)\sqrt{\mathrm{R}(z)}].$$

Soit s le degré du polynome $\mathrm{R}(z)$, σ celui du polynome $\rho(z)$ correspondant à un couple de fonctions entières $f_1(z)$, $f_2(z)$ d'ordre m vérifiant l'identité (2); on a

$$f_1(z) + f_2(z)\,u(z) = e^{\int \frac{\rho(z)\,dz}{u(z)}}. \tag{3}$$

Pour $|z| = r \to \infty$, le maximum de la partie réelle de l'intégrale $\int \frac{\rho(z)\,dz}{u(z)}$ étant de l'ordre de $r^{\sigma - \frac{s}{2} + 1}$, la relation ci-dessus (3) nous donne

$$m = \sigma - \frac{s}{2} + 1.$$

On en conclut que m doit être un nombre entier si s est pair, et de la forme $m = \frac{2l+1}{2}$ (l entier non négatif), si s est impair. Par exemple, il n'existe pas de fonctions entières f_1, f_2, dont l'ordre est un nombre entier, vérifiant l'identité (1), si $s = 2p + 1$ (p entier).

Dans la suite, nous distinguons deux cas suivant la parité de s.

a. Soit $s = 2p + 2$.

Il y a deux points analytiques à l'infini ∞_1, ∞_2. Soient

$$W^{(i)}(z, u) = W^{(i)}(\infty_1) + C_i\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{C_i^1}{1.2}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \ldots + \frac{C_i^{(p-1)}}{p!}\left(\frac{1}{z}\right)^p + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les développements de p intégrales normales de première espèce, attachées à $u(z) = \sqrt{R(z)}$, dans le domaine du point ∞_1 ; les modules de périodicité des intégrales $\Pi_{\infty_2}^{\infty_1}(z, u)$, $Z(z, u; \infty_1)$, $Z^{(1)}(z, u; \infty_1)$, ..., $Z^{(p-1)}(z, u; \infty_1)$, ... le long d'une coupure $b_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ sont respectivement

$$W^{(i)}(\infty_1) - W^{(i)}(\infty_2), \quad -C_i, \quad -C_i^{(1)}, \quad \ldots, \quad -C_i^{(p-1)}, \quad \ldots.$$

Il est facile de démontrer que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_1 & C_1^{(1)} & \ldots & C_1^{(p-1)} \\ C_2 & C_2^{(1)} & \ldots & C_2^{(p-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_p & C_p^{(1)} & \ldots & C_p^{(p-1)} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

Supposons, en effet, $\Delta = 0$; on pourrait trouver p constantes $A_1, A_2, \ldots, A_p$, dont une au moins n'est pas nulle, telles que la fonction

$$E(z, u) = A_1 Z(z, u; \infty_1) + A_2 Z^{(1)}(z, u; \infty_2) + \ldots + A_p Z^{(p-1)}(z, u; \infty_1),$$

soit dépourvue de périodes. La fonction $E(z, u)$ est une fonction rationnelle de z et de $u = \sqrt{R(z)}$ n'ayant pour pôle que le point ∞_1, d'ordre p au plus. Mais, une telle fonction ne peut pas exister. En effet, autrement on aurait

$$E(z, u) = P(z) + Q(z)\sqrt{R(z)} \qquad [P(z), Q(z) \text{ polynomes}; Q(z) \not\equiv 0];$$

or l'un des points ∞_1, ∞_2 est pôle d'ordre $p + 1$ au moins pour $E(z, u)$. Donc, les intégrales $Z(z, u; \infty_1)$, $Z^{(1)}(z, u; \infty_1)$, ..., $Z^{(p-1)}(z, u; \infty_1)$ forment avec les intégrales $W^{(1)}(z, u)$, $W^{(2)}(z, u)$, ..., $W^{(p)}(z, u)$ un système fondamental. Le résidu de la fonction $\frac{\rho(z)}{u(z)}$ à un point quelconque à distance finie étant nul, soient μ, $-\mu$ ses résidus aux points ∞_1, ∞_2. La différence

$$\int \frac{\rho(z)}{u(z)} dz - \mu \Pi_{\infty_2}^{\infty_1}(z, u),$$

dépourvue de points singuliers logarithmiques, à distance finie ou infinie, et de pôles à distance finie, peut s'exprimer par une combinaison linéaire à coefficients constants de $2p$ intégrales $Z(z, u; \infty_1)$, ..., $Z^{(p-1)}(z, u; \infty_1)$, $W^{(1)}(z, u)$, ..., $W^{(p)}(z, u)$ augmentée d'une fonction rationnelle de z et de $u(z)$

dépourvue de pôles à distance finie; on a, par conséquent,

$$\int \frac{\rho(z,u)}{u(z)}\,dz = \mu\Pi_{\infty_2}^{\infty_1}(z,u) + \sum_1^p \varepsilon_i W^{(i)}(z,u) + \delta Z(z,u;\infty_1) + \sum_1^{p-1} \delta_i Z^{(i)}(z,u;\infty_1) + P(z) + Q(z)\,u(z),$$

où les μ, ε_i, δ, δ_i sont des constantes et, $P(z)$, $Q(z)$ sont des polynomes. La formule (3) nous donne

$$(4)\qquad f_1(z) + f_2(z)\,u(z) = e^{\mu\Pi_{\infty_2}^{\infty_1}(z,u) + \sum_1^p \varepsilon_i W^{(i)}(z,u) + \delta Z(z,u;\infty_1) + \sum_1^{p-1} \delta_i Z^{(i)}(z,u;\infty_1) + P(z) + Q(z)\,u(z)}.$$

La formule (4) montre immédiatement que les coefficients μ, ε_i, δ, δ_i ne peuvent pas être pris arbitrairement. Il faut, en effet, que les périodes de l'exposant $G = \mu\Pi_{\infty_2}^{\infty_1}(z,u) + \ldots$, figurant dans cette formule, soient toutes des multiples entiers de $2\pi i$. On montre tout de suite que μ doit être entier. La période de G relative à une coupure a_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ est $2\pi i\varepsilon_i$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ doivent donc être entiers. La période de G relative à une coupure b_i $(j = 1, \ldots, p)$ est (§ 24)

$$\mu[W^{(j)}(\infty_1) - W^{(j)}(\infty_2)] + 2\sum_{i=1}^p \varepsilon_i \alpha_{ij} - \delta C_j - \delta_1 C_j^{(1)} - \ldots - \delta_{p-1} C_j^{(p-1)};$$

les coefficients $\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{p-1}$ doivent donc vérifier les p relations

$$(5)\qquad \delta C_j + \delta_1 C_j^{(1)} + \ldots + \delta_{p-1} C_j^{(p-1)} = \mu[W^{(j)}(\infty_1) - W^{(j)}(\infty_2)] + 2\sum_{i=1}^p \varepsilon_i \alpha_{ij} + 2N_j\pi i$$
$$(N_j \text{ entier}; j = 1, 2, \ldots, p).$$

Le déterminant $\Delta = \Sigma \pm C_1 C_2^{(1)} \ldots C_p^{(p-1)}$ n'étant pas nul, les relations (5) déterminent les coefficients $\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{p-1}$ en fonction de $2p+1$ nombres *entiers* (arbitraires) $\mu, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p; N_1, \ldots, N_p$; les intégrales $W^{(j)}$, figurant aux deuxièmes membres de ces relations sont toujours supposées prises suivant des chemins qui ne rencontrent pas les coupures. Nous allons montrer, grâce à la relation $f_1^2(z) - f_2^2(z)\,R(z) \equiv 1$, que le polynome $P(z)$ entrant dans (4) est déterminé, à une constante près, chaque fois qu'on a déterminé un système de valeurs $\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{p-1}$ vérifiant les relations (5).

Soient $u_1(z)$ et $u_2(z) = -u_1(z)$ les deux déterminations de $u(z)$ correspondant à une même valeur de z; on doit avoir,

$$e^{G(z,u_1)+G(z,u_2)} \equiv 1$$

$$\left[G(z,u) = \mu\Pi_{\infty_2}^{\infty_1}(z,u) + \sum_1^p \varepsilon_i W^{(i)}(z,u) + \delta Z(z,u;\infty_1) + \sum_1^{p-1} \delta_i Z^{(i)}(z,u;\infty_1) + P(z) + Q(z)\,u(z) \right]$$

Il est

$$G(z, u_1) + G(z, u_2) = C + \delta z + 1!\,\delta_1 z^2 + \ldots + (p-1)!\,\delta_{p-1} z^p + 2P(z) \qquad (C \text{ const});$$

le polynome $P(z)$ doit donc être de la forme

$$P(z) = C_1 - \frac{1}{2}(\delta z + 1!\,\delta_1 z^2 + \ldots + (p-1)!\,\delta_{p-1} z^p) \qquad (C_1 \text{ const}).$$

La forme générale de l'exposant $G(z)$ est

$$(6)\quad G(z, u) = C_1 + \mu \Pi_{\omega_1}^{z_1}(z_1, u) + \sum_1^p \varepsilon_i W^{(i)}(z, u) + \delta Z(z, u; \omega_1) + \sum_1^{p-1} \delta_i Z^{(i)}(z, u; \omega_1) - \frac{1}{2}[\delta z + \ldots + (p-1)!\,\delta_{p-1} z^p] + Q(z)\,u(z),$$

où les μ, ε_i sont des entiers arbitraires, les δ, δ_i sont des nombres vérifiant les relations (5), et $Q(z)$ est un polynome arbitraire; en supposant que les intégrales $\Pi_{\omega_1}^{z_1}(z, u)$, $W^{(i)}(z, u)$, $Z^{(i)}(z, u; \omega_1)$ soient prises suivant des chemins partant par un point déterminé (z_0, u_0), on choisira une valeur pour C_1 telle que l'on ait $e^{G(z, u_1)+G(z, u_2)} \equiv 1$. Les fonctions entières $f_1(z)$, $f_2(z)$, d'ordre fini, vérifiant l'identité (2) et le polynome $\rho(z)$ donnant lieu à la relation (1) sont donnés par les formules

$$(7)\quad \begin{cases} f_1(z) = \dfrac{e^{G(z, u_1)} + e^{G(z, u_2)}}{2}, \qquad f_2(z) = \dfrac{e^{G(z, u_1)} - e^{G(z, u_2)}}{2\,u_1(z)}, \\ \rho(z) = C\,u(z)\dfrac{dG(z, u)}{du} \qquad (C \text{ const}). \end{cases}$$

Du fait que les nombres μ, ε_i, N_j doivent être entiers, l'annulation du coefficient δ_{p-1}, déterminé par les relations (5), doit être considéré comme un cas exceptionnel; en général on a $\delta_{p-1} \neq 0$ et, par conséquent, *l'ordre m des fonctions* $f_1(z)$, $f_2(z)$, *déterminées par les relations* (7) *est* $\geqq p$ (1).

b. Soit $s = 2p+1$; m doit être de la forme $m = \dfrac{2l+1}{2}$.

Il n'y a qu'un point analytique à l'infini ∞ et, tous les résidus de la fonction $\dfrac{\rho(z)}{u(z)}$, à distance finie ou infinie, sont nuls [l'intégrale $\int \dfrac{\rho\,dz}{u(z)}$ est dépourvue de points singuliers logarithmiques]. Soit

$$W^{(i)}(z, u) = W^{(i)}(\infty) + d_i\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{d_i^{(2)}}{3!}\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{3}{2}} + \ldots + \frac{d_i^{(2p-2)}}{(2p-1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{2p-1}{2}} + \ldots$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p),$$

(1) Pour que m soit égal à p il faut et il suffit de prendre, dans la formule (6), $Q(z) \equiv 0$.

les développements de p intégrales $W^{(i)}(z, u)$, attachées à $u=\sqrt{R(z)}$, dans le domaine du point ∞; les modules de périodicité des intégrales $Z(z, u; \infty)$, $Z^{(2)}(z, u; \infty), \ldots, Z^{(2p-2)}(z, u)$, le long d'une coupure b_i $(i=1, 2, \ldots, p)$ sont respectivement $-d_i$, $-d_i^{(2)}$, $\ldots$, $d_i^{(2p-2)}$. On démontre aisément aussi que le déterminant

$$\Delta=\Sigma\pm d_1 d_2^{(2)}\ldots d_2^{(2p-2)}$$

est différent de zéro; les intégrales $Z(z, u; \infty)$, $Z^{(2)}(z, u; \infty)$, $\ldots$, $Z^{(2p-2)}$ forment avec les intégrales $W^{(1)}(z, u)$, $W^{(2)}(z, u)$, $\ldots$, $W^{(p)}(z, u)$ un système fondamental. Par une marche analogue à celle suivie dans le cas où $s=2p+2$, on trouve la forme générale de $G(z, u)$ (combinaison linéaire à coefficients constants) de $2p$ intégrales $Z(z, u; \infty)$, $Z^{(2)}(z, u; \infty)$, $\ldots$, $Z^{(2p-2)}(z, u; \infty)$, $W^{(1)}(z, u)$, $W^{(2)}(z, u)$ $\ldots$, $W^{(p)}(z, u)$ augmentée de $P(z)+Q(z)u(z)$; on déterminera $P(z)$ comme dans le cas où $s=2p+2$ et ensuite, par des formules comme les (7), la forme des $f_1(z)$, $f_2(z)$, $\rho(z)$. L'ordre m des fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$ est (dans le cas $s=2p+1$), en général, $\geqq \frac{2p-1}{2}=p-\frac{1}{2}$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit* $R(z)$, *un polynome de degré s premier avec sa dérivée, et p, le genre de la courbe* $u^2-R(z)=0$;

α. *Il n'existe pas, en général, de fonctions entières* $f_1(z)$, $f_2(z)$ *d'ordre* $m<p$, *quand* $s=2p+2$, *ou d'ordre* $m<p-\frac{1}{2}$, *quand* $s=2p+1$, *vérifiant l'identité*

$$f_1^2(z)-f_2^2(z)R(z)\equiv 1;$$

il existe des fonctions entières $f_1(z)$, $f_2(z)$ *d'ordre* $m\geqq p$ *lorsque* $s=2p+2$, *ou d'ordre* $m\geqq p-\frac{1}{2}$, $m-\frac{1}{2}$ *étant entier, pour* $s=2p+1$, *vérifiant cette identité.*

Signalons qu'il est impossible, du moins dans le cas général, de reconnaître, étant donné $R(z)$, au bout d'un nombre fini d'opérations, s'il existe des fonctions entières $f_1(z)$, $f_2(z)$ d'ordre $m<p$ lorsque $s=2p+2$, ou d'ordre $m<p-\frac{1}{2}$ pour $s=2p+1$, vérifiant la dite identité. Pour le montrer supposons, par exemple, $s=2p+2$ et cherchons, étant donné $R(z)$, s'il existe des fonctions entières $f_1(z)$, $f_2(z)$ d'ordre $m=p-1$ vérifiant l'identité ci-dessus. Pour qu'il existe un tel couple $[f_1(z), f_2(z)]$ il est nécessaire qu'il existe un système de valeurs des nombres *entiers* μ, ε_i, δ_{i-1} $(i=1, \ldots, p;$ $\delta_0=\delta)$ figurant dans (6) tel que la valeur correspondant de δ_{p-1}, tirée des relations (6), soit nulle. En prenant en considération l'expression donnant la valeur de δ, tirée de relations (6), on voit que le problème en question est de même nature que celui-ci : Etant donné des nombres que l'on peut calculer

avec une approximation indéfinie, reconnaître s'il existe une combinaison linéaire et homogène de ces quantités à coefficients entiers égale à zéro; or, il est impossible, dans le cas général, de limiter le nombre des essais à faire pour reconnaître s'il existe une telle combinaison.

30. É. Goursat a établi ce théorème intéressant (1), soit

$$\int \mathrm{R}(z, u)\, dz = c_1 \log b_1 + c_2 \log b_2 + \ldots + c_r \log b_r + \mathrm{W}(z)$$

une intégrale abélienne qui s'exprime par une somme de logarithmes de fonctions rationnelles de z et de u, b_i, et d'une intégrale $\mathrm{W}(z)$ de première espèce; on peut toujours supposer que le nombre r de ces logarighmes est égal au nombre minimum des constantes dont les résidus de $\mathrm{R}(z, u)$ sont des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients entiers.

En suivant, avec de légères modifications, la voie (2) de É. Goursat, on démontre le théorème suivant : *soit*

$$\int \mathrm{R}(z, u)\, dz = \mathrm{C}_1 \log v_1 + \mathrm{C}_2 \log v_2 + \ldots + \mathrm{C}_\mu \log v_\mu + \mathrm{J}(z, u) \qquad (1)$$

une intégrale abélienne qui s'exprime par une somme de logarithmes de fonctions algébroïdes (uniformes sur la surface S), v_i, *et d'une intégrale abélienne* $\mathrm{J}(z, u)$ *dépourvue de points singuliers logarithmiques; on peut toujours supposer que le nombre* μ *des logarithmes de la formule* (1) *est égal au nombre minimum des constantes dont les résidus de* $\mathrm{R}(z, u)$ *sont des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients entiers.*

---

(1) É. Goursat, *C. R. Acad. Sc.*, t. 118, p. 1894.

(2) *Voir* P. Appell et É. Goursat, *Théorie des fonctions algébriques*, t. I, p. 347-352.

LES ANNEAUX D'OPÉRATEURS DE CLASSE FINIE

PAR M. J. DIXMIER.

Introduction.

Soit M un facteur de classe finie (¹) dans un espace hilbertien complexe. M est un espace vectoriel complexe. F. J. Murray et J. von Neumann ont montré ([3] et [4]) qu'il existait une fonctionnelle linéaire T(A) sur M, possédant les propriétés caractéristiques suivantes :

$$T(\mathbf{1})=1, \qquad T(A^*)=\overline{T(A)}, \qquad T(AB)=T(BA);$$
$$T(A)\geqq 0 \quad \text{si A est self-adjoint positif.}$$

Soit T′ la restriction de T à l'ensemble des opérateurs self-adjoints de M, qui est un espace vectoriel réel. T′ est encore une fonctionnelle linéaire, qui possède les propriétés caractéristiques suivantes :

$$T'(\mathbf{1})=1, \qquad T'(UAU^{-1})=T'(A) \quad \text{si } U\in M \text{ est unitaire};$$
$$T'(A)\geqq 0 \quad \text{si } A\geqq 0.$$

Il est très facile de passer d'un groupe de propriétés à l'autre.

Les propriétés de T′ sont analogues aux propriétés de la moyenne d'une fonction continue réelle sur un groupe compact G. Soit en effet L l'ensemble de ces fonctions, qui est un espace vectoriel réel. La moyenne d'un élément de L est une fonctionnelle linéaire $\mu(f)$ sur L qui possède les propriétés caractéristiques suivantes [6] :

$$\mu(\mathbf{1})=1, \qquad \mu(f_s)=\mu(f) \quad \text{si } f\in L \quad \text{et} \quad f_s(x)=f(s^{-1}x) \quad (x\in G, s\in G);$$
$$\mu(f)\geqq 0 \quad \text{si } f\geqq 0.$$

Or, la fonction constante égale pour tout $x\in G$ à $\mu(f)$ peut, on le sait, être

(¹) Pour la terminologie, *cf.* le Chapitre consacré aux notations. Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

approchée uniformément par des fonctions de l'ensemble convexe engendré dans L par les f_s (2). Nous avons étudié le problème analogue pour les facteurs de classe finie : l'opérateur $T(A)\mathbf{1}$ peut-il être approché uniformément par des opérateurs de l'ensemble convexe engendré par les UAU^{-1} ? La réponse est, on le verra, positive.

Mais cette propriété de μ sert en réalité, dans la théorie de von Neumann, de définition et même de procédé de construction. Nous avons donc essayé de définir la trace par une méthode analogue, sans supposer connue son existence. Ceci est d'autant plus indiqué que la construction de la trace utilisée dans [3] et [4] est indirecte : on construit d'abord la trace d'opérateurs particuliers, à savoir les projecteurs; ceci reviendrait, dans le cas des groupes compacts, à construire d'abord la moyenne des fonctions caractéristiques, c'est-à-dire la mesure des ensembles.

En développant les démonstrations, nous avons constaté qu'elles s'appliquaient, non seulement aux facteurs de classe finie, mais à une classe beaucoup plus générale d'anneaux d'opérateurs que nous avons appelés anneaux de classe finie. Seulement, l'ensemble convexe engendré par les UAU^{-1} permet d'approcher uniformément, non plus un multiple scalaire de $\mathbf{1}$, mais un opérateur du centre de M. La trace d'un opérateur de M, dans la théorie généralisée, est donc un opérateur du centre de M. Dans le cas des facteurs, le centre de M se compose des multiples scalaires de $\mathbf{1}$, de sorte qu'on peut identifier la trace à un scalaire, et l'on retrouve la théorie classique. La trace généralisée possède les mêmes propriétés algébriques que la trace ordinaire.

Nous avons mis en évidence (au Chapitre I) les hypothèses abstraites qui permettent d'obtenir simplement l'existence, l'unicité et les propriétés caractéristiques de la trace. Dans le cas des anneaux d'opérateurs, toutes les hypothèses sont vérifiées trivialement, sauf deux, qui sont, par contre, difficiles

---

(2) Voici un autre exemple de propriétés du même type, à propos encore d'un groupe compact G et de la famille L. Nous utilisons ici, dans un cas très particulier, des résultats de R. Godement cf. *Analyse harmonique dans les groupes centraux.* I. *Fonctions centrales et caractères*, (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 225, 1947, p. 19-21). II. *Formule d'inversion de Fourier*, (*ibid.*, p. 221-223). Si $f \in L$, définissons $f^\natural \in L$ par $f^\natural(x) = \int_G f(sxs^{-1})\,ds$ où ds est la mesure de Haar sur G, choisie de telle sorte que la mesure de G soit égale à 1. L'application $f \to f^\natural$ est une application linéaire de L sur l'ensemble des fonctions centrales continues de G, et l'on a les propriétés suivantes : 1° $f^{\natural\natural} = f$ si $f \in L$ est centrale; 2° $f^\natural$ ne change pas si l'on transforme f par un automorphisme intérieur de G; 3° $f^\natural$ est positive (resp. de type positif) si f est positive (resp. de type positif). [Notons aussi que $(f \star g)^\natural = (g \star f)^\natural$ si $f \star g$ désigne le produit de composition de f et g.] Or, ici encore, $f^\natural$ peut être approchée uniformément par des fonctions de l'ensemble convexe engendré par les fonctions

$$f_\sigma(x) = f[\sigma(x)],$$

σ automorphisme intérieur de G.

Dans des travaux non publiés, R. Godement a étudié systématiquement des *opérations* $\natural$ dans les $\star$-algèbres.

à obtenir. Il y avait avantage à les mettre nettement en évidence, car l'une d'entre elles est valable pour tous les anneaux d'opérateurs : il est possible d'approcher uniformément un opérateur du centre de M par des opérateurs de l'ensemble convexe engendré par les $UAU^{-1}(A \in M)$. Ainsi, le problème que nous posions au début est résolu affirmativement sous des hypothèses très générales.

La deuxième hypothèse à laquelle nous faisions allusion n'est valable, au contraire, que dans les anneaux d'opérateurs de classe finie. Dans les anneaux qui ne sont pas de classe finie, il est impossible de définir pour tout opérateur une trace possédant les propriétés habituelles (ce résultat généralise un résultat connu dans la théorie des facteurs). Cependant, de même que dans le cas des facteurs de classe infinie, la trace peut être alors définie pour certains opérateurs particuliers, comme nous le montrerons ultérieurement.

Dans les méthodes de démonstration, le lecteur qui connaît les articles [3] et [4] retrouvera fréquemment des procédés introduits par F. J. Murray et J. von Neumann. Cependant, ces procédés ont dû être modifiés dans plusieurs cas, et de nouvelles notions ont dû être introduites. Ces notions seront d'ailleurs probablement utiles dans l'étude des anneaux d'opérateurs quelconques.

Bien que la démonstration soit assez longue, elle est dans l'ensemble plus rapide que celle de [3] et [4], et elle conduit à un résultat plus général (mais, évidemment, nous n'avons dirigé nos efforts que vers la définition et les propriétés de la trace, alors que beaucoup d'autres questions sont envisagées dans [3] et [4]).

Les résultats de ce travail ont été annoncés dans [2]. Cependant, depuis la publication de [2], nous avons débarrassé les démonstrations de l'hypothèse de la séparabilité de l'espace (alors que cette hypothèse est faite dans [3] et [4]).

Après avoir rédigé le présent mémoire, l'auteur a pris connaissance du mémoire de von Neumann [7] sur la réduction des anneaux d'opérateurs. Voici, brièvement analysées, les relations entre les deux articles.

1. Le théorème 7 est nouveau même pour les facteurs. Mais le lemme 3.7. (dont le théorème 7 se déduit facilement) peut être démontré pour les facteurs à partir des résultats de [3] (en adaptant notre méthode), puis pour les anneaux quelconques en appliquant les résultats de [7]. Ce dernier point demande cependant quelques soins, purement techniques d'ailleurs.

Le théorème 6 peut aussi être déduit du résultat correspondant pour les facteurs (qui est énoncé dans [3]) et du lemme 21 de [7].

2. Si un anneau d'opérateurs vérifie notre définition des anneaux de classe finie, le lemme 21 de [7] permet de montrer (avec les notations de [7]) que

$r - C_f$ est de σ-mesure nulle (la réciproque s'établissant facilement). Alors, la théorie complète des facteurs, le lemme 18 de [7], et quelques considérations supplémentaires, prouvent l'existence de l'opération $A \to A^\natural$ lorsqu'on se borne aux projecteurs de l'anneau. On peut, en modifiant les démonstrations de [7], obtenir l'opération $A \to A^\natural$ pour tout $A \in M$, avec les propriétés que nous indiquons (sauf toutefois peut-être les propriétés de continuité).

3. L'ensemble des mémoires [3], [4], [7], constitue naturellement une analyse beaucoup plus détaillée de la structure des anneaux d'opérateurs que celle du présent mémoire. Cependant, plusieurs de nos résultats sont nouveaux, au moins dans leur énoncé. Surtout, il paraît intéressant de les obtenir directement (notamment sans emploi de la théorie de la mesure ou des ensembles analytiques), par une méthode qui, même pour les facteurs, est plus simple que les méthodes déjà connues. Enfin, l'hypothèse de séparabilité (dont nous ne faisons pas usage) est essentielle dans certaines parties de [3], [4] et surtout de [7].

Notations et résultats préliminaires.

Nous ne précisons pas ici les notations qui sont universellement adoptées.

D'autre part, nous supposons connus du lecteur les résultats élémentaires relatifs à l'espace hilbertien. Par contre, les résultats plus spéciaux qui seront nécessaires sont tous rappelés ci-après. Tous les résultats de [3] et [4] dont nous aurons besoin seront redémontrés complètement (ainsi la connaissance de [3] et [4] n'est pas indispensable pour la compréhension du présent travail).

Soient A, B, $(A_i)_{i \in I}$ deux parties et une famille de parties d'un ensemble. $A \cup B$, $A \cap B$, $\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcap_{i \in I} A_i$ désignent respectivement la réunion de A et B, l'intersection de A et B, la réunion des A_i, l'intersection des A_i. $A \subset B$ signifie l'inclusion au sens large de A dans B.

L'espace hilbertien complexe considéré, sur la dimension duquel on ne fait aucune hypothèse, est désigné par H. Si $\mathfrak{M}$ est une partie de H, $[\mathfrak{M}]$ désigne la plus petite variété linéaire fermée contenant $\mathfrak{M}$. Si $\mathfrak{M}$ est une variété linéaire fermée, on désigne par $P_{\mathfrak{M}}$ le projecteur correspondant. Deux variétés linéaires fermées $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ sont dites compatibles si $P_{\mathfrak{M}_1}$ et $P_{\mathfrak{M}_2}$ sont permutables. Si A est un opérateur, on désigne par A^* son adjoint, par D_A son domaine d'existence, par Δ_A son domaine des valeurs. 1 désigne l'opérateur identique. Si $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$ est une famille de variétés linéaires fermées, on désigne par $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{M}_i$ la plus petite variété linéaire fermée contenant les $\mathfrak{M}_i$.

Un opérateur W est dit partiellement isométrique s'il existe deux variétés linéaires fermées $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ telles que $W^*W = P_{\mathfrak{M}_1}$, $WW^* = P_{\mathfrak{M}_2}$. $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont appelées respectivement variétés initiale et finale de W. W applique isométriquement $\mathfrak{M}_1$ sur $\mathfrak{M}_2$, et $Wx = 0$ si $x \in H \ominus \mathfrak{M}_1$, ces propriétés carac-

térisant d'ailleurs les opérateurs partiellement isométriques. W* est partiellement isométrique et admet $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_1$ comme variétés initiale et finale (*cf.* [3]).

Soient $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ deux variétés linéaires fermées. Soient $\mathfrak{M}_{1'} = H \ominus \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_{2'} = H \ominus \mathfrak{M}_2$, et $m_{ij} = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_j (i, j = 1, 2, 1', 2')$. $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont dites en position p' si $m_{1'2'} = m_{12} = 0$. Alors, il existe une symétrie bien déterminée S de H, appelée symétrie intérieure de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$, telle que $S(\mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M}_2$, $S(\mathfrak{M}_2) = \mathfrak{M}_1$ et telle que $(Sx, x) > 0$ pour $x \in \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, $x \neq 0$, $Sx = x$ pour $x \in m_{12}$, $Sx = -x$ pour $x \in m_{1'2'}$. Si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont quelconques, $\mathfrak{M}_1 \ominus m_{12}$ et $\mathfrak{M}_2 \ominus m_{12}$ sont en position p'; $\mathfrak{M}_1 \ominus (m_{12} \oplus m_{1'2'})$ est en position p' avec $\mathfrak{M}_2 \ominus (m_{21} \oplus m_{21'})$ et avec $\mathfrak{M}_{2'} \ominus (m_{2'1} \oplus m_{2'1'})$, ces dernières variétés étant différentes de zéro si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont non compatibles (*cf.* [1]).

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des opérateurs bornés définis dans tout l'espace H et prenant leurs valeurs dans H. $\mathcal{B}$ est une algèbre sur le corps des nombres complexes. $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ est une norme sur $\mathcal{B}$, qui définit sur $\mathcal{B}$ une topologie dite topologie uniforme, et qui fait de $\mathcal{B}$ une algèbre normée complète. On définit sur $\mathcal{B}$ une autre topologie dite topologie forte, de la manière suivante : étant donnés des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de H, on considère l'ensemble $\mathfrak{U}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des $A \in \mathcal{B}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \|Ax_i\| \leq 1$; l'ensemble des $\mathfrak{U}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ constitue un système fondamental de voisinages de zéro dans $\mathcal{B}$ pour la topologie forte.

Enfin, on définit sur $\mathcal{B}$ la topologie faible de la manière suivante : étant donnés des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n$ de H, on considère l'ensemble $\mathfrak{U}(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ des $A \in \mathcal{B}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} |(Ax_i, y_i)| \leq 1;$$

l'ensemble des $\mathfrak{U}(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ constitue un système fondamental de voisinages de zéro dans $\mathcal{B}$ pour la topologie faible (*cf.* [5]).

Toute sous-algèbre M de $\mathcal{B}$ self-adjointe et fortement fermée s'appelle anneau d'opérateurs. On considérera uniquement les anneaux d'opérateurs contenant 1, restriction qui n'est pas essentielle. On désignera par M_S (resp. M_U, M_{PI}) l'ensemble des opérateurs self-adjoints (resp. unitaires, partiellement isométriques) de M, par M_P l'ensemble des projecteurs de M. Si $\mathfrak{M}$ est une variété linéaire fermée, on écrit $\mathfrak{M} \eta M$ si $P_{\mathfrak{M}} \in M$.

Si $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{B}$ contenant 1, on désigne par $R(\mathcal{E})$ le plus petit anneau d'opérateurs contenant $\mathcal{E}$, par $\mathcal{E}'$ l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{B}$ qui permutent avec ceux de $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}'$ est un anneau d'opérateurs, et l'on a

$$R(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'' = \mathcal{E}'''' = \ldots \qquad \mathcal{E}' = \mathcal{E}''' = \ldots;$$
$$R(M_S) = R(M_U) = R(M_P) = M.$$

On en déduit le critère suivant :

Critère. — Soit M un anneau d'opérateurs. Soit $A \in \mathcal{B}$, soit $\mathfrak{M}$ une variété linéaire fermée. Pour que $A \in M$, il faut et il suffit que $U'AU'^{-1} = A$ pour tout $U' \in M'_U$. Pour que $\mathfrak{M} \gamma_l M$, il faut et il suffit que $U'(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$ pour tout $U' \in M'_U$ (*cf.* [5]).

Soient $\mathfrak{M}_1 \gamma_l M$, $\mathfrak{M}_2 \gamma_l M$. On écrit $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$ et l'on dit que $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont équivalentes s'il existe un opérateur de M_{PI} dont les variétés initiale et finale sont $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. Les remarques qu'on a faites sur les opérateurs partiellement isométriques prouvent aussitôt qu'il s'agit effectivement d'une relation d'équivalence. On a $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$ dès qu'il existe un $A \in M$ qui transforme isométriquement $\mathfrak{M}_1$ en $\mathfrak{M}_2$ (en effet, $AP_{\mathfrak{M}_1}$ est alors un élément de M_{PI} dont $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ sont les variétés initiale et finale).

Un anneau d'opérateurs s'appelle facteur si son centre se compose des multiples scalaires de **1**. Un facteur est dit de classe finie si les relations $\mathfrak{M} \gamma_l M$, $\mathfrak{M} \sim H$ entraînent $\mathfrak{M} = H$, autrement dit si les relations $U \in M$, $U^*U = \mathbf{1}$ entraînent $UU^* = \mathbf{1}$.

I. — Théorie générale.

Dans ce Chapitre, nous considérons un ensemble E, muni de la structure suivante :

C. 1 : E *est un espace de Banach réel*, c'est-à-dire un espace vectoriel réel normé complet. La norme de x est désignée par $\|x\|$; la topologie déduite de la norme est appelée topologie forte.

C. 2 : Il existe dans E un ensemble P d'éléments appelés non négatifs; la relation $x \in P$, qu'on écrit aussi $x \geq 0$, satisfait aux hypothèses suivantes :

C. 2 *a* : *Soient* $x \in P$ *et* $\lambda \in \mathbf{R}$ (3), *avec* $\lambda \geq 0$; *on a* $\lambda x \in P$.
C. 2 *b* : *Soient* $x \in P$, $y \in P$; *on a* $x + y \in P$.
C. 2 *c* : *Si* $x \in P$ *et* $-x \in P$, *on a* $x = 0$.
C. 2 *d* : P *est fortement fermé.*

Écrivons $x \geq y$ si $x - y \geq 0$. Alors, on vérifie aussitôt que :

α. Soient $x \in E$, $y \in E$; si $x \geq y$ et $y \geq x$, on a $x = y$.
β. Soit $x \in E$; on a $x \geq x$.
γ. Soient $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$; si $x \geq y$ et $y \geq z$, on a $x \geq z$.

La relation $x \geq y$ est donc une relation d'ordre. Cette relation possède de plus les propriétés suivantes :

δ. Soient $x \in E$, $y \in E$, $x' \in E$, $y' \in E$; si $x \geq y$, $x' \geq y'$, on a $x + x' \geq y + y'$.
ε. Soient $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in \mathbf{R}$; si $x \geq y$ et $\lambda \geq 0$, on a $\lambda x \geq \lambda y$.

(3) **R** désignera dans tout le travail l'ensemble des nombres réels.

Faisons encore l'hypothèse suivante :

C.2 *e* : *Il existe dans* E *un élément unité, noté* $\mathbf{1}$, *tel que* $\|\mathbf{1}\| = 1$, *et tel que, pour* $x \in E$, *les relations*

$$\|x\| \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{1} \geq x \geq -\mathbf{1}$$

soient équivalentes.

C.3 : *Il existe un groupe* G *d'applications linéaires biunivoques et isométriques de* E *sur* E. Si $s \in G$ et $x \in E$, on désignera par sx le transformé de x par s.

On suppose :

C.3 *a* : $s\mathbf{1} = \mathbf{1}$ *pour tout* $s \in G$.
C.3 *b* : *Soient* $a \in P$, $s \in G$; *on a* $sx \in P$.

Soit E_0 l'ensemble des $x \in E$ tels que $sx = x$ pour $s \in G$. Il est immédiat que E_0 est un sous-espace vectoriel fortement fermé de E, avec $\mathbf{1} \in E_0$.

D'autre part, si $x \geq y$ et $s \in G$, on a aussitôt $sx \geq sy$.

Définition. 1.1. — *Soit* $x \in E$. *On désigne par* K_x *l'ensemble convexe fortement fermé engendré par les* sx, *c'est-à-dire l'ensemble des éléments* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x$ $\left(s_i \in G, \lambda_i \in \mathbf{R}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right)$ *et de leurs limites fortes.*

Théorème 1. — $K_x \cap E_0$ *est non vide lorsque* E *vérifie l'hypothèse suivante :*

C.4 : *Pour tout* $x \in E$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe :*

des éléments $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *de* G;

des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *de* $\mathbf{R}$, *avec* $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$;

un élément $y \in E_0$, *tels que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x - y \right\| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. — Remarquons que, si $y \in E_0$ et $x \in E$, on a aussitôt $K_{y+x} = y + K_x$ (ensemble des éléments $y + t$, où $t \in K_x$). D'autre part, K_x est contenu dans la boule de centre O et de rayon $\|x\|$. Enfin, K_x est invariant par les automorphismes de G, donc $y \in K_x$ entraîne $K_y \subset K_x$.

Ceci posé, on peut, d'après C.4, construire par récurrence une suite de couples (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ avec les propriétés suivantes :

(1) $\qquad x_i \in E,\ y_i \in E_0, \qquad x_1 = x, \qquad x_{i+1} \in K_{x_i}$;

(2) $\qquad \|y_i - x_i\| \leq 2^{-i} \qquad$ pour $i \geq 2$.

Soit alors $z_i = x_i - y_i$. On a

$$x_{i+1} \in K_{y_i + z_i} = y_i + K_{z_i}, \qquad \text{donc} \quad \| x_{i+1} - x_i \| \leq \| x_i - y_i \| + \| z_i \| = 2 \| x_i - y_i \| \leq 2^{-i+1}$$

Donc (critère de Cauchy) les x_i convergent vers un élément y qui, d'après (2), est aussi la limite des y_i et par conséquent appartient à E_0. Enfin, $x_{i-1} \in K_{x_i}$ donne $K_{x_{i+1}} \subset K_{x_i} \subset K_{x_{i-1}} \ldots \subset K_x$. Donc $x_{i+1} \in K_x$, $y \in K_x$.

Nous supposons désormais vérifiée la condition C.4.

LEMME 1.1. — *Soient $x \in E$, $y \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe :*

des éléments $x' \in K_x \cap E_0$, $y' \in K_y \cap E_0$;
des éléments $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de G ;

des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbf{R}$, avec $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, tels que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k x - x' \right\| \leq \varepsilon, \qquad \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k y - y' \right\| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. — D'après le théorème 1 il existe des éléments $t_1, t_2, \ldots, t_m$ de G, des éléments $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ de $\mathbf{R}\left(\mu_i \geq 0 ; \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1\right)$, et un élément $x' \in K_x \cap E_0$, tels que, en posant $u = \sum_{i=1}^{m} \mu_i t_i x$, on ait

$$\| u - x' \| \leq \varepsilon. \tag{3}$$

Soit $v = \sum_{i=1}^{m} \mu_i t_i y$. Il existe des éléments $t'_1, t'_2, \ldots, t'_p$ de G, des éléments $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_p$ de $\mathbf{R}\left(\mu'_j \geq 0, \sum_{j=1}^{p} \mu'_j = 1\right)$, et un élément $y' \in K_v \cap E_0 \subset K_y \cap E_0$, avec

$$\left\| \sum_{j=1}^{p} \mu'_j t'_j v - y' \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \mu'_j \mu_i (t'_j t_i) y - y' \right\| \leq \varepsilon. \tag{4}$$

D'ailleurs, (3) donne

$$\| t'_j (u - x') \| = \| t'_j u - x' \| \leq \varepsilon,$$

d'où

$$\left\| \sum_{j=1}^{p} \mu'_j t'_j (u - x') \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{p} \mu'_j t'_j u - x' \right\| \leq \varepsilon$$

ou

$$\left\| \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \mu'_j \mu_i (t'_j t_i) x - x' \right\| \leq \varepsilon. \tag{5}$$

Les t'_j t_i sont les s_k du lemme, et les μ'_j μ_i sont les λ_k.
Considérons encore la condition suivante :

C.5 : *Pour tout* $x \in E$, $K_x \cap E_0$ *est réduit à un point.*

Nous désignerons alors ce point par $x^\natural$. Pour l'origine de cette notation, *cf.* Note (2).

THÉORÈME 2. — *Supposons* C.5 *vérifiée. Soient* $x \in E$, $x' \in E$, $y \in E_0$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $s \in G$. *On a*

$$(\alpha) \qquad y^\natural = y,$$

$$(\beta) \qquad (\lambda x)^\natural = \lambda x^\natural,$$

$$(\gamma) \qquad (x + x')^\natural = x^\natural + x'^\natural,$$

$$(\delta) \qquad (sx)^\natural = x^\natural,$$

$$(\varepsilon) \qquad x^\natural \geqq 0 \quad \text{si} \quad x \geqq 0 \quad (1).$$

Démonstration. — Conservons les notations du lemme 1.1. α et β sont immédiats. Pour prouver γ, il suffit de remarquer que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k (x + x') - (x^\natural + x'^\natural) \right\| \leqq 2\varepsilon,$$

d'où $x^\natural + x'^\natural = (x + x')^\natural$ d'après C.5. De même, δ résulte de $K_{sx} = K_x$. Enfin, si $x \geqq 0$, on a $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k x \geqq 0$, donc $x^\natural \geqq 0$ puisque P est fortement fermé.

THÉORÈME 3. — *Soit* $x \to \varphi(x)$ *une application de* E *dans* E_0 *possédant les propriétés* (α)-(ε) *du théorème* 2. *On a, moyennant* C.5 : $\varphi(x) = x^\natural$ *pour tout* $x \in E$.

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des $s_i \in G$ $(1 \leqq i \leqq n)$ et des $\lambda_i \in \mathbf{R}\left(1 \leqq i \leqq n,\ \lambda_i \geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right)$ tels que, en posant

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x - x^\natural,$$

on ait

$$\| u \| \leqq \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon . \mathbf{1} \geqq u \geqq -\varepsilon . \mathbf{1}.$$

Ceci entraîne, d'après β, γ, ε,

$$\varphi(\varepsilon . \mathbf{1}) \geqq \varphi(u) \geqq \varphi(-\varepsilon . \mathbf{1})$$

(1) Ajoutons que l'application $x \to x^\natural$ est continue. Car $x^\natural \in K_x$, $\| x^\natural \| \leqq \| x \|$.

ou, d'après α

$$\varepsilon.\mathbf{1} \geqq \varphi(u) \geqq -\varepsilon.\mathbf{1} \quad \text{ou} \quad \|\varphi(u)\| \leqq \varepsilon.$$

Or, par α, β, γ, on a

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(s_i x) - x^{\natural}$$

et, d'après δ

$$\varphi(u) = \varphi(x) - x^{\natural}.$$

Donc $\|\varphi(x) - x^{\natural}\| \leqq \varepsilon$ et, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $\varphi(x) = x^{\natural}$.

Ceci posé, considérons encore la condition suivante :

C'.5 : *Pour tout élément x de* E, *tout élément a de* E_0, *tout système d'éléments* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *de* G, *tout système d'éléments* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *de* $\mathbf{R}$ *avec* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, *tels que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x \geqq a$, *on a* $0 \geqq a$.

THÉORÈME 4. — *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. C.5 *est vérifiée.*

2. *Il existe une application $x \to \varphi(x)$ de* E *dans* E_0 *possédant les propriétés* (α)-(ε) *du théorème* 2.

3. C'.5 *est vérifiée.*

Démonstration. — *a.* 1 entraîne 2 : c'est le théorème 2.

b. 2 entraîne 3 : Soient

$$x \in E, \quad a \in E_0, \quad s_i \in G \quad (1 \leqq i \leqq n), \quad \lambda_i \in \mathbf{R} \left(1 \leqq i \leqq n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \right)$$

tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x \geqq a$. Si l'application φ existe, on a

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(s_i x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x) = 0 \geqq \varphi(a) = a.$$

c. 3 entraîne 1 : Supposons C'.5 vérifiée, et soient y, y' deux éléments de $K_x \cap E_0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des éléments $s_1, s_2, \ldots, s_n$; $s'_1, s'_2, \ldots, s'_{n'}$ de G, des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_{n'}$ de $\mathbf{R}\left(\lambda_i \geqq 0, \lambda'_i \geqq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i = 1 \right)$ tels que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x - y \right\| \leqq \varepsilon, \tag{6}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i s'_i x - y' \right\| \leqq \varepsilon. \tag{6'}$$

(6) donne

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x - y \geqq -\varepsilon.\mathbf{1}, \tag{7}$$

(6′) donne

$$\varepsilon.\mathbf{1} \geqq \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i s'_i x - y', \tag{7'}$$

(7) et (7′) donnent

$$\varepsilon.\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x - y \geqq \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i s'_i x - y' - \varepsilon.\mathbf{1}$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x - \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i s'_i x \geqq y - y' - 2\varepsilon.\mathbf{1}. \tag{8}$$

Or

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i = 1 - 1 = 0,$$

d'où, d'après C′.5

$$0 \geqq y - y' - 2\varepsilon.\mathbf{1}$$

ou

$$2\varepsilon.\mathbf{1} \geqq y - y'. \tag{9}$$

De même, échangeant y et y'

$$2\varepsilon.\mathbf{1} \geqq y' - y$$

ou

$$y - y' \geqq -2\varepsilon.\mathbf{1}, \tag{9'}$$

(9) et (9′) donnent

$$\| y - y' \| \leq 2\varepsilon;$$

d'où, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $y = y'$.

Notons encore le théorème suivant :

THÉORÈME 5. — *Supposons* C.5 *vérifiée. Soit* E_1 *l'adhérence de l'ensemble des éléments de la forme* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x$, *où* $x \in \mathrm{E}$, $s_i \in \mathrm{G}$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ *et* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. E_1 *est le sous-espace vectoriel fermé des éléments* x *tels que* $x^2 = 0$, *et l'on a* $\mathrm{E}_0 \cap \mathrm{E}_1 = 0$, $\mathrm{E} = \mathrm{E}_0 + \mathrm{E}_1$. *Ainsi, tout* $y \in \mathrm{E}$ *se met, d'une seule manière, sous la forme* $y_0 + y_1$ *avec* $y_0 \in \mathrm{E}_0$, $y_1 \in \mathrm{E}_1$; *de plus,* $y_0 = y^2$, *de sorte que l'opération* ^{2} *n'est autre que le projecteur sur* E_0 *défini par* E_0 *et* E_1.

Démonstration. — Soit E'_1 le sous-espace vectoriel fermé des éléments x tels que $x^2 = 0$. Si $x \in \mathrm{E}'_1 \cap \mathrm{E}_0$, on a $x = x^2 = 0$, donc $\mathrm{E}'_1 \cap \mathrm{E}_0 = 0$. Si $x \in \mathrm{E}$, on a

$x = x^z + (x - x^z)$ et $x^z \in E_0$, $x - x^z \in E_1'$ [puisque $(x - x^z)^z = x^z - x^z = 0$], donc $E = E_0 + E_1'$. Montrons enfin que $E_1 = E_1'$. Si $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x$ avec $s_i \in G$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, on a $y^z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (s_i x)^z = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) x^z = 0$, donc $y \in E_1'$, donc $E_1 \subset E_1'$. Soit maintenant $y \in E_1'$. On a $y^z = 0$, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des éléments $s_i \in G$, des éléments $\lambda_i \in \mathbf{R}$, avec $\lambda_i \geq 0$, $(1 \leq i \leq n)$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, tels que $\left\| y - \left(y - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i y \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i y \right\| \leq \varepsilon$. Or $1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$; donc $y \in E_1$, $E_1' \subset E_1$.

II. — Cas des anneaux d'opérateurs.

Soit H un espace hilbertien, M un anneau d'opérateurs de H contenant **1**. M est fortement fermé, donc aussi M_s. *A fortiori*, M_s est uniformément fermé. Donc M_s est un espace de Banach réel : M_s vérifie C.1.

Soit $A \in M_s$. Nous définirons la relation $A \geq 0$ de la façon habituelle, c'est-à-dire par la condition $(Af, f) \geq 0$ pour tout $f \in H$. Il est classique que M_s vérifie alors C.2, en prenant pour unité l'opérateur **1**.

Soit $U \in M_U$. L'application s_U définie par $s_U(A) = UAU^{-1}$ est une application linéaire, biunivoque et isométrique de M_s sur M_s. Ces applications forment un groupe G de transformations, car, si $U \in M_U$, $U' \in M_U$, on a

$$s_U s_{U'}(A) = U(U'AU'^{-1})U^{-1} = (UU')A(UU')^{-1} = s_{UU'}(A).$$

Avec ce choix de G, M_s vérifie C.3. Les éléments invariants par G sont les éléments de M_s qui permutent avec tout $U \in M_U$, donc forment l'ensemble

$$M_s \cap (M_U)' = M_s \cap (M_U)'' = M_s \cap M' = (M \cap M')_s.$$

Dans les quatre Chapitres suivants, nous allons chercher si M_s, toujours muni de la même structure, vérifie C.4 et C'.5.

III. — Démonstration de l'hypothèse C.4.

Definition 3.1. — *Soit* $\mathfrak{M} \gamma_1 M$. *On désignera par* $\mathfrak{M}^M$ *l'ensemble des vecteurs* Uf *où* $U \in M_U$, $f \in \mathfrak{M}$.

Lemme 3.1. — *Soit* $\mathfrak{M} \gamma_1 M$.

2. $|\mathfrak{M}^M|$ *est la plus petite des variétés* $\mathfrak{M} \gamma_1 M \cap M'$ *contenant* $\mathfrak{M}$.

β. $[\mathfrak{M}^{M}]$ *est la variété linéaire fermée sous-tendue par les variétés* $\mathfrak{M}'$ *équivalentes à* $\mathfrak{M}$.

γ. *Si une variété* $\mathfrak{N}\tau_1 M\cap M'$ *est sous-tendue par des variétés* $\mathfrak{M}'$ *équivalentes à* $\mathfrak{M}$, *on a* $\mathfrak{N}=[\mathfrak{M}^{M}]$.

Démonstration. — 1. Soit $f\in\mathfrak{M}$. On a $f=1.f\in\mathfrak{M}^{M}$, donc $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}^{M}\subset[\mathfrak{M}^{M}]$.

2. Toute variété $\mathfrak{N}\tau_1 M\cap M'$ contenant $\mathfrak{M}$ contient les Uf ($f\in\mathfrak{M}$, $U\in M_U$) donc contient $[\mathfrak{M}^{M}]$. Réciproquement, $[\mathfrak{M}^{M}]$ étant invariante par M_U et par M'_1, on a α.

3. Pour avoir β et γ, il suffit de remplacer M_U par $M_{[1]}$ dans le raisonnement précédent.

Lemme 3.2. — *Soient* $\mathfrak{M}_1\tau_1 M$, $\mathfrak{M}_2\tau_1 M$, $\mathfrak{M}_1$ *et* $\mathfrak{M}_2$ *étant en position* p'. *On a* $\mathfrak{M}_1\sim\mathfrak{M}_2$.

Démonstration. — Soit S la symétrie intérieure de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. On a $S\in M$ d'après le critère de l'introduction. $SP_{\mathfrak{M}_1}\in M_{[1]}$ admet $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ pour variétés initiale et finale.

Lemme 3.3. — *Soient* $\mathfrak{M}_1\tau_1 M$, $\mathfrak{M}_2\tau_1 M$, $\mathfrak{M}_1$ *et* $\mathfrak{M}_2$ *étant non orthogonales. Il existe* $\mathfrak{N}_1\tau_1 M$, $\mathfrak{N}_2\tau_1 M$ *avec* $\mathfrak{N}_1\subset\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_2\subset\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_1\neq 0$, $\mathfrak{N}_2\neq 0$, $\mathfrak{N}_1\sim\mathfrak{N}_2$.

Démonstration. — Soient $m_1=\mathfrak{M}_1\cap(\mathrm{II}\ominus\mathfrak{M}_2)$, $m_2=\mathfrak{M}_2\cap(\mathrm{II}\ominus\mathfrak{M}_1)$. $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{M}_1\ominus m_1$, $\mathfrak{N}_2=\mathfrak{M}_2\ominus m_2$.

On a $\mathfrak{N}_1\neq 0$, $\mathfrak{N}_2\neq 0$ puisque $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont non orthogonales. $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ sont en position p', donc $\mathfrak{N}_1\sim\mathfrak{N}_2$ (lemme 3.2).

Définition 3.2. — *On appelle partition une famille non vide* $(E_i)_{i\in I}$ *de projecteurs de* $M_{[1]}$ *non nuls deux à deux orthogonaux. Si* $\sup_{i\in I}E_i\leq E$ (*resp.* $=E$), *on dira plus précisément que les* E_i *forment une partition majorée par* E (*resp. une partition de* E).

On appellera ordre d'une partition le nombre (*fini ou infini*) *de ses éléments. On dira que la partition est homogène si* $E_i\sim E_j$ *pour* $i\in I$, $j\in I$. *On dira que deux partitions* $(E_i)_{i\in I}$, $(E'_i)_{i\in I}$ *sont semblables si* $E_i\sim E'_i$ *pour* $i\in I$. *On emploiera un langage analogue pour les variétés* Δ_{E_i} *et* Δ_E.

Lemme 3.4. — *Soient* $(E_i)_{i\in I}$, $(E'_i)_{i\in I}$ *des partitions semblables de* E *et* E' *respectivement. On a* $E\sim E'$. *Plus précisément, soit, pour* $i\in I$, $U_i\in M_{[1]}$ *tel que* $U_i U_i^*=E_i$, $U_i^* U_i=E'_i$. *Il existe un* $U\in M_{[1]}$ *tel que* $U^*U=E$, $UU^*=E'$, *et tel que, pour* $i\in I$,

$UE_i = U_i$, $U^*E'_i = U_i^*$ (*autrement dit*, $Uf = U_i f$ *pour* $f \in \Delta_{E_i}$, $U^*f = U_i^* f$ *pour* $f \in \Delta_{E'_i}$) (5).

Démonstration. — Pour tout $f \in \mathrm{H}$, la famille des vecteurs $(E_i f)_{i\in I}$ est à termes orthogonaux et $\sum_{i\in I} \|E_i f\|^2 < +\infty$. Donc $\sum_{i\in I} \|U_i E_i f\|^2 < +\infty$ et les $U_i E_i f$ sont deux à deux orthogonaux. On peut donc poser $Uf = \sum_{i\in I} U_i E_i f$, ce qui définit un $U \in \mathrm{M}$ possédant, comme on le voit aisément, les propriétés du lemme.

Lemme 3.5. — *Soient* $\mathfrak{M}_1 \gamma_l \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}_2 \gamma_l \mathrm{M}$, $\mathfrak{M} \gamma_l \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, $\mathfrak{M}' = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M} \gamma_l \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$. *Soient* $m_1 = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}$, $m_2 = \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}$, $m'_1 = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}'$, $m'_2 = \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}'$. *Si* $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$, *on a* $m_1 \sim m_2$, $m'_1 \sim m'_2$.

Démonstration. — Soit $U \in \mathrm{M}_{pl}$ dont les variétés initiale et finale sont $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. U est réduit par $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$, donc $U(m_1) \subset m_2$, $U(m'_1) \subset m'_2$. Comme $U(\mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M}_2$, on a nécessairement $U(m_1) = m_2$, $U(m'_1) = m'_2$. UP_{m_1} (resp. $UP_{m'_1}$) est un élément de M_{pl} dont les variétés initiale et finale sont m_1 et m_2 (resp. m'_1 et m'_2).

Théorème 6. — *Soient* $\mathfrak{M}_1 \gamma_l \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}_2 \gamma_l \mathrm{M}$. *Il existe :*

deux variétés $\mathfrak{M} \gamma_l \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, $\mathfrak{M}' = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M} \gamma_l \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$;

trois variétés m_1, m_2, $\overline{m}_1 \gamma_l \mathrm{M}$ *contenues dans* $\mathfrak{M}$, $\overline{m}_1$ *orthogonale à* m_1 *et* m_2;

trois variétés m'_1, m'_2, $\overline{m}'_2 \gamma_l \mathrm{M}$ *contenues dans* $\mathfrak{M}'$, $\overline{m}'_2$ *orthogonale à* m'_1 *et* m'_2, *avec*

$$m_1 \sim m_2, \qquad m'_1 \sim m'_2, \qquad \mathfrak{M}_1 = \overline{m}_1 \oplus m_1 \oplus m'_1, \qquad \mathfrak{M}_2 = \overline{m}'_2 \oplus m'_2 \oplus m_2.$$

Démonstration. — D'après l'introduction, il existe deux variétés $\widetilde{\mathfrak{M}}_1 \gamma_l \mathrm{M}$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_2 \gamma_l \mathrm{M}$, avec : 1° $\widetilde{\mathfrak{M}}_1 \subset \mathfrak{M}_1$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_2 \subset \mathfrak{M}_2$; 2° $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ et $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$ en position p', donc (lemme 3.2) $\widetilde{\mathfrak{M}}_1 \sim \widetilde{\mathfrak{M}}_2$; 3° $\mathfrak{M}_1 \ominus \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ orthogonale à $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_2 \ominus \widetilde{\mathfrak{M}}_2$ orthogonale à $\mathfrak{M}_1$. Considérons alors les couples (Φ_1, Φ_2), où Φ_1 et Φ_2 sont des partitions semblables possédant les propriétés suivantes : 1° Φ_1 contient $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ et est majorée par $\mathfrak{M}_1$; 2° Φ_2 contient $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$ et est majorée par $\mathfrak{M}_2$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces couples (Φ_1, Φ_2). Si (Φ_1, Φ_2) et (Φ'_1, Φ'_2) sont deux éléments de $\mathcal{E}$, la relation « $\Phi_1 \subset \Phi'_1$, $\Phi_2 \subset \Phi'_2$ » ordonne $\mathcal{E}$. Toute famille totalement ordonnée $(\Phi''_1, \Phi''_2)_{r\in R}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ possède une borne supérieure $\left(\bigcup_{r\in R} \Phi''_1, \bigcup_{r\in R} \Phi''_2\right)$. Soit (théorème de Zorn) un élément maximal de $\mathcal{E}$, $(\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2)$. On a $\Phi_1 = (\overline{\mathfrak{M}}'_1)_{i\in I}$, $\Phi_2 = (\overline{\mathfrak{M}}'_2)_{i\in I}$. Soit $\overline{\mathfrak{M}}_1 = \bigoplus_{i\in I} \overline{\mathfrak{M}}'_1$, $\overline{\mathfrak{M}}_2 = \bigoplus_{i\in I} \overline{\mathfrak{M}}'_2$. D'après

(5) *Cf.* [3], lemme 6.1.2. Dans les chapitres III à VI, nous nous sommes constamment inspiré de [3] et [4]. Nous ne ferons que les références les plus indispensables.

le lemme 3.4, on a $\overline{\mathfrak{M}}_1 \sim \overline{\mathfrak{M}}_2$. D'autre part $\overline{\mathfrak{M}}_1 \supset \widetilde{\mathfrak{M}}_1$, $\overline{\mathfrak{M}}_2 \supset \widetilde{\mathfrak{M}}_2$. Soient $\overline{m}_1 = \mathfrak{M}_1 \ominus \overline{\mathfrak{M}}_1$, $\overline{m}'_2 = \mathfrak{M}_2 \ominus \overline{\mathfrak{M}}_2$, $\mathfrak{M} = [\overline{m}_1^{\mathfrak{M}}]$, $\mathfrak{M}' = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}$. On a $\mathfrak{M} \tau_i \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, $\mathfrak{M}' \tau_i \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, $\overline{m}_1 \subset \mathfrak{M}$ d'après le lemme 3.1.α. Montrons que $\mathfrak{M}$ est orthogonale à $\overline{m}'_2$ et par suite que $\overline{m}'_2 \subset \mathfrak{M}'$. Si $\mathfrak{M}$ n'est pas orthogonale à $\overline{m}'_2$, certains vecteurs de $\overline{m}_1^{\mathfrak{M}}$ sont non orthogonaux à $\overline{m}'_2$, donc il existe un $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_{\mathrm{U}}$ tel que $\mathrm{U}(\overline{m}_1)$ soit non orthogonale à $\overline{m}'_2$. Alors (lemme 3.3) il existe des variétés $\overline{p}_1 \tau_i \mathrm{M}$, $p_2 \tau_i \mathrm{M}$, avec $p_1 \subset \mathrm{U}(\overline{m}_1)$, $p_2 \subset \overline{m}'_2$, $\overline{p}_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$, $\overline{p}_1 \sim p_2$. En posant $p_1 = \mathrm{U}^{-1}(\overline{p}_1)$, on a $p_1 \tau_i \mathrm{M}$, $p_1 \subset \overline{m}_1$, $p_1 \neq 0$, $p_1 \sim p_2$. Dans ces conditions, $(\Phi_1 \cup \{p_1\}, \Phi_2 \cup \{p_2\})$ est encore un élément de $\mathfrak{E}$, ce qui est absurde puisque (Φ_1, Φ_2) est maximal. Donc on a bien $\overline{m}'_2 \subset \mathfrak{M}'$.

Posons enfin $m_1 = \overline{\mathfrak{M}}_1 \cap \mathfrak{M}$, $m_2 = \overline{\mathfrak{M}}_2 \cap \mathfrak{M}$, $m'_1 = \overline{\mathfrak{M}}_1 \cap \mathfrak{M}'$, $m'_2 = \overline{\mathfrak{M}}_2 \cap \mathfrak{M}'$. Alors :

m_1, m_2, $\overline{m}_1$ sont contenues dans $\mathfrak{M}$;

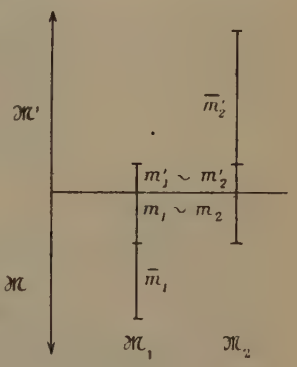
m'_1, m'_2, $\overline{m}'_2$ sont contenues dans $\mathfrak{M}'$;

$\overline{m}_1 \subset \mathfrak{M}_1 \ominus \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ et $m_2 \subset \mathfrak{M}_2$ sont orthogonales; $m_1 \subset \overline{\mathfrak{M}}_1$ et $\overline{m}_1$ sont orthogonales; de même $\overline{m}'_2$ est orthogonale à m'_1 et m'_2;

$\overline{\mathfrak{M}}_1 \sim \overline{\mathfrak{M}}_2$ entraîne $m_1 \sim m_2$, $m'_1 \sim m'_2$ d'après le lemme 3.5; enfin $\overline{\mathfrak{M}}_1 \tau_i \mathrm{M}$ est compatible avec $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \tau_i \mathrm{M}'$, donc $\overline{\mathfrak{M}}_1 = m_1 \oplus m'_1$, donc

$$\mathfrak{M}_1 = \overline{m}_1 \oplus \overline{\mathfrak{M}}_1 = \overline{m}_1 \oplus m_1 \oplus m'_1 ;$$

de même, $\mathfrak{M}_2 = \overline{m}'_2 \oplus m_2 \oplus m'_2$. Le théorème est ainsi démontré. Il fournit une décomposition de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ en parties équivalentes $m_1 \oplus m'_1$ et $m_2 \oplus m'_2$, et en parties *incomparables* $\overline{m}_1 \subset \mathfrak{M}$, $\overline{m}'_2 \subset \mathfrak{M}'$ (6).



Comme le théorème sera souvent utilisé dans la suite, il est peut-être bon, pour faciliter la lecture, de l'illustrer par le schéma ci-contre.

Voici maintenant quelques développements indépendants de la théorie des anneaux d'opérateurs.

Définition 3.3. — *Soit* A *un opérateur self-adjoint borné. Soit* $\mathrm{E} = \mathrm{P}_{\mathrm{V}} \neq 0$ *un projecteur réduisant* A. *On pose*

$$m_{\mathrm{V}}(\mathrm{A}) = m_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}) = \inf_{x \in \mathrm{V},\, \|x\| = 1} (\mathrm{A}x, x); \qquad \mathrm{M}_{\mathrm{V}}(\mathrm{A}) = \mathrm{M}_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}) = \sup_{x \in \mathrm{V},\, \|x\| = 1} (\mathrm{A}x, x);$$
$$\omega_{\mathrm{V}}(\mathrm{A}) = \omega_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}) = \mathrm{M}_{\mathrm{V}}(\mathrm{A}) - m_{\mathrm{V}}(\mathrm{A}) \geq 0.$$

ω jouera le rôle d'une *oscillation*.

(6) Dans le cas d'un facteur, on a nécessairement $\mathfrak{M} = 0$ ou $\mathfrak{M}' = 0$, et l'on retrouve le théorème de comparabilité de [3] (lemme 6.2.3).

DÉFINITION 3.4. — *Soit* A *un opérateur self-adjoint borné. Soit* $\Phi = (E_i)_{i\in I}$ *une famille de projecteurs non nuls deux à deux orthogonaux réduisant* A. *On pose*

$$\omega(\Phi, A) = \sup_{i\in I} \omega_{E_i}(A).$$

On a évidemment

$$\omega(\Phi, A) \leq \omega_H(A).$$

LEMME 3.6. — *Soit* A *un opérateur self-adjoint borné. Soit* $\Phi = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ *une famille de projecteurs non nuls deux à deux orthogonaux, réduisant* A, *avec* $\sum_{i=1}^{n} E_i = 1$. *On peut trouver des nombres réels* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *tels que*

$$\left\| A - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i \right\| \leq \frac{1}{2}\omega(\Phi, A).$$

Démonstration. — Posons

$$\lambda_i = \frac{1}{2}\left[M_{E_i}(A) + m_{E_i}(A) \right].$$

Alors, on a évidemment, pour $f \in \Delta_{E_i}$,

$$-\frac{1}{2}(f, f)\omega_{E_i}(A) \leq ((A - \lambda_i E_i)f, f) \leq \frac{1}{2}(f, f)\omega_{E_i}(A).$$

Soit $f \in H$. On a $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$, avec $f_i = E_i f$. D'où, comme les E_i réduisent A

$$-\frac{1}{2}(f, f)\omega(\Phi, A) \leq -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(f_i, f_i)\omega_{E_i}(A) \leq \sum_{i=1}^{n} ((AE_i - \lambda_i E_i)f_i, f_i)$$
$$= \left(\left(A - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i \right) f, f \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(f_i, f_i)\omega_{E_i}(A) \leq \frac{1}{2}(f, f)\omega(\Phi, A),$$

d'où le lemme.

Ceci posé, revenons à la théorie des anneaux d'opérateurs.

LEMME 3.7. — *Soit* $A \in M_S$, *et soit* $\mathfrak{A}_1 M \cap M'$, $\mathfrak{A} \neq 0$. *Si* $\omega_{\mathfrak{A}}(A) \neq 0$, *on peut trouver* $\overline{\mathfrak{A}}_1 M \cap M'$, $\overline{\mathfrak{A}}'_1 M \cap M'$, $(\overline{\mathfrak{A}} \neq 0, \overline{\mathfrak{A}}' \neq 0)$ *orthogonales complémentaires dans* $\mathfrak{A}$, *et un* $U \in M_U$, *de façon que*

$$\omega_{\overline{\mathfrak{A}}}\left(\frac{1}{2}(A + UAU^{-1}) \right) \leq \frac{3}{4}\omega_{\mathfrak{A}}(A),$$
$$\omega_{\overline{\mathfrak{A}}'}\left(\frac{1}{2}(A + UAU^{-1}) \right) \leq \frac{3}{4}\omega_{\mathfrak{A}}(A).$$

Démonstration. — Soit $\lambda_{\mathfrak{A}}(A) = \frac{1}{2}[m_{\mathfrak{A}}(A) + M_{\mathfrak{A}}(A)]$. D'après la théorie

spectrale, il existe deux variétés linéaires fermées $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ [différentes de 0 parce que $m_{\mathfrak{N}}(A) \neq M_{\mathfrak{N}}(A)$] orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{N}$, et telles que

$$m_{\mathfrak{M}_1}(A) = m_{\mathfrak{N}}(A), \qquad M_{\mathfrak{M}_1}(A) \leq \lambda_{\mathfrak{N}}(A),$$
$$m_{\mathfrak{M}_2}(A) \geq \lambda_{\mathfrak{N}}(A), \qquad M_{\mathfrak{M}_2}(A) = M_{\mathfrak{N}}(A),$$

avec d'ailleurs : $\mathfrak{M}_1 \eta_1 M$, $\mathfrak{M}_2 \eta_1 M$. Appliquons le théorème 6 à $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$, en observant que $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont orthogonales. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{M} \eta_1 M \cap M'$ et $\mathfrak{M}' \eta_1 M \cap M'$ $(\mathfrak{M}' = H \ominus \mathfrak{M})$;

trois variétés orthogonales m_1, m_2, $\overline{m}_1 \eta_1 M$ contenues dans $\mathfrak{M}$;

trois variétés orthogonales m'_1, m'_2, $\overline{m}'_2 \eta_1 M$ contenues dans $\mathfrak{M}'$, avec

$$m_1 \sim m_2, \qquad m'_1 \sim m'_2, \qquad \mathfrak{M}_1 = \overline{m}_1 \oplus m_1 \oplus m'_1, \qquad \mathfrak{M}_2 = \overline{m}'_2 \oplus m_2 \oplus m'_2.$$

Posons

$$\overline{\mathfrak{N}} = m_1 \oplus m_2 \oplus \overline{m}_1, \qquad \overline{\mathfrak{N}}' = m'_1 \oplus m'_2 \oplus \overline{m}'_2.$$

$\overline{\mathfrak{N}}$ et $\overline{\mathfrak{N}}'$ sont contenues respectivement dans $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{N}$ et orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{N}$ (puisque $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont complémentaires dans $\mathfrak{N}$), donc identiques à $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{N}$. Par suite $\overline{\mathfrak{N}} \eta_1 M \cap M'$, $\overline{\mathfrak{N}}' \eta_1 M \cap M'$.

Soient $V \in M_{PI}$ (resp. $V' \in M_{PI}$) dont les variétés initiales et finales sont m_1 et m_2 (resp. m'_1 et m'_2). Nous définissons un $U \in M_U$, en posant

$$Uf = Vf \quad \text{pour} \quad f \in m_1; \qquad Uf = V^* f \quad \text{pour} \quad f \in m_2;$$
$$Uf = V' f \quad \text{pour} \quad f \in m'_1; \qquad Uf = V'^* f \quad \text{pour} \quad f \in m'_2;$$
$$Uf = f \quad \text{pour} \quad f \in H \ominus (m_1 \oplus m_2 \oplus m'_1 \oplus m'_2).$$

U est réduit par $\overline{\mathfrak{N}}$ et $\overline{\mathfrak{N}}'$. Montrons que $\overline{\mathfrak{N}}$, $\overline{\mathfrak{N}}'$, U, ainsi définis, possèdent les propriétés du lemme, et par exemple que

$$\omega_{\overline{\mathfrak{N}}}\left(\frac{1}{2}(A + UAU^{-1})\right) \leq \frac{3}{4}\omega_{\mathfrak{N}}(A).$$

Pour cela, nous remarquons que

$$m_{\mathfrak{N}}(A)(P_{m_1} + P_{m_2} + P_{\overline{m}_1}) \leq AP_{\overline{\mathfrak{N}}} \leq \lambda_{\mathfrak{N}}(A)(P_{m_1} + P_{\overline{m}_1}) + M_{\mathfrak{N}}(A)P_{m_2},$$

d'où, comme $U(\overline{m}_1) = \overline{m}_1$, $U(m_1) = m_2$, $U(m_2) = m_1$:

$$m_{\mathfrak{N}}(A)(P_{m_2} + P_{m_1} + P_{\overline{m}_1}) \leq (UAU^{-1})P_{\overline{\mathfrak{N}}} \leq \lambda_{\mathfrak{N}}(A)(P_{m_2} + P_{\overline{m}_1}) + M_{\mathfrak{N}}(A)P_{m_1}.$$

En ajoutant membre à membre

$$m_{\mathfrak{N}}(A)(P_{m_2} + P_{m_1} + P_{\overline{m}_1}) \leq \frac{1}{2}(UAU^{-1} + A)P_{\overline{\mathfrak{N}}}$$
$$\leq \lambda_{\mathfrak{N}}(A)P_{\overline{m}_1} + \frac{1}{2}\left(\lambda_{\mathfrak{N}}(A) + M_{\mathfrak{N}}(A)\right)(P_{m_1} + P_{m_2})$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\lambda_{\mathfrak{N}}(A) + M_{\mathfrak{N}}(A)\right)(P_{m_1} + P_{m_2} + P_{\overline{m}_1}).$$

Donc

$$\omega_{\mathfrak{N}}\left(\frac{1}{2}(A+UAU^{-1})\right)\leq\frac{1}{2}\left(\lambda_{\mathfrak{N}}(A)+M_{\mathfrak{N}}(A)\right)-m_{\mathfrak{N}}(A)=\frac{3}{4}M_{\mathfrak{N}}(A)-\frac{3}{4}m_{\mathfrak{N}}(A)=\frac{3}{4}\omega_{\mathfrak{N}}(A).$$

LEMME 3.8. — *Soit* $A\in M_s$ *et soit* Φ *une partition finie de* $\mathbf{1}$ *dont les éléments appartiennent à* $M\cap M'$. *On peut trouver une partition finie* Φ' *de* $\mathbf{1}$ *appartenant à* $M\cap M'$ *et un* $U\in M_U$ *tels que*

$$\omega\left(\Phi',\frac{1}{2}(A+UAU^{-1})\right)\leq\frac{3}{4}\omega(\Phi,A).$$

Démonstration. — Soit $\Phi=(\mathfrak{N}_i)_{1\leq i\leq n}$. Pour chaque i tel que $\omega_{\mathfrak{N}_i}(A)\neq 0$, nous déterminons, par le lemme 3.7, des variétés $\mathfrak{M}_i\subset\mathfrak{N}_i\mathbf{M}\cap M'$, $\mathfrak{M}'_i\subset\mathfrak{N}_i\mathbf{M}\cap M'$ ($\mathfrak{M}_i\neq 0$, $\mathfrak{M}'_i\neq 0$) orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{N}_i$ et un $U_i\in M_U$ tels que

$$\omega_{\mathfrak{M}_i}\left(\frac{1}{2}(A+U_iAU_i^{-1})\right)\leq\frac{3}{4}\omega_{\mathfrak{N}_i}(A)\leq\frac{3}{4}\omega(\Phi,A),$$

$$\omega_{\mathfrak{M}'_i}\left(\frac{1}{2}(A+U_iAU_i^{-1})\right)\leq\frac{3}{4}\omega_{\mathfrak{N}_i}(A)\leq\frac{3}{4}\omega(\Phi,A).$$

Si $\omega_{\mathfrak{N}_i}(A)=0$, posons

$$\mathfrak{M}_i=\mathfrak{N}_i,\qquad U_i=1.$$

Soit $U=\sum_{i=1}^{n}U_iP_{\mathfrak{N}_i}\in M_U$, et soit Φ' la partition constituée par les $\mathfrak{M}_i$ et les $\mathfrak{M}'_i$. On a aussitôt

$$\omega\left(\Phi',\frac{1}{2}(A+UAU^{-1})\right)=\max_{1\leq i\leq n}\left[\omega_{\mathfrak{M}_i}\left(\frac{1}{2}(A+U_iAU_i^{-1})\right),\ \omega_{\mathfrak{M}'_i}\left(\frac{1}{2}(A+U_iAU_i^{-1})\right)\right]\leq\frac{3}{4}\omega(\Phi,A).$$

THÉORÈME 7. — *Soit* $A\in M_s$, *et* $\varepsilon>0$. *Il existe des* $U_i\in M_U$ $(1\leq i\leq 2^n)$ *et un* $B\in(M\cap M')_s$ *tels que*

$$\left\|2^{-n}\sum_{i=1}^{2^n}U_iAU_i^{-1}-B\right\|<\varepsilon.$$

Si $A\in M$, *le théorème subsiste à ceci près que* B *n'est plus nécessairement self-adjoint.*

Démonstration. — Nous allons démontrer le théorème pour $\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^p\omega_{\mathrm{II}}(A)$ (p, entier ≥ 0). Comme $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^p\omega_{\mathrm{II}}(A)\to 0$ quand $p\to\infty$, le théorème sera bien vrai pour tout $\varepsilon>0$.

Pour cela, d'après le lemme 3.6, il suffit de prouver qu'on peut trouver, pour tout p, une partition Φ finie de $\mathbf{1}$ dont les éléments appartiennent à $M\cap M'$ et des $U_i\in M_U$ $(1\leq i\leq 2^n)$ tels que

$$\omega\left(\Phi,2^{-n}\sum_{i=1}^{2^n}U_iAU_i^{-1}\right)\leq\left(\frac{3}{4}\right)^p\omega_{\mathrm{II}}(A). \tag{10}$$

Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi, par récurrence sur p. Pour $p=0$, c'est évident, en prenant Φ réduite à l'élément $\mathbf{1}$, et $n=0$, $U_1=1$. Supposons donc (10) réalisée pour l'entier p. Alors, d'après le lemme 3.8, on peut trouver une partition Φ' finie de $\mathbf{1}$ dont les éléments appartiennent à $M\cap M'$ et un $U\in M_U$ tels que

$$\omega\left[\Phi', \frac{1}{2}\left(2^{-n}\sum_{i=1}^{2^n} U_i A U_i^{-1} + 2^{-n} U\left(\sum_{i=1}^{2^n} U_i A U_i^{-1}\right) U^{-1}\right)\right]$$
$$\leq \frac{3}{4}\omega\left(\Phi, 2^{-n}\sum_{i=1}^{2^n} U_i A U_i^{-1}\right) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{p-1}\omega_n(A)$$

et il suffit alors de remarquer que

$$\frac{1}{2}\left[2^{-n}\sum_{i=1}^{2^n} U_i A U_i^{-1} + 2^{-n} U\left(\sum_{i=1}^{2^n} U_i A U_i^{-1}\right) U^{-1}\right]$$
$$= 2^{-n-1}\left[\sum_{i=1}^{2^n} U_i A U_i^{-1} + \sum_{i=1}^{2^n} (UU_i) A (UU_i)^{-1}\right].$$

Si maintenant $A\in M$, il suffit d'écrire $A=B+iC$, avec $B\in M_s$, $C\in M_s$, et d'appliquer le lemme 1.1.

Ainsi, M_s vérifie C.4, quel que soit l'anneau d'opérateurs M contenant 1. Les recherches concernant C'.5 vont nous demander plus d'efforts.

Avant de les commencer, explicitons une conséquence immédiate de nos résultats :

Si $A\in M$, l'ensemble convexe-uniformément fermé K_A engendré par les UAU^{-1} a une intersection non vide avec $M\cap M'$.

Les remarques qui suivent ont été suggérées à l'auteur par R. Godement. On pourrait définir les anneaux de classe finie comme les anneaux M pour lesquels M_s vérifie C'.5, ou encore pour lesquels $K_A\cap M\cap M'$ se réduit à un point lorsque $A\in M_s$. Alors on passerait immédiatement aux théorèmes 10 (sauf les propriétés 5β et 7), 11, 12, 13 du Chapitre VII, qui sont les résultats principaux de ce travail. Il est à noter que c'est cette définition qu'on utilise pour caractériser dans les applications les anneaux de classe finie (*cf.* des travaux à paraître de R. Godement). Cependant, il resterait à montrer que, pour les facteurs, ceci équivaut à la définition de [3] des facteurs de classe finie. Il importe aussi de pouvoir démontrer la propriété 5β du théorème 10, et les théorèmes du Chapitre VIII. Aussi, nous allons adopter une définition des anneaux de classe finie qui généralise directement celle de [3].

IV. — Définitions et lemmes préparatoires.

Définition 4.1. — M *sera dit de classe finie si les hypothèses* $\mathfrak{M} \eta_1 \mathrm{M}$, $\mathfrak{M} \sim \mathrm{H}$ *entraînent* $\mathfrak{M} = \mathrm{H}$, *c'est-à-dire si les hypothèses* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}$, $\mathrm{AA}^* = 1$ *entraînent* $\mathrm{A}^*\mathrm{A} = 1$.

Dans toute la suite, M désigne un anneau de classe finie. Mais il est facile de voir que plusieurs des lemmes qui suivent sont indépendants de cette hypothèse.

Les facteurs de classe finie et les anneaux abéliens sont des exemples typiques d'anneaux de classe finie.

Lemme 4.1. — *Soient* $\mathfrak{M} \eta_1 \mathrm{M}$, $\mathfrak{N} \eta_1 \mathrm{M}$, *avec* $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$. *On a* $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$.

Démonstration. — On a

$$\mathfrak{M} \oplus (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}) \sim \mathfrak{N} \oplus (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}) = \mathrm{H}, \qquad \text{donc} \quad \mathfrak{M} \oplus (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}) = \mathrm{H}, \qquad \mathfrak{M} = \mathfrak{N}.$$

Lemme 4.2. — *Toute partition homogène est finie.*

Démonstration. — Supposons une partition homogène infinie $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots)$. Soient $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{M}' = \bigoplus_{i=2}^{\infty} \mathfrak{M}_i$. On a $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}'$ (lemme 3.4) d'où $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$ (lemme 4.1) d'où $\mathfrak{M}_1 = 0$, ce qui est absurde.

Lemme 4.3. — *Soit* $\mathfrak{M} \eta_1 \mathrm{M}$. *Soient* $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(\mathfrak{M}'_i)_{1 \leq i \leq p}$ *deux partitions homogènes de* $\mathfrak{M}$ *avec* $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}'_1$. *On a* $n = p$.

Démonstration. — Soit par exemple $n \leq p$. On a (lemme 3.4)

$$\mathfrak{M} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i \sim \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}'_i \subset \mathfrak{M},$$

d'où (lemme 4.1)

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}'_i = \mathfrak{M} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathfrak{M}'_i.$$

Comme $\mathfrak{M}'_p \neq 0$, $n = p$.

Définition 4.2. — *Soit* $\mathfrak{M} \eta_1 \mathrm{M}$. *On dira que* $\mathfrak{M}$ *est simple s'il existe une variété* $\mathfrak{N} \eta_1 \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$ *et une partition homogène* $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ *de* $\mathfrak{N}$ *telle que* $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$ (*ce qui impose* $\mathfrak{M} \neq 0$).

Lemme 4.4. — *Soit* $\mathfrak{M} \eta_1 \mathrm{M}$ *une variété simple. L'entier n de la définition* 4.2 *est bien déterminé par* $\mathfrak{M}$. *De même, la variété* $\mathfrak{N}$ *de la définition* 4.2 *est bien déterminée par* $\mathfrak{M}$ *et n'est autre que* $[\mathfrak{M}^{\mathrm{M}}]$.

Démonstration. — Le lemme 3.1.γ entraîne aussitôt que $\mathfrak{N} = [\mathfrak{M}^{\mathrm{M}}]$. L'énoncé relatif à l'entier n résulte immédiatement du lemme 4.3.

Nous pouvons alors poser la définition suivante :

DÉFINITION 4.3. — *Soit $\mathfrak{M} \eta \mathrm{M}$ une variété simple. L'entier n de la définition 4.2 sera appelé ordre de $\mathfrak{M}$. L'opérateur $\frac{1}{n} \mathrm{P}_{\mathfrak{M}}$, qui appartient à $\mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, sera noté $\mathrm{T}(\mathfrak{M})$.*

LEMME 4.5. — *Soit $\mathfrak{M} \eta \mathrm{M}$ une variété simple d'ordre n. Soit $\mathfrak{N} \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$. Si $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} \neq 0$, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ est une variété simple d'ordre n.*

Démonstration. — Soit $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n)$ une partition homogène de $[\mathfrak{M}^{\mathrm{M}}]$, avec $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$. D'après le lemme 3.5, les $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{N}$ forment une partition homogène de $[\mathfrak{M}^{\mathrm{M}}] \cap \mathfrak{N} \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$. D'où le lemme.

DÉFINITION 4.4. — *Soit $\mathfrak{M} \eta \mathrm{M}$. On dira que $\mathfrak{M}$ est irréductible si $\mathfrak{M} \neq 0$ et s'il n'existe aucune partition homogène d'ordre 2 majorée par $\mathfrak{M}$* ([7]).

LEMME 4.6. — *Soient $\mathfrak{M} \eta \mathrm{M}$, $\mathfrak{N} \eta \mathrm{M}$, avec $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$. Si $\mathfrak{M}$ est irréductible, $\mathfrak{N}$ est irréductible.*

Démonstration. — S'il existe une partition $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$ majorée par $\mathfrak{N}$, avec $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2$, posons $\mathfrak{M}_1 = \mathrm{U}(\mathfrak{N}_1)$, $\mathfrak{M}_2 = \mathrm{U}(\mathfrak{N}_2)$, $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_{[1]}$ admettant $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}$ comme variétés initiale et finale. $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ est une partition homogène majorée par $\mathfrak{M}$.

LEMME 4.7. — *Soit $\mathfrak{M} \eta \mathrm{M}$ une variété irréductible. Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{M}$, $\mathrm{B} \in \mathrm{M}$ deux opérateurs réduits par $\mathfrak{M}$. Les parties induites par A et B dans $\mathfrak{M}$ sont permutables.*

Démonstration. — Comme tout opérateur de M réduit par $\mathfrak{M}$ est une combinaison linéaire d'opérateurs de M_s réduits par $\mathfrak{M}$, il suffit de prouver le lemme quand A et B sont self-adjoints. Deux opérateurs self-adjoints sont permutables si et seulement si leurs projecteurs spectraux sont permutables ; on peut donc se borner au cas où A et B sont des projecteurs. Or, supposons qu'il existe des variétés $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2 \eta \mathrm{M}$, contenues dans $\mathfrak{M}$, non compatibles. Alors, d'après l'introduction, il existe des variétés $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}_2 \eta \mathrm{M}$, avec $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}'_1 \subset \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{M}_2$ telles que $\mathfrak{N}_2$ soit en position p' avec $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}'_1$, et telles que $\mathfrak{N}_1 \neq 0$, $\mathfrak{N}'_1 \neq 0$, $\mathfrak{N}_2 \neq 0$. D'où $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2 \sim \mathfrak{N}'_1$, de sorte que $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}'_1)$ est une partition homogène majorée par $\mathfrak{M}$. D'où absurdité.

LEMME 4.8. — *Soit $\mathfrak{M} \eta \mathrm{M}$ une variété irréductible. Soient $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \eta \mathrm{M}$ deux variétés orthogonales contenues dans $\mathfrak{M}$. $[\mathfrak{M}_1^{\mathrm{M}}]$ et $[\mathfrak{M}_2^{\mathrm{M}}]$ sont orthogonales.*

([7]) Dans le cas d'un facteur, on peut montrer que cette notion coïncide avec celle de variété minimale de [3].

Démonstration. — Supposons $\mathfrak{M}_1^M$ et $\mathfrak{M}_2^M$ non orthogonales. Alors il existe $U_1 \in M_U$, $U_2 \in M_U$ tels que $U_1(\mathfrak{M}_1)$ et $U_2(\mathfrak{M}_2)$ soient non orthogonales. On peut donc trouver $\mathfrak{N}'_1 \subset U_1(\mathfrak{M}_1)$, $\mathfrak{N}'_2 \subset U_2(\mathfrak{M}_2)$ avec $\mathfrak{N}'_1 \tau_1 M$, $\mathfrak{N}'_2 \tau_1 M$, $\mathfrak{N}'_1 \sim \mathfrak{N}'_2$, $\mathfrak{N}'_1 \neq 0$, $\mathfrak{N}'_2 \neq 0$. Soient $\mathfrak{N}_1 = U_1^{-1}(\mathfrak{N}'_1)$, $\mathfrak{N}_2 = U_2^{-1}(\mathfrak{N}'_2)$. On a $\mathfrak{N}_1 \neq 0$, $\mathfrak{N}_2 \neq 0$, $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}'_1 \sim \mathfrak{N}'_2 \sim \mathfrak{N}_2$, et $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{M}_2$ sont orthogonales. Donc $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$ est une partition homogène majorée par $\mathfrak{N}$, ce qui est absurde.

Définition 4.5. — *Une variété $\mathfrak{M}$ sera dite homogène si $\mathfrak{M} \tau_1 M \cap M'$ et s'il existe une partition homogène $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathfrak{M}$, l'une des variétés $\mathfrak{M}_i$ (donc, d'après le lemme 4.6, toutes les variétés $\mathfrak{M}_i$) étant irréductibles. Autrement dit (lemme 4.4), $\mathfrak{M}$ est homogène s'il existe une variété irréductible simple $\mathfrak{N}$ telle que $\mathfrak{M} = [\mathfrak{N}^M]$.*

Lemme 4.9. — *Toute variété irréductible contient une variété irréductible simple.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}_1$ une variété irréductible. Considérons des variétés $\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$, choisies successivement de telle sorte que, pour chaque entier n, $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ soit une partition homogène. D'après le lemme 4.2 la suite $(\mathfrak{M}_i)$ ne peut être infinie. Donc il existe un entier p et une partition homogène $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq p}$ avec la propriété suivante : $\mathfrak{M}_0 = H \ominus (\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_p)$ ne contient aucune variété équivalente à $\mathfrak{M}_1$.

Appliquons alors le théorème 6 à $\mathfrak{M}_0$ et $\mathfrak{M}_1$ en observant que $\mathfrak{M}_0$ et $\mathfrak{M}_1$ sont orthogonales. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{M} \tau_1 M \cap M'$, $\mathfrak{M}' \tau_1 M \cap M' (\mathfrak{M}' = H \ominus \mathfrak{M})$;

trois variétés m_1, m_0, $\overline{m}_1 \tau_1 M$ contenues dans $\mathfrak{M}$, deux à deux orthogonales;

trois variétés m'_1, m'_0, $\overline{m}'_0 \tau_1 M$ contenues dans $\mathfrak{M}'$, deux à deux orthogonales, avec

$$m_1 \sim m_0, \qquad m'_1 \sim m'_0, \qquad \mathfrak{M}_1 = \overline{m}_1 \oplus m_1 \oplus m'_1, \qquad \mathfrak{M}_0 = \overline{m}'_0 \oplus m'_0 \oplus m_0.$$

Supposons $\overline{m}_1 = 0$. Alors, $\mathfrak{M}_1 = m_1 \oplus m'_1 \sim m_0 \oplus m'_0 \subset \mathfrak{M}_0$, contrairement à notre hypothèse. Donc $\overline{m}_1 \neq 0$.

Puisque $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_i$, il existe des variétés m_i, $\overline{m}_i$, orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}$, avec $m_i \sim m_1$, $\overline{m}_i \sim \overline{m}_1$ et $(\overline{m}_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une partition homogène. Chaque m_i est irréductible puisque $\overline{m}_1 \subset \mathfrak{M}_1$ est irréductible. On va montrer que $\bigoplus_{1 \leq i \leq p} \overline{m}_i \tau_1 M \cap M'$, de sorte que $\overline{m}_1$ sera la variété irréductible simple du lemme.

$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_0$ sont orthogonales, sous-tendent H, et sont compatibles avec $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$; donc $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_p$; $m_1, m_2, \ldots, m_p, m_0$ sont orthogonales et sous-tendent $\mathfrak{M}$. D'autre part, $[m_1^M] \subset \mathfrak{M}$ et $[m_1^M] \subset \mathfrak{M}$ sont

orthogonales (lemme 4.8) et contiennent respectivement $\overline{m}_1 \oplus \overline{m}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{m}_p$ et $m_1 \oplus m_2 \oplus \ldots \oplus m_p \oplus m_0$. Donc

$$\overline{m}_1 \oplus \overline{m}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{m}_p = [\overline{m}_1^{\mathrm{M}}]_{\tau_1 \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'}.$$

Ce lemme va nous donner une décomposition de l'espace H qui permettra de dissocier le problème fondamental en problèmes partiels. Cette décomposition sera établie au lemme 4.11. Auparavant, notons encore pour plus tard le

Lemme 4.10. — *Si* H *est homogène, toute variété* $\mathfrak{M}_0 \tau_1 \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}_0 \neq 0$, *contient une variété irréductible simple.*

Démonstration. — Soit $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition homogène de H, chaque $\mathfrak{M}_i$ étant irréductible. Soit $\mathfrak{M}_0 \tau_1 \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}_0 \neq 0$. Appliquons le théorème 6 à $\mathfrak{M}_0$ et $\mathfrak{M}_1$. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \tau_1 \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, $\mathfrak{M}' = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}$;

trois variétés m_0, $\overline{m}_0$, $m_1 \tau_1 \mathrm{M}$ contenues dans $\mathfrak{M}$, $\overline{m}_0$ orthogonale à m_0 et m_1 ;

trois variétés m'_0, m'_1, $\overline{m}'_1$ contenues dans $\mathfrak{M}'$, $\overline{m}'_1$ orthogonale à m'_0 et m'_1, avec

$$m_0 \sim m_1, \qquad m'_0 \sim m'_1, \qquad \mathfrak{M}_0 = m_0 \oplus \overline{m}_0 \oplus m'_0, \qquad \mathfrak{M}_1 = m_1 \oplus m'_1 \oplus \overline{m}'_1.$$

Si $m_0 \oplus m'_0 = 0$, on a $m_1 \oplus m'_1 = 0$, donc $\mathfrak{M}_0 = \overline{m}_0 \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1 = \overline{m}'_1 \subset \mathfrak{M}'$. Mais $\mathfrak{M}_0 \neq 0$ entraîne $\mathfrak{M} \neq 0$, d'où $\mathfrak{M}' \neq \mathrm{H}$, ce qui est contradictoire avec $[\mathfrak{M}_1^{\mathrm{M}}] = \mathrm{H}$. Donc $m_0 \oplus m'_0 \neq 0$. Mais alors, comme $m_0 \oplus m'_0 \sim m_1 \oplus m'_1 \subset \mathfrak{M}_1$, $m_0 \oplus m'_0$ est irréductible. Il suffit enfin d'appliquer le lemme 4.9.

Lemme 4.11. — *S'il existe des variétés irréductibles, il existe une partition* $(\mathfrak{M}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *avec les propriétés suivantes :*

a. Chaque $\mathfrak{M}_i$ *est homogène ;*

b. $\mathfrak{M} = \mathrm{H} \ominus \left(\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{M}_i \right)$ *ne contient aucune variété irréductible.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble, non vide, d'après l'hypothèse, des partitions $\Phi = (\mathfrak{N}_j)_{j \in \mathrm{J}}$ dont chaque élément est homogène. Étant donnés deux éléments de $\mathcal{E}$, Φ et Φ', la relation $\Phi \subset \Phi'$ ordonne $\mathcal{E}$. Il est immédiat que le théorème de Zorn est applicable. Soit donc $\Phi = (\mathfrak{M}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ un élément maxima de $\mathcal{E}$. Soit $\mathfrak{M} = \mathrm{H} \ominus \left(\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{M}_i \right)$ et raisonnons dans l'espace $\mathfrak{M}$ dans lequel M induit un anneau d'opérateurs de classe finie d'après le lemme 4.1. Si $\mathfrak{M}$ contenait une variété irréductible, $\mathfrak{M}$ contiendrait (lemme 4.9) une variété irréductible simple donc une variété homogène, de sorte que Φ ne serait pas maximal. D'où le lemme.

Enfin, les deux lemmes suivants nous seront aussi utiles.

LEMME 4.12. — *Soient* $\mathfrak{N}_1 \tau_1 M$, $\mathfrak{N}_2 \tau_1 M$, $\mathfrak{N} \tau_1 M$ *avec* $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2$. *On a*

$$\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_2.$$

Démonstration. — Soient $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_2$. Appliquons le théorème 6 à $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \tau_1 M \cap M'$, $\mathfrak{M}' = H \ominus \mathfrak{M}$;

trois variétés m_1, m_2, $\bar{m}_1 \tau_1 M$ contenues dans $\mathfrak{M}$, $\bar{m}_1$ orthogonale à m_1 et m_2 ;

trois variétés m'_1, m'_2, $\bar{m}'_2 \tau_1 M$ contenues dans $\mathfrak{M}'$, m'_2 orthogonale à m'_1 et $\bar{m}'_2$, avec

$$m_1 \sim m_2, \qquad m'_1 \sim m'_2, \qquad \mathfrak{M}_1 = m_1 \oplus m_1 \oplus m'_1, \qquad \mathfrak{M}_2 = m_2 \oplus m'_2 \oplus \bar{m}'_2.$$

Posons

$$n_1 = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M}, \qquad n'_1 = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M}' ;$$
$$n_2 = \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{M}, \qquad n'_2 = \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{M}' ;$$
$$n = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}, \qquad n' = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}' ;$$

D'après le lemme 3.5, on a $n_1 \sim n_2$, $n'_1 \sim n'_2$.

$\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{N}_1$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{N}$. Donc

$$\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M} = m_1 \oplus \bar{m}_1 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M} = n_1$$

sont orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M} = n$. $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}' = m'_1$ et $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M}' = n'_1$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}' = n'$. De même, m_2 et n_2 sont orthogonales complémentaires dans n, $m'_2 \oplus \bar{m}'_2$ et n'_2 sont orthogonales complémentaires dans n'. Alors

$$n = m_2 \oplus n_2 \sim m_1 \oplus n_1 = n \ominus \bar{m}_1$$

d'où (lemme 4.1) $m_1 = 0$. De même, $\bar{m}'_2 = 0$. Donc

$$\mathfrak{M}_2 = m_2 \oplus m'_2 \sim m_1 \oplus m'_1 = \mathfrak{M}_1.$$

LEMME 4.13. — *Soit* $A \in (M \cap M')_s$. *Si, pour toute* $\mathfrak{M} \tau_1 M \cap M'$, *on a* $m_{\mathfrak{M}}(A) \leq 0$, *on a* $A \leq 0$.

Démonstration. — Si l'on n'avait pas $A \leq 0$, il existerait une variété spectrale $\mathfrak{M}$ de A telle que $m_{\mathfrak{M}}(A) > 0$. Or $\mathfrak{M} \tau_1 M \cap M'$. D'où contradiction.

Ces lemmes étant établis, reprenons les notations du lemme 4.11. Pour établir la validité de C.5, il suffit de raisonner dans chaque espace $\mathfrak{M}_i$ et dans l'espace $\mathfrak{M}$. Autrement dit, on peut supposer que H est homogène ou que H ne contient aucune variété irréductible. Nous allons envisager ces deux cas aux Chapitres V et VI.

V. — Cas où H est homogène.

THÉORÈME 8. — *Si* H *est homogène,* M *vérifie* C'.5.

Démonstration. — Soit $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n)$ une partition homogène de H, chaque $\mathfrak{M}_i$ étant irréductible. Soit $W_i \in M_{pi}$, les variétés initiale et finale de W_i étant $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Soit $g \in \mathfrak{M}_1$, avec $|g| = 1$, et soit $g_i = W_i g$.

Soient $A \in M_s$, $U_j (1 \leq j \leq p)$ des éléments de M_t, $\lambda_j (1 \leq j \leq p)$ des éléments de $\mathbf{R}$ avec $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 0$. Supposons $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j A U_j^{-1} \geq A'$ avec un $A' \in (M \cap M')_s$. Il faut prouver que $A' \leq 0$.

1. Supposons $A \geq 0$. Alors, $A = B^2$, avec $B \in M_s$. Soient $U \in M_t$, et $C = UB$. Soit $C_{ij} = W_j^* C W_i$. On a

$$\sum_{i=1}^{n} (Ag_i, g_i) = \sum_{i=1}^{n} (B^2 g_i, g_i) = \sum_{i=1}^{n} |Bg_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |Cg_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |CW_i g|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |P_{\mathfrak{M}_j} CW_i g|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |W_j^* CW_i g|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (C_{ij}^* C_{ij} g, g);$$

$$\sum_{i=1}^{n} (UAU^{-1} g_i, g_i) = \sum_{i=1}^{n} (UBBU^* g_i, g_i) = \sum_{i=1}^{n} (CC^* g_i, g_i) = \sum_{i=1}^{n} |C^* g_i|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |W_j^* C^* W_i g|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |C_{ji}^* g|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (C_{ji} C_{ji}^* g, g).$$

Or C_{ij} et C_{ij}^* sont réduits par $\mathfrak{M}_1$ irréductible, donc (lemme 4.7) : $C_{ji} C_{ji}^* g = C_{ji}^* C_{ji} g$. Donc

$$\sum_{i=1}^{n} (Ag_i, g_i) = \sum_{i=1}^{n} (UAU^{-1} g_i, g_i).$$

Par suite

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left| \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j A U_j^{-1} \right) g_i, g_i \right| \geq \sum_{i=1}^{n} \left(m(A') g_i, g_i \right) = n\, m(A').$$

Donc $m(A') \leq 0$.

2. Supposons $A \in M_s$ quelconque. On a $A + h \geq 0$ pour un $h \in \mathbf{R}$ bien choisi. Or

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j (A + h) U_j^{-1} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j A U_j^{-1} \geq A'.$$

et, d'après la première partie de la démonstration, on peut encore conclure $m(A') \leq 0$.

On peut répéter ce raisonnement dans toute variété $\mathfrak{M} \eta M \cap M'$, le lemme 4.13 prouve alors notre théorème.

VI. — Cas où H ne contient aucune variété irréductible.

Dans ce Chapitre, M désigne un anneau de classe finie sans variétés irréductibles.

Définition 6.1. — *Soit $\mathfrak{M} \eta M$. On dira que $\mathfrak{M}$ est une variété fondamentale (ou que $P_{\mathfrak{M}}$ est un projecteur fondamental) si $\mathfrak{M}$ est une variété simple d'ordre 2^n (n entier), autrement dit s'il existe une variété $\mathfrak{N} \eta M \cap M'$ et une partition homogène finie $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq 2^n}$ de $\mathfrak{N}$ telle que $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$. On désignera par M_f' l'ensemble des projecteurs fondamentaux de M. On écrira $\mathfrak{M} \eta M'$ si $P_{\mathfrak{M}} \in M_f'$. Une partition sera dite fondamentale si tous sès éléments sont fondamentaux.*

Lemme 6.1. — *Soit $\mathfrak{M} \eta M$, $\mathfrak{M} \neq 0$. Il existe une partition homogène d'ordre 2 de $\mathfrak{M}$.*

Demonstration. — Disons que deux partitions semblables $\Phi = (\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$, $\Phi' = (\mathfrak{M}'_i)_{i \in I}$ majorées par $\mathfrak{M}$ sont orthogonales si $\mathfrak{M}_i$ et $\mathfrak{M}'_j$ sont orthogonales pour $i \in I$, $j \in I$. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des couples (Φ, Φ') de partitions semblables orthogonales majorées par $\mathfrak{M}$. Étant donnés deux éléments de $\mathfrak{S}$, (Φ, Φ'_2) et (Φ_1, Φ'_1), la relation « $\Phi \subset \Phi_1$ et $\Phi' \subset \Phi'_1$ » ordonne $\mathfrak{S}$. Toute sous-famille $(\Phi_r, \Phi'_r)_{r \in R}$ totalement ordonnée de $\mathfrak{S}$ possède une borne supérieure, à savoir l'élément $\left(\bigcup_{r \in R} \Phi_r, \bigcup_{r \in R} \Phi'_r \right)$. Soit (théorème de Zorn) $(\overline{\Phi}, \overline{\Phi}')$ un élément maximal de $\mathfrak{S}$. On a $\overline{\Phi} = (\overline{\mathfrak{M}}_i)_{i \in \overline{I}}$, $\overline{\Phi}' = (\overline{\mathfrak{M}}'_i)_{i \in \overline{I}}$. Soit $\overline{\mathfrak{M}} = \bigoplus_{i \in \overline{I}} \overline{\mathfrak{M}}_i$, $\overline{\mathfrak{M}}' = \bigoplus_{i \in \overline{I}} \overline{\mathfrak{M}}'_i$. On a $\overline{\mathfrak{M}} \sim \overline{\mathfrak{M}}'$ (lemme 3.4), et $\overline{\mathfrak{M}}$, $\overline{\mathfrak{M}}'$ sont orthogonales. Supposons $\overline{\mathfrak{M}} \oplus \overline{\mathfrak{M}}' \neq \mathfrak{M}$. Alors $m = \mathfrak{M} \ominus (\overline{\mathfrak{M}} \oplus \overline{\mathfrak{M}}') \neq 0$, donc il existe une partition homogène (n, n') majorée par m. Alors, $(\overline{\Phi} \cup \{n\}, \overline{\Phi}' \cup \{n'\})$ est encore un élément de $\mathfrak{S}$, ce qui est absurde puisque $(\overline{\Phi}, \overline{\Phi}')$ est maximal. Donc $\overline{\mathfrak{M}} \oplus \overline{\mathfrak{M}}' = \mathfrak{M}$.

Lemme 6.2. — *Soit $\mathfrak{M} \eta M$, $\mathfrak{M} \neq 0$. Il existe, pour tout entier n, une partition homogène d'ordre 2^n de $\mathfrak{M}$.*

Démonstration. — Raisonnant par récurrence, supposons qu'il existe une partition homogène, $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq 2^{n-1}}$, de $\mathfrak{M}$. Soit (lemme 6.1) $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$ une partition homogène de $\mathfrak{M}_1$. Comme $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_i$, on voit aussitôt qu'il existe une

partition homogène $(\mathfrak{N}_{2i-1}, \mathfrak{N}_{2i})$ de $\mathfrak{M}_i$, avec $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2 \sim \mathfrak{N}_{2i-1} \sim \mathfrak{N}_{2i}$. La famille $(\mathfrak{N}_i)_{1 \leq i \leq 2^n}$ est une partition homogène de $\mathfrak{M}$.

LEMME 6.3. — α. *Soit* $\mathfrak{M}_1 \eta \mathrm{M}'$ *et soit* $\mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}_1$. *On a* $\mathfrak{M}_2 \eta \mathrm{M}'$ *et* $\mathrm{T}(\mathfrak{M}_2) = \mathrm{T}(\mathfrak{M}_1)$.

β. *Soient* $\mathfrak{M}_1 \eta \mathrm{M}'$, $\mathfrak{M}_2 \eta \mathrm{M}'$. $\mathrm{T}(\mathfrak{M}_1) = \mathrm{T}(\mathfrak{M}_2)$ *entraîne* $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$.

Démonstration. — 1. Soit $(\mathfrak{M}'_1)_{1 \leq i \leq 2^n}$ une partition homogène de $\mathfrak{N} \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, avec $\mathfrak{M}'_1 = \mathfrak{M}_1$. Soit $\mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}_1$. On a $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{N}$ (lemme 3.1.β) et $\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{N} \ominus \mathfrak{M}_1$ (lemme 4.12). Donc il existe une partition $(\mathfrak{M}'_2)_{2 \leq i \leq 2^n}$ de $\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{M}_2$ avec $\mathfrak{M}'_2 \sim \mathfrak{M}'_i$ pour $2 \leq i \leq 2^n$. Alors, en posant $\mathfrak{M}'_2 = \mathfrak{M}_2$, le système $(\mathfrak{M}'_2)_{1 \leq i \leq 2^n}$ est une partition homogène d'ordre 2^n de $\mathfrak{N}$. D'où α.

2. Soient $(\mathfrak{M}'_i)_{1 \leq i \leq 2^n}$ et $(\mathfrak{M}''_i)_{1 \leq i \leq 2^n}$ deux partitions homogènes de $\mathfrak{N} \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, avec $\mathfrak{M}'_1 = \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}''_2 = \mathfrak{M}_2$. Appliquons le théorème 6 à $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, $\mathfrak{M}' = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}$;

trois variétés m_1, m_2, $\overline{m}_1 \eta \mathrm{M}$ contenues dans $\mathfrak{M}$, $\overline{m}_1$ orthogonale à m_1 et m_2;

trois variétés m'_1, m'_2, $\overline{m}'_2 \eta \mathrm{M}$ contenues dans $\mathfrak{M}'$, $\overline{m}'_2$ orthogonale à m'_1 et m'_2, telles que

$$m_1 \sim m_2, \qquad m'_1 \sim m'_2, \qquad \mathfrak{M}_1 = m_1 \oplus \overline{m}_1 \oplus m'_1, \qquad \mathfrak{M}_2 = m_2 \oplus m'_2 \oplus \overline{m}'_2.$$

Comme $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}'_1$, on a $\mathfrak{M}'_1 = m'_1 \oplus \overline{m}'_1 \oplus m'_1{}'$, m'_1, $\overline{m}'_1$, $m'_1{}'$ étant deux à deux orthogonales, avec $m'_1 \oplus \overline{m}'_1 \subset \mathfrak{M}$, $m'_1{}' \subset \mathfrak{M}'$, $m'_1 \sim m_1$, $\overline{m}'_1 \sim \overline{m}_1$, $m'_1{}' \sim m'_1$. De même, on a $\mathfrak{M}''_2 = m''_2 \oplus m''_2{}' \oplus \overline{m}''_2{}'$, m''_2, $m''_2{}'$, $\overline{m}''_2{}'$ étant deux à deux orthogonales, avec $m''_2 \subset \mathfrak{M}$, $m''_2{}' \oplus \overline{m}''_2{}' \subset \mathfrak{M}'$, $m''_2 \sim m_2$, $m''_2{}' \sim m'_2$, $\overline{m}''_2{}' \sim \overline{m}'_2$.

Puisque les $\mathfrak{M}'_1$, compatibles avec $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$, forment une partition de $\mathfrak{N}$, les $\mathfrak{M}'_1 \cap \mathfrak{M} = m'_1 \oplus \overline{m}'_1$ forment une partition de $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$. De même, les m'_2 forment une partition de $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$. On a $m'_2 \sim m'_1$, donc (lemme 3.4) $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M} \sim \bigoplus_{i=1}^{2^n} m'_1 \subset \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$, d'où, par le lemme 4.1, $\overline{m}'_1 = 0$. De même $\overline{m}''_2{}' = 0$. Donc $\mathfrak{M}_1 = m_1 \oplus m'_1 \sim m_2 \oplus m'_2 = \mathfrak{M}_2$. D'où β.

LEMME 6.4. — *Soit* $\mathfrak{M}_1 \eta \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}_1 \neq 0$. *Il existe une variété fondamentale contenue dans* $\mathfrak{M}_1$.

Supposons que $\mathfrak{M}_1$ ne contienne aucune variété fondamentale.

Construisons successivement des variétés $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, ... de telle sorte que, pour chaque entier n, $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ soit une partition homogène. D'après le lemme 4.2, cette construction ne peut se poursuivre indéfiniment, donc il existe un entier m, et une partition homogène $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq m}$, avec la propriété suivante :

$\mathfrak{M}_0 = \mathrm{H} \ominus \left(\bigoplus_{1 \leq i \leq m} \mathfrak{M}_i \right)$ ne contient aucune variété équivalente à $\mathfrak{M}_1$.

Appliquons le théorème 6 à $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_0$. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}' \gamma_1 \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, avec $\mathfrak{N}' = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}$;

trois variétés m_1, $\overline{m}_1$, $m_0 \gamma_1 \mathrm{M}$ contenues dans $\mathfrak{N}$ avec $\overline{m}_1$ orthogonale à m_1 et m_0 ;

trois variétés m'_1, m'_0, $\overline{m}'_0 \gamma_1 \mathrm{M}$ contenues dans $\mathfrak{N}'$ avec $\overline{m}'_0$ orthogonale à m'_1 et m'_0,

avec

$$m_1 \sim m_0, \qquad m'_1 \sim m'_0 \qquad \mathfrak{M}_1 = m_1 \oplus \overline{m}_1 \oplus m'_1 \qquad \mathfrak{M}_0 = m_0 \oplus m'_0 \oplus \overline{m}'_0.$$

Comme $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_i$ pour $1 \leq i \leq n$, on a $\mathfrak{M}_i = m_i \oplus \overline{m}_i \oplus m'_i$, m_i, $\overline{m}_i$, m'_i étant deux à deux orthogonales, avec $m_i \sim m_1$, $\overline{m}_i \sim \overline{m}_1$, $m'_i \sim m'_1$, donc $m_i \subset \mathfrak{N}$, $\overline{m}_i \subset \mathfrak{N}$, $m'_i \subset \mathfrak{N}'$. Puisque $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ..., $\mathfrak{M}_n$ sont orthogonales et sous-tendent H, m_0, m_1, m_2, ..., m_n, $\overline{m}_1$, $\overline{m}_2$, ..., $\overline{m}_n$, sont orthogonales et sous-tendent $\mathfrak{N}$. D'ailleurs, $\mathfrak{N} \neq 0$, car $\mathfrak{N} = 0$ entrainerait

$$\mathfrak{M}_1 = m'_1 \sim m'_0 \subset \mathfrak{M}_0$$

contrairement aux propriétés de $\mathfrak{M}_0$.

Puisque $m_1 \oplus \overline{m}_1 \subset \mathfrak{M}_1$, $m_1 \oplus \overline{m}_1$ ne contient aucune variété fondamentale. Changeant de notations, nous allons faire jouer à $\mathfrak{N}$ le rôle de H et à $m_1 \oplus \overline{m}_1$ le rôle de $\mathfrak{M}_1$. Nous avons alors la situation suivante :

$\mathfrak{M}_1 \neq 0$ ne contient aucune variété fondamentale. Il existe une partition homogène $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $\mathfrak{M}_0 = \mathrm{H} \ominus \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i \right)$ soit équivalente à une variété contenue dans $\mathfrak{M}_1$.

Soit $(\mathfrak{M}'_i)_{1 \leq i \leq n'}$ une partition homogène de H telle que $2^{n'} > n + 1$ (lemme 6.2). Cette partition est fondamentale. Appliquons le théorème 6 à $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}'$. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}' \gamma_1 \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, $\mathfrak{N}' = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}$;

trois variétés m_1, $\overline{m}_1$, $m' \gamma_1 \mathrm{M}$ contenues dans $\mathfrak{N}$, $\overline{m}_1$ orthogonal à m_1 et m' ;

trois variétés m'_1, m'', $\overline{m}'' \gamma_1 \mathrm{M}$ contenues dans $\mathfrak{N}'$, $\overline{m}''$ orthogonale à m'_1 et m'',

avec

$$m_1 \sim m', \qquad m'_1 \sim m'' \qquad \mathfrak{M}_1 = m_1 \oplus \overline{m}_1 \oplus m'_1, \qquad \mathfrak{M}' = m' \oplus m'' \oplus \overline{m}''.$$

Les $\mathfrak{M}'$ sont orthogonales et sous-tendent H, donc les $m' = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{N}$ sont orthogonales et sous-tendent $\mathfrak{N}$. Si $m' \neq 0$, les m' sont donc fondamentales, ce qui est absurde puisque $m' \sim m' \sim m_1 \subset \mathfrak{M}_1$. Donc $m' = 0$ et par suite $\mathfrak{N} = 0$. Alors

$$\mathfrak{M}_1 = m'_1 \sim m'' \subset \mathfrak{M}'.$$

Puisque chaque $\mathfrak{M}_i$, pour $0 \leq i \leq n$, est équivalente à $\mathfrak{M}_1$ ou a une variété contenue dans $\mathfrak{M}_1$, on en déduit que $\mathfrak{M}_i$ est équivalente, pour $0 \leq i \leq n$, a une variété contenue dans $\mathfrak{M}^{i+1}$, donc que $\mathrm{H} = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathfrak{M}_i$ est équivalente a une variété contenue dans $\bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathfrak{M}^i \neq \mathrm{H}$ ce qui est absurde.

Le lemme précédent montre au fond l'existence *d'un nombre suffisamment grand* de variétés fondamentales.

Toutes les démonstrations qui viennent sont maintenant orientées vers la démonstration du lemme 6.13.

Lemme 6.5. — *Soient* $\mathfrak{M} \eta_1 \mathrm{M}'$, $\mathfrak{M}' \eta_1 \mathrm{M}'$, $\mathfrak{N} \eta_1 \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, *avec* $\mathrm{T}(\mathfrak{M}) = 2^{-p} \mathrm{P}_{\mathfrak{N}}$, $\mathrm{T}(\mathfrak{M}') = 2^{-q} \mathrm{P}_{\mathfrak{N}}$, *et* $q \geq p$. *Il existe une partition homogène* $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq 2^{q-p}}$ *de* $\mathfrak{M}$, *avec* $\mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{M}' (1 \leq i \leq 2^{q-p})$.

Démonstration. — Soit $(\mathfrak{M}'_i)_{1 \leq i \leq 2^q}$ une partition homogène de $\mathfrak{N}$, avec $\mathfrak{M}'_1 = \mathfrak{M}'$. Posons, pour $1 \leq j \leq 2^p$:

$$\mathfrak{M}''_j = \bigoplus_{r=(j-1)2^{q-p}+1}^{j 2^{q-p}} \mathfrak{M}'_r.$$

D'après le lemme 3.7, $\mathfrak{M}''_j \sim \mathfrak{M}''_1$ pour $1 \leq j \leq 2^p$. Donc les $\mathfrak{M}''_j$ forment une partition homogène d'ordre 2^p de $\mathfrak{N}$, de sorte que $\mathrm{T}(\mathfrak{M}''_1) = 2^{-p} \mathrm{P}_{\mathfrak{N}} = \mathrm{T}(\mathfrak{M})$. Donc (lemme 6.3.β), $\mathfrak{M}''_1 \sim \mathfrak{M}$. La partition de $\mathfrak{M}''_1$ en variétés $\mathfrak{M}'_r$ fournit la partition cherchée de $\mathfrak{M}$.

Lemme 6.6. — *Soient* $\mathfrak{M}_1 \eta_1 \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}_2 \eta_1 \mathrm{M}$, ..., $\mathfrak{M}_n \eta_1 \mathrm{M}$. *Il existe des variétés orthogonales* $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, ..., $\mathfrak{L}_\omega \eta_1 \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$ *sous-tendant* H, *telles que, en posant,* $\mathfrak{M}_{i,\alpha} = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{L}_\alpha$ *on ait*

$$\mathfrak{M}_{i,\alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad [\mathfrak{M}^{\mathrm{M}}_{i,\alpha}] = \mathfrak{L}_\alpha \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq \alpha \leq \omega).$$

Démonstration. — Le lemme est immédiat si l'entier n est égal à 1 [il suffit de prendre $\mathfrak{L}_1 = [\mathfrak{M}_1^{\mathrm{M}}]$, $\mathfrak{L}_2 = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{L}_1$]. Supposons-le démontré pour l'entier n et démontrons-le pour l'entier $n+1$. Soient donc $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ..., $\mathfrak{M}_{n+1} \eta_1 \mathrm{M}'$. Il existe des variétées orthogonales $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, ..., $\mathfrak{L}_\omega \eta_1 \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$ sous-tendant H, telles que, en posant

$$\mathfrak{M}_{i,\alpha} = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{L}_\alpha \quad (1 \leq i \leq n+1,\ 1 \leq \alpha \leq \omega),$$

on ait

$$\mathfrak{M}_{i,\alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad [\mathfrak{M}^{\mathrm{M}}_{i,\alpha}] = \mathfrak{L}_\alpha \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n.$$

On a $\mathfrak{L}'_\alpha = [\mathfrak{M}^{\mathrm{M}}_{n+1,\alpha}] \subset \mathfrak{L}_\alpha$. Soit $\mathfrak{L}''_\alpha = \mathfrak{L}_\alpha \ominus \mathfrak{L}'_\alpha$. On a $\mathfrak{M}_{n+1,\alpha} \cap \mathfrak{L}''_\alpha = 0$. D'ailleurs $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{L}''_\alpha = 0$ ou $[(\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{L}''_\alpha)^{\mathrm{M}}] = \mathfrak{L}''_\alpha$ pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \alpha \leq \omega$, $r = 1, 2$. D'où le lemme pour l'entier $n+1$.

LEMME 6.7. — *Soit $(\mathfrak{M}_i)_{1\leq i\leq n}$ une partition fondamentale de $\mathfrak{M}\eta\mathrm{M}$. Soit $(\mathfrak{N}_j)_{1\leq j\leq p}$ une partition fondamentale majorée par $\mathfrak{M}$ ou une famille vide. Soit $\mathfrak{N}\eta\mathrm{M}'$ telle que*

$$\sum_{j=1}^{p}\mathrm{T}(\mathfrak{N}_j)+\mathrm{T}(\mathfrak{N})\leq\sum_{i=1}^{n}\mathrm{T}(\mathfrak{M}_i).$$

Alors il existe une $\mathfrak{N}_{p+1}\sim\mathfrak{N}$ telle que $(\mathfrak{N}_j)_{1\leq j\leq p+1}$ soit une partition majorée par $\mathfrak{M}$.

Démonstration. — 1. Supposons d'abord qu'il existe une variété $\mathfrak{Z}\eta\mathrm{M}\cap\mathrm{M}'$ telle que $\mathrm{T}(\mathfrak{M}_i)=2^{-r_i}\mathrm{P}_{\mathfrak{Z}}$, $\mathrm{T}(\mathfrak{N}_j)=2^{-s_j}\mathrm{P}_{\mathfrak{Z}}$, $\mathrm{T}(\mathfrak{N})=2^{-s}\mathrm{P}_{\mathfrak{Z}}$, r_i, s_j, s étant des entiers. Soit q un entier supérieur aux r_i, aux s_j et à s, et soit $\mathfrak{T}\eta\mathrm{M}'$ telle que $\mathrm{T}(\mathfrak{T})=2^{-q}\mathrm{P}_{\mathfrak{Z}}$ (lemme 6.2). Soient $(\mathfrak{M}_i^{\lambda})_{1\leq\lambda\leq 2^{q-r_i}}$, $(\mathfrak{N}_j^{\mu})_{1\leq\mu\leq 2^{q-s_j}}$, $(\mathfrak{N}^{\nu})_{1\leq\nu\leq 2^{q-s}}$ des partitions de $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_j$, $\mathfrak{N}$, avec $\mathfrak{M}_i^{\lambda}\sim\mathfrak{N}_j^{\mu}\sim\mathfrak{N}^{\nu}\sim\mathfrak{T}$ pour $1\leq i\leq n$, $1\leq\lambda\leq 2^{q-r_i}$, $1\leq j\leq p\ldots$ (lemme 6.5). $(\mathfrak{M}_i^{\lambda})_{1\leq i\leq n,\,1\leq\lambda\leq 2^{q-r_i}}$ est une partition fondamentale homogène de $\mathfrak{M}$, d'ordre $\sum_{i=1}^{n}2^{q-r_i}.(\mathfrak{N}_j^{\mu})_{1\leq j\leq p,\,1\leq\mu\leq 2^{q-s_j}}$ est une partition fondamentale homogène majorée par $\mathfrak{M}$, d'ordre $\sum_{j=1}^{p}2^{q-s_j}$. L'hypothèse du lemme s'écrit

$$\sum_{j=1}^{p}2^{-s_j}+2^{-s}\leq\sum_{i=1}^{n}2^{-r_i}$$

ou

$$(\star)\qquad\sum_{j=1}^{p}2^{q-s_j}+2^{q-s}\leq\sum_{i=1}^{n}2^{q-r_i}.$$

Choisissons, dans l'ensemble $\mathfrak{S}$ des $\mathfrak{M}_i^{\lambda}$, un sous-ensemble $\mathfrak{S}_1$ de $\sum_{j=1}^{p}2^{q-s_j}$ éléments. D'après le lemme 3.4, la variété qu'ils sous-tendent est équivalente à $\overline{\mathfrak{N}}=\bigoplus_{j=1}^{p}\mathfrak{N}_j$. Soit $\overline{\mathfrak{M}}$ la variété sous-tendue par les éléments de $\mathfrak{S}-\mathfrak{S}_1$. On a (lemme 4.12)

$$\overline{\mathfrak{M}}\sim\mathfrak{M}\ominus\overline{\mathfrak{N}}$$

Donc il existe une partition $(\mathfrak{N}'_{\nu})_{1\leq\nu\leq m}$ de $\mathfrak{M}\ominus\overline{\mathfrak{N}}$, m étant le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}-\mathfrak{S}_1$, avec $\mathfrak{N}'_{\nu}\sim\mathfrak{M}_i^{\lambda}$ $(1\leq\nu\leq m)$. Or l'inégalité $(\star)$ prouve que $m\geq 2^{q-s}$. Remarquant que $\mathfrak{N}'_{\nu}\sim\mathfrak{N}^{\nu}$ pour $1\leq\nu\leq 2^{q-s}$, on voit que $\mathfrak{N}\sim\bigoplus_{\nu=1}^{2^{q-s}}\mathfrak{N}'_{\nu}$. Donc $\bigoplus_{\nu=1}^{2^{q-s}}\mathfrak{N}'_{\nu}$ est la variété $\mathfrak{N}_{p+1}$ du lemme.

2. Envisageons maintenant le cas général. Il existe (lemme 6.6) un nombre fini de variétés orthogonales, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, ..., $\mathfrak{L}_n\eta\mathrm{M}\cap\mathrm{M}'$ telles que, en posant

$$\mathfrak{M}_{i\alpha}=\mathfrak{M}_i\cap\mathfrak{L}_{\alpha},\qquad\mathfrak{N}_{j\alpha}=\mathfrak{N}_j\cap\mathfrak{L}_{\alpha},\qquad\mathfrak{N}_{\alpha}=\mathfrak{N}\cap\mathfrak{L}_{\alpha}$$

on ait

$$\mathfrak{M}_{i,\alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad [\mathfrak{M}_{i,\alpha}^{M}] = \mathfrak{L}_{\alpha},$$
$$\mathfrak{N}_{i,\alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad [\mathfrak{N}_{i,\alpha}^{M}] = \mathfrak{L}_{\alpha},$$
$$\mathfrak{N}_{\alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad [\mathfrak{N}_{\alpha}^{M}] = \mathfrak{L}_{\alpha}.$$

Donc

$$T(\mathfrak{M}_{i,\alpha}) = 0 \quad \text{ou} \quad 2^{-r_{i,\alpha}} P_{\mathfrak{L}_{\alpha}},$$
$$T(\mathfrak{N}_{j,\alpha}) = 0 \quad \text{ou} \quad 2^{-s_{j,\alpha}} P_{\mathfrak{L}_{\alpha}},$$
$$T(\mathfrak{N}_{\alpha}) = 0 \quad \text{ou} \quad 2^{-t_{\alpha}} P_{\mathfrak{L}_{\alpha}},$$

et

$$\sum_{j=1}^{p} T(\mathfrak{N}_{j,\alpha}) + T(\mathfrak{N}_{\alpha}) \leq \sum_{i=1}^{n} T(\mathfrak{M}_{i,\alpha}).$$

D'après la première partie de la démonstration, et raisonnant dans l'espace $\mathfrak{L}_{\alpha}$, il existe une variété $\mathfrak{N}_{p+1,\alpha} \sim \mathfrak{N}_{\alpha}$ telle que $(\mathfrak{N}_{j,\alpha})_{1 \leq j \leq p+1}$ soit une partition majorée par $\mathfrak{M}_{\alpha}$, si $\mathfrak{N}_{\alpha} \neq 0$. Il suffit alors de poser

$$\mathfrak{N}_{p+1} = \bigoplus_{\alpha=1}^{\omega} \mathfrak{N}_{p+1,\alpha}.$$

LEMME 6.8. — *Soient* $\mathfrak{M}_1 \eta M$, $\mathfrak{M}_2 \eta M$, ..., $\mathfrak{M}_n \eta M$, $\mathfrak{M} \eta M \cap M'$ *des variétés telles que* $[\mathfrak{M}_i^{M}] = \mathfrak{M}$ *pour* $1 \leq i \leq n$, *avec* $\mathfrak{M} \neq 0$. *Soit* $\mathfrak{M}_{n+1} \eta M$ *une variété telle que* $\mathfrak{M}_{n+1} \cap \mathfrak{M} \neq 0$. *Alors il existe une variété* $\mathfrak{M}' \eta M \cap M'$, *contenue dans* $\mathfrak{M}$, *avec* $\mathfrak{M}' \neq 0$, *et telle que, en posant* $\mathfrak{M}_i' = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}'$, *on ait* $[\mathfrak{M}_i'^{M}] = \mathfrak{M}'$ *pour* $1 \leq i \leq n+1$.

Démonstration. — Posons

$$\mathfrak{M}' = [(\mathfrak{M}_{n+1} \cap \mathfrak{M})^{M}], \text{ et } \mathfrak{M}_i' = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}' \ (1 \leq i \leq n+1).$$

On a $\mathfrak{M}_{n+1} \cap \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, donc (lemme 3.1.$\alpha$) $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$. D'autre part, $\mathfrak{M}_{n+1} \cap \mathfrak{M} \neq 0$ entraine $\mathfrak{M}' \neq 0$.

Montrons que $[\mathfrak{M}_{n+1}'^{M}] = \mathfrak{M}'$. $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ donne $\mathfrak{M}_{n+1} \cap \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}_{n+1} \cap \mathfrak{M}$ d'autre part, $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}_{n+1} \cap \mathfrak{M}$ donne $\mathfrak{M}_{n+1} \cap \mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}_{n+1} \cap \mathfrak{M}$. Donc

$$\mathfrak{M}_{n+1} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{n+1} \cap \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_{n+1}'.$$

Donc $[\mathfrak{M}_{n+1}'^{M}] = [(\mathfrak{M}_{n+1} \cap \mathfrak{M})^{M}] = \mathfrak{M}'$.

Montrons enfin que $[\mathfrak{M}_i'^{M}] = \mathfrak{M}'$ pour $1 \leq i \leq n$. On a $\mathfrak{M}_i' \subset \mathfrak{M}'$ donc (lemme 3.1.α) $[\mathfrak{M}_i'^{M}] \subset \mathfrak{M}'$. Si l'on avait $[\mathfrak{M}_i'^{M}] \neq \mathfrak{M}'$, on aurait

$$(\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}') \oplus [\mathfrak{M}_i'^{M}] \neq \mathfrak{M},$$

et, comme $(\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}') \oplus [\mathfrak{M}_i'^{M}] \supset \mathfrak{M}_i$, il y aurait contradiction puisque $\mathfrak{M}$ est la plus petite variété contenant $\mathfrak{M}_i$ telle que $\mathfrak{M} \eta M \cap M'$.

LEMME 6.9. — *Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une partition fondamentale dont tous les éléments sont d'ordre strictement inférieur à un entier n. Il existe une variété $\mathfrak{N}\eta\,\mathfrak{M}\cap\mathfrak{M}'$ telle que $\mathfrak{N}\neq 0$ et $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}_i=0$ sauf pour un nombre fini de variétés $\mathfrak{M}_i$*

Démonstration. — Soit $i_1\in I$, et soit $\mathfrak{N}_1=[\mathfrak{M}_{i_1}^{\mathfrak{M}}]$. Si $\mathfrak{N}_1\cap\mathfrak{M}_i=0$ pour $i\in I$, $i\neq i_1$, le lemme est démontré. Sinon, $\mathfrak{N}_1\cap\mathfrak{M}_{i_2}\neq 0$ pour un $i_2\in I$. Alors (lemme 6.8) il existe une $\mathfrak{N}_2\eta\,\mathfrak{M}\cap\mathfrak{M}'$, avec $\mathfrak{N}_2\subset\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2\neq 0$, telle que

$$[(\mathfrak{N}_2\cap\mathfrak{M}_{i_1})^{\mathfrak{M}}]=[(\mathfrak{N}_2\cap\mathfrak{M}_{i_2})^{\mathfrak{M}}]=\mathfrak{N}_2.$$

Si $\mathfrak{N}_2\cap\mathfrak{M}_i=0$ pour $i\in I$, $i\neq i_1$, $i\neq i_2$, le lemme est démontré, etc. Supposant qu'aucune des variétés $\mathfrak{N}_j$ successivement construites ne puisse jouer le rôle de la variété $\mathfrak{N}$ du lemme, nous allons aboutir à une contradiction. Posons

$$m_i=\mathfrak{N}_n\cap\mathfrak{M}_i.$$

On a

$$[m_{i_1}^{\mathfrak{M}}]=[m_{i_2}^{\mathfrak{M}}]=\ldots=[m_{i_n}^{\mathfrak{M}}]=\mathfrak{N}_n\neq 0,$$

de sorte que les m_{i_s} forment une partition d'ordre n majorée par $\mathfrak{N}_n$. D'autre part, d'après le lemme 4.5, chaque variété m_{i_s} est une variété fondamentale d'ordre strictement inférieur à n. Soit 2^p l'ordre maximum des m_{i_s}, et supposons par exemple que m_{i_1} soit d'ordre 2^p ($2^p<n$). Il existe une partition homogène d'ordre 2^p de $[m_{i_1}^{\mathfrak{M}}]=\mathfrak{N}_n$, soit $(m'_j)_{1\leq j\leq 2^p}$, avec $m'_1=m_{i_1}$. D'après le lemme 6.5, on a $m'_j\sim m''_j\subset m_{i_j}$ pour $1\leq j\leq 2^p$, donc (lemme 3.4) :

$$\mathfrak{N}_n=\bigoplus_{j=1}^{2^p}m'_j\sim\bigoplus_{j=1}^{2^p}m''_j\subset\mathfrak{N}_n.$$

D'où absurdité.

LEMME 6.10. — *Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une partition fondamentale dont tous les éléments sont d'ordre inférieur à un entier fixé. Il existe une partition $(\mathfrak{P}_j)_{j\in J}$ de* H, *avec $\mathfrak{P}_j\eta\,\mathfrak{M}\cap\mathfrak{M}'$ telle que, pour tout $j\in J$, on a $\mathfrak{P}_j\cap\mathfrak{M}_i=0$ sauf pour un nombre fini de variétés $\mathfrak{M}_i$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des partitions $\Phi=(\mathfrak{P}'_k)_{k\in K}$, avec $\mathfrak{P}'_k\eta\,\mathfrak{M}\cap\mathfrak{M}'$, telles que, pour tout $k\in K$, on ait $\mathfrak{P}'_k\cap\mathfrak{M}_i=0$ sauf pour un nombre fini de variétés $\mathfrak{M}_i$. Étant donnés deux éléments Φ, Φ', de $\mathcal{E}$, la relation $\Phi\subset\Phi'$ ordonne $\mathcal{E}$ et le théorème de Zorn est applicable.

Soit $(\mathfrak{P}_j)_{j\in J}$ un élément maximal de $\mathcal{E}$. Soit $\mathfrak{P}=H\ominus\left(\bigoplus_{j\in J}\mathfrak{P}_j\right)$. Si $\mathfrak{P}\neq 0$, on peut appliquer dans l'espace $\mathfrak{P}$ le lemme 6.9, d'où absurdité puisque $(\mathfrak{P}_j)_{j\in J}$ est maximal. Donc $\mathfrak{P}=0$, et les $\mathfrak{P}_j$ forment une partition de H. D'où le lemme.

LEMME 6.11. — *Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une partition fondamentale. $\sum_{i\in I}T(\mathfrak{M}_i)$ existe, et même on a*

$$\sum_{i\in I}T(\mathfrak{M}_i)\leq 1.$$

Démonstration. — Il suffit de prouver que, pour toute partie finie J de I, on a $\sum_{i\in J} T(\mathfrak{M}_i) \leq 1$. Autrement dit, nous pouvons désormais supposer I fini.

Soient alors (lemme 6.6) $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_\omega \eta M \cap M'$ des variétés deux à deux orthogonales sous-tendant H telles que, en posant $\mathfrak{M}_{i,\alpha} = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{L}_\alpha$ on ait $\mathfrak{M}_{i,\alpha} = 0$ ou $[\mathfrak{M}_{i,\alpha}^{M}] = \mathfrak{L}_\alpha$. Les $\mathfrak{M}_{i,\alpha} \neq 0$ forment une partition fondamentale dans $\mathfrak{L}_\alpha$ (lemme 4.5), et, raisonnant dans l'espace $\mathfrak{L}_\alpha$, on voit qu'il suffit de prouver le lemme quand $T(\mathfrak{M}_i) = 2^{-n_i}.\mathbf{1}$ pour $i \in I$. Soit alors n un entier supérieur aux n_i et $(\mathfrak{N}_j)_{1\leq j\leq 2^n}$ une partition homogène d'ordre 2^n de H. D'après le lemme 6.5, il existe une partition d'ordre 2^{n-n_i} de $\mathfrak{M}_i$ par des variétés équivalentes aux $\mathfrak{N}_j$, et l'ensemble de ces variétés forme donc une partition, soit $(\mathfrak{N}'_j)$, d'ordre $\sum_{i\in I} 2^{n-n_i}$ dont toutes les variétés sont équivalentes aux $\mathfrak{N}_j$. Si l'on avait $\sum_{i\in I} 2^{n-n_i} > 2^n$ on aurait

$$H = \bigoplus_{j=1}^{2^n} \mathfrak{N}_j \sim \bigoplus_{j=1}^{2^n} \mathfrak{N}'_j \neq H,$$

d'où absurdité. Donc

$$\sum_{i\in I} 2^{n-n_i} \leq 2^n \quad \text{ou} \quad \sum_{i\in I} 2^{-n_i} \leq 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

LEMME 6.12. — *Soient* $A \in (M \cap M')_S$, $B \in (M \cap M')_S$. *Si l'on a* $A > B$, *il existe une variété* $\mathfrak{M} \eta M'$ *telle que* $A \geq B + T(\mathfrak{M})$.

Démonstration. — Puisque $A - B > 0$, il existe une variété $\mathfrak{M} \eta M \cap M'$ telle que $m_{\mathfrak{M}}(A - B) > 0$. Soit p un entier tel que $2^{-p} < m_{\mathfrak{M}}(A - B)$. Soit (lemme 6.2) $\mathfrak{M} \eta M'$ telle que $T(\mathfrak{M}) = 2^{-p} P_{\mathfrak{M}}.\mathfrak{M}$ répond aux conditions du lemme.

LEMME 6.13. — *Soient* $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$, $(\mathfrak{M}'_j)_{j\in J}$ *deux partitions fondamentales telles que* $\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i = \bigoplus_{j\in J} \mathfrak{M}'_j$. *On a*

$$\sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i) = \sum_{j\in J} T(\mathfrak{M}'_j).$$

Démonstration. — On va montrer que, pour toute partie finie J' de J, on a

$$\sum_{j\in J'} T(\mathfrak{M}'_j) \leq \sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i).$$

Il en résultera

$$\sum_{j\in J} T(\mathfrak{M}'_j) \leq \sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i),$$

et, par symétrie entre les $\mathfrak{M}_i$ et les $\mathfrak{M}'_j$, le lemme sera démontré.

Or, si l'on n'avait pas $\sum_{j\in J'} T(\mathfrak{M}'_j) \leq \sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i)$ on aurait, pour une variété $\mathfrak{L}\eta\mathbf{M}\cap\mathbf{M}'$,

$$m_{\mathfrak{L}}\left[\sum_{j\in J'} T(\mathfrak{M}'_j) - \sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i)\right] > 0.$$

Raisonnant dans l'espace $\mathfrak{L}$ que nous appelons désormais H par changement de notations, on voit que nous sommes ramenés à prouver ceci :

Soient $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une partition fondamentale, et $(\mathfrak{M}'_1, \mathfrak{M}'_2, \ldots, \mathfrak{M}'_n)$ une partition fondamentale majorée par $\bigoplus_{i\in I}\mathfrak{M}_i$. L'inégalité $\sum_{j=1}^{n} T(\mathfrak{M}'_j) > \sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i)$ est impossible.

Or, supposons cette inégalité vérifiée. D'après le lemme 6.12, il existe une variété $\mathfrak{M}_0\eta\mathbf{M}'$ telle que

$$\sum_{j=1}^{n} T(\mathfrak{M}'_j) \geqq T(\mathfrak{M}_0) + \sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i).$$

Nous allons voir que ceci entraîne l'existence d'une partition $(\mathfrak{N}_i)_{i\in I\cup\{0\}}$ majorée par $\bigoplus_{j=1}^{n}\mathfrak{M}'_j$ telle que $\mathfrak{N}_i \sim \mathfrak{M}_i$ pour $i\in I\cup\{0\}$, d'où l'on déduira, par le lemme 3.4

$$\bigoplus_{i\in I}\mathfrak{M}_i \sim \bigoplus_{i\in I}\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}_0 \oplus \bigoplus_{i\in I}\mathfrak{N}_i \subset \bigoplus_{j=1}^{n}\mathfrak{M}'_j \subset \bigoplus_{i\in I}\mathfrak{M}_i,$$

d'où absurdité par le lemme 4.1.

Tout revient donc à construire les $\mathfrak{N}_i$ moyennant l'hypothèse

$$\sum_{j=1}^{n} T(\mathfrak{M}'_j) \geqq T(\mathfrak{M}_0) + \sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i).$$

Considérons, dans l'ensemble des $\mathfrak{M}_i (i\in I\cup\{0\})$ les variétés d'ordre 2. Désignons-les par $\mathfrak{M}_k^{(n)} (k\in K_n)$. Supposons construites des variétés $\mathfrak{N}_k^{(1)} (k\in K_1)$, $\mathfrak{N}_k^{(2)} (k\in K_2)$, ..., $\mathfrak{N}_k^{(r)} (k\in K_r)$, avec $\mathfrak{N}_k^{(s)} \sim \mathfrak{M}_k^{(s)}$ pour $k\in K_s (s = 1, 2, \ldots, r)$, ces variétés formant une partition majorée par $\bigoplus_{j=1}^{n}\mathfrak{M}'_j$. Montrons qu'on peut construire des variétés $\mathfrak{N}_k^{(r+1)} (k\in K_{r+1})$, avec $\mathfrak{N}_k^{(r+1)} \sim \mathfrak{M}_k^{(r+1)}$ de façon que les $\mathfrak{N}_k^{(1)} (k\in K_1)$, $\mathfrak{N}_k^{(2)} (k\in K_2)$, ..., $\mathfrak{N}_k^{(r+1)} (k\in K_{r+1})$ forment une partition majorée par $\bigoplus_{j=1}^{n}\mathfrak{M}'_j$. On pourra alors construire les variétés $\mathfrak{N}_i$ par récurrence.

Or, les variétés $\mathfrak{M}_k^{(n)}$, où $n \leq r+1$, sont d'ordre borné, et, en exceptant éventuellement $\mathfrak{M}_0$, forment une partition. On peut donc appliquer le lemme 6.10. Raisonnant dans chaque variété $\mathfrak{X}_j$ de ce lemme, on voit que, en changeant de notations, on est ramené à prouver ceci :

Soit $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n)$ une partition fondamentale. Soit $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_p)$ une partition fondamentale majorée par $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i$. Soient $\mathfrak{N}'_1, \mathfrak{N}'_2, \ldots, \mathfrak{N}'_r$ des variétés fondamentales. Si

$$\sum_{i=1}^{n} T(\mathfrak{M}_i) \geqq \sum_{j=1}^{p} T(\mathfrak{N}_j) + \sum_{k=1}^{r} T(\mathfrak{N}'_k),$$

il existe des variétés $\mathfrak{N}''_1, \mathfrak{N}''_2, \ldots, \mathfrak{N}''_r$, avec $\mathfrak{N}''_k \sim \mathfrak{N}'_k$ pour $1 \leqq k \leqq r$, et telles que l'ensemble des $\mathfrak{N}_i$ et des $\mathfrak{N}''_k$ forme une partition majorée par $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i$.

Or, ce résultat se déduit aussitôt du lemme 6.7 par récurrence.

Ceci posé, introduisons les définitions suivantes (inspirées par celles de [4])(8).

Définition 6.3. — *Soit* $g \in \mathbf{H}$, *avec* $\|g\| = 1$. *Soient* $\theta \in \mathbf{R}$, $\mathfrak{M} \tau_1 \mathrm{M}'$, $\mathfrak{N} \tau_1 \mathrm{M}$. *On écrira* $\mathfrak{M} \leqq_g \theta$ (*resp.* $\geqq_g$, $<_g$, $>_g$) *si* $(\mathrm{P}_{\mathfrak{M}} g, g) \leqq \theta (\mathrm{T}(\mathfrak{M}) g, g)$ (*resp.* $\geqq$, $<$, $>$). *On écrira* $\mathfrak{N} \leqq_{g,p} \theta$ (*resp.* $\geqq_{g,p}$, $<_{g,p}$, $>_{g,p}$) *si* $\mathfrak{N} \neq 0$ *et si, pour toute* $\mathfrak{M}_1 \tau_1 \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$, *on a* $\mathfrak{M}_1 \leqq_g \theta$ (*resp.* $\geqq_g$, $<_g$, $>_g$).

Lemme 6.14. — *Soit* $(\mathfrak{M}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une partition fondamentale de* $\mathfrak{M} \tau_1 \mathrm{M}'$, *avec* $\mathfrak{M}_i >_g \theta$ (*resp.* $<_g$) *pour* $i \in \mathrm{I}$. *On a* $\mathfrak{M} >_g \theta$ (*resp.* $<_g$).

Démonstration. — Les vecteurs $\mathrm{P}_{\mathfrak{M}_i} g$ sont deux à deux orthogonaux et ont pour somme $\mathrm{P}_{\mathfrak{M}} g$, donc

$$(\mathrm{P}_{\mathfrak{M}} g, g) = \sum_{i \in \mathrm{I}} (\mathrm{P}_{\mathfrak{M}_i} g, g).$$

D'autre part (lemme 6.13)

$$(\mathrm{T}(\mathfrak{M}) g, g) = \sum_{i \in \mathrm{I}} (\mathrm{T}(\mathfrak{M}_i) g, g).$$

Si $(\mathrm{P}_{\mathfrak{M}_i} g, g) > \theta (\mathrm{T}(\mathfrak{M}_i) g, g)$ pour $i \in \mathrm{I}$, on en déduit donc

$$(\mathrm{P}_{\mathfrak{M}} g, g) > \theta (\mathrm{T}(\mathfrak{M}) g, g).$$

C'est la seule utilisation que nous ferons du lemme 6.13.

Lemme 6.15. — *Soit* $\mathfrak{M} \eta \mathrm{M}'$ *avec* $\mathfrak{M} \leqq_g \theta$ (*resp.* $\geqq_g$). *Il existe une* $\mathfrak{N} \eta \mathrm{M}'$ *avec* $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{N} \leqq_{g,p} \theta$ (*resp.* $\geqq_{g,p}$).

Démonstration. — Soit par exemple $\mathfrak{M} \leqq_g \theta$, et supposons qu'il n'existe aucune $\mathfrak{M}' \eta \mathrm{M}$ telle que $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \leqq_{g,p} \theta$. Considérons l'ensemble $\mathfrak{E}$ des

(8) La définition 6.3, les lemmes 6.14, 6.15, 6.16, 6.19 sont à rapprocher de la définition 1.2.1, des lemmes 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.3.1, 1.4.3 de [4].

partitions fondamentales $\Phi=(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ majorées par $\mathfrak{M}$ telles que $\mathfrak{M}_i >_g 0$ pour $i\in I$. Si $\Phi_1\in\mathscr{E}$, $\Phi_2\in\mathscr{E}$ la relation $\Phi_1\subset\Phi_2$ ordonne $\mathscr{E}$, et le théorème de Zorn est applicable. Soit donc $\Phi=(\overline{\mathfrak{M}}_i)_{i\in\bar{I}}$ un élément maximal de $\mathscr{E}$. Soit $\overline{\mathfrak{M}}=\bigoplus_{i\in\bar{I}}\overline{\mathfrak{M}}_i$. Si $\overline{\mathfrak{M}}\neq\mathfrak{M}$, on a $\mathfrak{M}\ominus\overline{\mathfrak{M}}\neq 0$, et, par hypothèse, on n'a pas $\mathfrak{M}\ominus\overline{\mathfrak{M}}\leq_{g,p}0$, donc il existe une $m\tau_1 M'$ avec $m\subset\mathfrak{M}\ominus\overline{\mathfrak{M}}$ et $m>_g 0$. Alors $\Phi\cup\{m\}$ est encore un élément de $\mathscr{E}$, ce qui est absurde. Donc $\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}$. Mais alors (lemme 6.14) $\mathfrak{M}_i>_g 0$ entraîne $\mathfrak{M}>_g 0$, d'où contradiction.

Donc il existe une variété $\mathfrak{M}'\tau_1 M$, avec $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'\leq_{g,p}0$. Soit $\mathfrak{N}\tau_1 M'$ avec $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}'$ (lemme 6.4). On a évidemment $\mathfrak{N}\leq_{g,p}0$.

Lemme 6.16. — *Soient* $\mathfrak{M}\tau_1 M\cap M'$, $\mathfrak{M}\neq 0$ *et* $g\in H$, $\|g\|=1$. *Pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe une variété* $\mathfrak{M}_\varepsilon\tau_1 M'$ *et un nombre* $\lambda(1\leq\lambda<+\infty)$ *avec* $\mathfrak{M}_\varepsilon\subset\mathfrak{M}$, $\lambda\leq_{g,p}\mathfrak{M}_\varepsilon\leq_{g,p}\lambda+\varepsilon$.

Démonstration. — On a $P_{\mathfrak{M}}=T(\mathfrak{M})$, donc $\mathfrak{M}\geq_g 1$. Donc (lemme 6.15) il existe une variété $\mathfrak{M}'\tau_1 M'$ avec $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'\geq_{g,p}1$. Si $T(\mathfrak{M}')g=0$, on a $P_{\mathfrak{M}'}g=0$ et le lemme est trivial avec $\mathfrak{M}_\varepsilon=\mathfrak{M}'$ et $\lambda\geq 1$ quelconque. Si $T(\mathfrak{M}')g\neq 0$, la borne supérieure $\lambda(\geq 1)$ des θ tels que $\mathfrak{M}'\geq_{g,p}\theta$ est finie. On vérifie aussitôt que $\mathfrak{M}'\geq_{g,p}\lambda$. Il existe une variété $\mathfrak{M}'_\varepsilon\tau_1 M'$ avec $\mathfrak{M}'_\varepsilon\subset\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}'_\varepsilon\leq_g\lambda+\varepsilon$. Donc (lemme 6.15) il existe une variété $\mathfrak{M}_\varepsilon\tau_1 M'$, avec $\mathfrak{M}_\varepsilon\subset\mathfrak{M}'_\varepsilon$ et $\mathfrak{M}_\varepsilon\leq_{g,p}\lambda+\varepsilon$. Comme $\mathfrak{M}_\varepsilon\subset\mathfrak{M}'$, on a évidemment $\mathfrak{M}_\varepsilon\geq_{g,p}\lambda$.

Lemme 6.17. — *Soit* $g\in H$ *avec* $\|g\|=1$. *Pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe une variété* $\mathfrak{M}_\varepsilon\tau_1 M'$ *et un nombre* $\lambda(1\leq\lambda<+\infty)$ *tels que*

α. $\qquad \lambda\leq_{g,p}\mathfrak{M}_\varepsilon\leq_{g,p}\lambda+\varepsilon$;

β. $\qquad P_{\mathfrak{M}_\varepsilon}g\neq 0$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}\tau_1 M\cap M'$, $\mathfrak{M}\neq 0$, possédant la propriété suivante : pour un certain $\varepsilon_0>0$, il est impossible de trouver une variété fondamentale $\mathfrak{M}_{\varepsilon_0}\subset\mathfrak{M}$ et un nombre $\lambda(1\leq\lambda<+\infty)$ avec

$$\lambda\leq_{g,p}\mathfrak{M}_{\varepsilon_0}\leq_{g,p}\lambda+\varepsilon_0,\qquad P_{\mathfrak{M}_{\varepsilon_0}}g\neq 0.$$

Soit $\mathfrak{M}'\tau_1 M\cap M'$, avec $\mathfrak{M}'\neq 0$, $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$. Appliquant le lemme 6.16 à $\mathfrak{M}'$, on détermine une variété fondamentale $\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0}$ et un nombre $\lambda(1\leq\lambda<+\infty)$, avec $\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0}\subset\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$, $\lambda\leq_{g,p}\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0}\leq_{g,p}\lambda+\varepsilon_0$. D'après l'hypothèse faite sur $\mathfrak{M}$, on a donc $P_{\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0}}g=0$. Mais alors

$$0=(P_{\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0}}g,\,g)\geq\lambda(T(\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0})g,\,g),\qquad\text{d'où}\qquad(T(\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0})g,\,g)=0.$$

On a d'ailleurs

$$T(\mathfrak{M}'_\varepsilon)=2^{-n}P_{\mathfrak{M}''},$$

avec un entier q et une variété $\mathfrak{M}''\eta_q \mathrm{M}\cap\mathrm{M}'$, $\mathfrak{M}''\neq 0$, $\mathfrak{M}''\subset\mathfrak{M}'$. Donc

$$(\mathrm{P}_{\mathfrak{M}''}g,\ g)=0,\qquad \mathrm{P}_{\mathfrak{M}''}g=0.$$

2. Ainsi, quelle que soit $\mathfrak{M}'\eta_q \mathrm{M}\cap\mathrm{M}'$ avec $\mathfrak{M}'\neq 0$, $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$, on peut trouver une $\mathfrak{M}''\eta_q \mathrm{M}\cap\mathrm{M}'$ avec $\mathfrak{M}''\neq 0$, $\mathfrak{M}''\subset\mathfrak{M}'$, $\mathrm{P}_{\mathfrak{M}''}g=0$. Considérons alors les partitions $\Phi=(\mathfrak{M}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ majorées par $\mathfrak{M}$ dont les éléments appartiennent à $\mathrm{M}\cap\mathrm{M}'$ telles que $\mathrm{P}_{\mathfrak{M}_i}g=0$ pour $i\in\mathrm{I}$. Soit $\mathscr{E}$ leur ensemble. Si $\Phi\in\mathscr{E}$, $\Phi'\in\mathscr{E}$, la relation $\Phi\subset\Phi'$ ordonne $\mathscr{E}$, et le théorème de Zorn est applicable. Soit donc $\Phi=(\overline{\mathfrak{M}_i})_{i\in\mathrm{I}}$ un élément maximal de $\mathscr{E}$, et $\overline{\mathfrak{M}}=\bigoplus_{i\in\mathrm{I}}\overline{\mathfrak{M}_i}$. Si $\overline{\mathfrak{M}}\neq\mathfrak{M}$, on a $\mathfrak{M}\ominus\overline{\mathfrak{M}}\neq 0$, donc il existe une $m\eta_q \mathrm{M}\cap\mathrm{M}'$, avec $m\neq 0$, $m\subset\mathfrak{M}\ominus\overline{\mathfrak{M}}$ et $\mathrm{P}_m g=0$. Alors $\Phi\cup\{m\}$ est un élément de $\mathscr{E}$, ce qui est absurde. Donc $\mathfrak{M}=\bigoplus_{i\in\mathrm{I}}\overline{\mathfrak{M}_i}$. Alors, $\mathrm{P}_{\overline{\mathfrak{M}_i}}g=0$ pour $i\in\mathrm{I}$ entraîne $\mathrm{P}_{\mathfrak{M}}g=0$.

3. On a $\mathrm{P}_{\mathrm{H}}g=g\neq 0$. Donc H ne peut avoir la propriété admise pour $\mathfrak{M}$ au début de la démonstration. Ceci prouve le lemme.

Après cette étude des variétés $\mathfrak{M}\eta_q \mathrm{M}$, nous revenons enfin à l'étude des opérateurs de M.

Lemme 6.18. — *Soient* $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_s$, et $\mathfrak{M}\eta_q \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}\neq 0$, *avec* $\mathrm{A}\geq 0$, $\mathrm{AP}_{\mathfrak{M}}=\mathrm{P}_{\mathfrak{M}}\mathrm{A}=\mathrm{A}$. *Pour tout voisinage fort* $\mathfrak{U}$ *de* 0 *dans* M, *il existe des nombres strictement positifs* $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ *et une partition fondamentale* $(\mathfrak{M}_i)_{1\leq i\leq n}$ *majorée par* $\mathfrak{M}$ *tels que*

$$\mathrm{A}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathrm{P}_{\mathfrak{M}_i}\in\mathfrak{U}.$$

Démonstration. — 1. Soit $\mathfrak{M}\eta_q \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}\neq 0$. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des partitions fondamentales majorées par $\mathfrak{M}$. Si $\Phi_1\in\mathscr{E}$, $\Phi_2\in\mathscr{E}$, la relation $\Phi_1\subset\Phi_2$ ordonne $\mathscr{E}$, et le théorème de Zorn est applicable. Soit $\Phi=(\mathfrak{M}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un élément maximal de $\mathscr{E}$, et soit $\mathfrak{M}=\bigoplus_{i\in\mathrm{I}}\mathfrak{M}_i$. Si $\overline{\mathfrak{M}}\neq\mathfrak{M}$, on a $\mathfrak{M}\ominus\overline{\mathfrak{M}}\neq 0$, donc (lemme 6.4), il existe une variété $m\eta_q \mathrm{M}'$ avec $m\subset\mathfrak{M}\ominus\overline{\mathfrak{M}}$. Alors $\Phi\cup\{m\}\in\mathscr{E}$, ce qui est absurde. Donc $\mathfrak{M}=\bigoplus_{i\in\mathrm{I}}\mathfrak{M}_i$, donc $\mathrm{P}_{\mathfrak{M}}$ adhère fortement à l'ensemble des $\sum_{i\in\mathrm{J}}\mathrm{P}_{\mathfrak{M}_i}$, où J est une partie finie quelconque de I.

2. Soient $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_s$ et $\mathfrak{M}\eta_q \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}\neq 0$, avec $\mathrm{A}\geq 0$, $\mathrm{AP}_{\mathfrak{M}}=\mathrm{P}_{\mathfrak{M}}\mathrm{A}=\mathrm{A}$, et soit $\mathfrak{U}$ un voisinage convexe fort de zéro. On peut trouver des nombres strictement positifs λ_i et une partition $(\mathfrak{M}_i)_{1\leq i\leq n}$ majorée par $\mathfrak{M}$ tels que $\mathrm{A}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathrm{P}_{\mathfrak{M}_i}\in\frac{1}{2}\mathfrak{U}$ (on pourrait même supposer $\left\|\mathrm{A}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathrm{P}_{\mathfrak{M}_i}\right\|$ arbitrairement petit, les $\mathrm{P}_{\mathfrak{M}}$ étant

des projecteurs spectraux de A$\Big)$. Puis, pour chaque i, la première partie de la démonstration permet de trouver une partition fondamentale $(\mathfrak{M}_{ij})_{1\leq j\leq n_i}$ majorée par $\mathfrak{M}_i$, avec

$$P_{\mathfrak{M}_i}-\sum_{j=1}^{n_i}P_{\mathfrak{M}_{ij}}\in\frac{1}{2}(n\lambda_i)^{-1}\mathfrak{U}.$$

Alors

$$A-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\lambda_i P_{\mathfrak{M}_{ij}}\in\mathfrak{U}.$$

Lemme 6.19. — *Soit* $A\in M$ *tel que* $AP_{\mathfrak{M}_i}=P_{\mathfrak{M}_i}A=A$ (*notations du lemme* 6.17). *On a*

$$\|Ag\|^2\leq(1+\varepsilon)\|A^*g\|^2.$$

Démonstration. — On a $A=UB$, avec $B\in M_S$, $U\in M_{PI}$, et

$$U^*U=E,\qquad UU^*=E',\qquad E\leq P_{\mathfrak{M}_i},\qquad E'\leq P_{\mathfrak{M}_i};$$
$$BE=EB=B,\qquad \text{d'où}\qquad B^2E=EB^2=B^2.$$

On a

$$A^*A=BU^*UB=BEB=B^2,$$
$$AA^*=UB^2U^*.$$

Soit $\mathfrak{U}$ le voisinage fort de zéro composé des opérateurs T tels que $\|Tg\|\leq\varepsilon_1$, $\|TU^*g\|\leq\varepsilon_1$, ε_1 étant un nombre strictement positif. Soit (lemme 6.18) une partition fondamentale $(\mathfrak{M}_i)_{1\leq i\leq n}$ majorée par Δ_E, donc par $\mathfrak{M}_\varepsilon$, telle que

$$B^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_{\mathfrak{M}_i}\in\mathfrak{U},$$

les λ_i étant des nombres positifs.

On a

$$\|Ag\|^2=(Ag,Ag)=(A^*Ag,g)=(B^2g,g)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(P_{\mathfrak{M}_i}g,g)+r_1$$

avec

$$r_1=\left|\left(\left(B^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_{\mathfrak{M}_i}\right)g,g\right)\right|\leq\left\|\left(B^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_{\mathfrak{M}_i}\right)g\right\|\leq\varepsilon_1.$$

$$\|A^*g\|^2=(A^*g,A^*g)=(AA^*g,g)=(UB^2U^*g,g)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(UP_{\mathfrak{M}_i}U^*g,g)+r_1'$$

avec

$$r_1'=\left|\left(U\left(B^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_{\mathfrak{M}_i}\right)U^*g,g\right)\right|\leq\left\|\left(B^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_{\mathfrak{M}_i}\right)U^*g\right\|\leq\varepsilon_1.$$

U transforme isométriquement Δ_E en $\Delta_{E'}$, donc $\mathfrak{M}_i$ en $U(\mathfrak{M}_i)$. Donc $UP_{\mathfrak{M}_i}U^* \in M_P^f$, et $UP_{\mathfrak{M}_i}U^* \leq E' \leq P_{\mathfrak{M}_i}$ pour $1 \leq i \leq n$. Par suite

$$(P_{\mathfrak{M}_i}g, g) \leq (\lambda+\varepsilon)(T(\mathfrak{M}_i)g, g) = (\lambda+\varepsilon)\big(T(U(\mathfrak{N}_i))g, g\big)$$
$$\leq \lambda^{-1}(\lambda+\varepsilon)(P_{U(\mathfrak{M}_i)}g, g) \leq (1+\varepsilon)(UP_{\mathfrak{M}_i}U^*g, g).$$

Donc

$$\|Ag\|^2 \leq (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(UP_{\mathfrak{M}_i}U^*g, g) + |\eta| = (1+\varepsilon)(\|A^*g\|^2 - \eta') + |\eta|$$
$$\leq (1+\varepsilon)\|A^*g\|^2 + \varepsilon_1 + (1+\varepsilon)\varepsilon_1,$$

d'où, comme $\varepsilon_1 > 0$ est arbitraire

$$\|Ag\|^2 < (1+\varepsilon)\|A^*g\|^2.$$

LEMME 6.20. — *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des vecteurs unitaires $g_1, g_2, \ldots, g_{2^n}$, tels que, pour tout $A \in M_S$, avec $A \geq 0$, et tout $U \in M_U$, on ait*

$$\sum_{i=1}^{2^n}(Ag_i, g_i) \leq (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{2^n}(UAU^{-1}g_i, g_i).$$

Démonstration. — Soit $g \in H$, avec $\|g\| = 1$. Soit (lemme 6.17) $\mathfrak{M}_2 \eta_1 M^f$ et un nombre $\lambda (1 \leq \lambda < +\infty)$, tels que $\lambda \leq_{g,p} \mathfrak{M}_2 \leq_{g,p} \lambda + \varepsilon$ et $P_{\mathfrak{M}_1}g \neq 0$.

Soit $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq 2^n}$ une partition homogène, avec $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$, de $[\mathfrak{M}_1^M]$. Il existe des $W_i \in M_{PI}$ dont les variétés initiales et finales sont $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_i$. Soit $\bar{g}_i = W_i g$. On a $A = B^2$, avec $B \in M_S$. Soit $C = UB$, et $C_{ij} = W_j^* C W_i$.

$$\sum_{i=1}^{2^n}(A\bar{g}_i, \bar{g}_i) = \sum_{i=1}^{2^n}(B^2\bar{g}_i, \bar{g}_i) = \sum_{i=1}^{2^n}\|B\bar{g}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{2^n}\|Cg_i\|^2 = \sum_{i=1}^{2^n}\|CW_i g\|^2$$
$$= \sum_{j=1}^{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\|P_{\mathfrak{M}_j}CW_i g\|^2 = \sum_{j=1}^{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\|W_j^* CW_i g\|^2 = \sum_{j=1}^{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\|C_{ij}g\|^2.$$

De même

$$\sum_{i=1}^{2^n}(UAU^{-1}\bar{g}_i, \bar{g}_i) = \sum_{i=1}^{2^n}(B^2U^*\bar{g}_i, U^*g_i) = \sum_{i=1}^{2^n}\|BU^*g_i\|^2 = \sum_{i=1}^{2^n}\|C^*g_i\|^2$$
$$= \sum_{j=1}^{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\|W_j^* C^* W_i g\|^2 = \sum_{i=1}^{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\|C_{ji}^* g\|^2.$$

Remarquons que $P_{\mathfrak{M}_i}C_{ij} = C_{ij}P_{\mathfrak{M}_j} = C_{ij}$. Le lemme 6.19 donne alors

$$\sum_{i=1}^{2^n}(A\bar{g}_i, \bar{g}_i) \leq (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{2^n}(UAU^{-1}\bar{g}_i, \bar{g}_i).$$

On a d'ailleurs

$$\|\bar{g}_i\| = \|W_i g\| = \|P_{\mathfrak{M}_i} g\| \neq 0.$$

Il suffit donc de poser $g_i = \|\bar{g}_i\|^{-1}\bar{g}_i$ pour avoir le lemme.

THÉORÈME 9. — *Si* H *ne contient aucune variété irréductible,* M_s *vérifie* C.5.

Démonstration. — Soient $A \in M_s$, $B \in (M \cap M')_s$. $U_i \in M_U$ $(1 \leq i \leq r)$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(1 \leq i \leq r)$ avec $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 0$, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i A U_i^{-1} = B$. Il faut montrer que $B \leq 0$.

1. Supposons $0 \leq A \leq 1$, et montrons que, si $\mathfrak{M} \subset M \cap M'$, on a $m_{\mathfrak{M}}(B) \leq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons les vecteurs g_j $(1 \leq j \leq 2^n)$ du lemme 6.20, et posons

$$\sum_{j=1}^{2^n} (U_i A U_i^{-1} g_j, g_j) = \mu_i.$$

On a

$$0 \leq \mu_i \leq \sum_{j=1}^{2^n} (g_j, g_j) = 2^n.$$

D'autre part

$$\sum_{j=1}^{2^n} \left(\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i A U_i^{-1} \right) g_j, g_j \right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sum_{j=1}^{2^n} (U_i A U_i^{-1} g_j, g_j) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i.$$

On a (lemme 6.20)

$$\mu_i \leq (1+\varepsilon)\mu_1, \qquad \mu_1 \leq (1+\varepsilon)\mu_i$$

d'où (en supposant $\varepsilon < 1$)

$$(1-\varepsilon)\mu_1 \leq \mu_i \leq (1+\varepsilon)\mu_1 \qquad \text{ou} \qquad \mu_i = \mu_1 + \eta_i$$

avec

$$|\eta_i| \leq \varepsilon \mu_1 \qquad (1 \leq i \leq r).$$

Donc

$$\left| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_1 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \eta_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \eta_i \right| \leq \mu_1 \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \right) \leq 2^n \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{r} |\lambda_i| \right).$$

D'autre part

$$\sum_{j=1}^{2^n} \left(\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i A U_i^{-1} \right) g_j, g_j \right) = \sum_{j=1}^{2^n} (B g_j, g_j) \geq m_{\mathfrak{M}}(B) \sum_{j=1}^{2^n} (g_j, g_j) = 2^n m_{\mathfrak{M}}(B).$$

D'où

$$2^n m_{\mathfrak{M}}(B) \leq 2^n \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{r} |\lambda_i| \right).$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit $m_{\mathfrak{M}}(B) \leq 0$. D'après le lemme 1.13, on a donc $B \leq 0$.

2. Si maintenant $A \in M_s$ ne vérifie plus $0 \leq A \leq 1$, on a $0 \leq kA + h \leq 1$ pour deux nombres réels h et $k (k > 0)$ bien choisis. On a

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i (kA + h) U_i^{-1} = k \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i A U_i^{-1} \geq kB,$$

donc, d'après la première partie de la démonstration, $kB \leq 0$, $B \leq 0$.

VII. — L'opération $^{\natural}$ dans les anneaux de classe finie.

Les théorèmes 7, 8, 9 permettent d'appliquer aux anneaux d'opérateurs de classe finie contenant 1 les résultats du Chapitre I.

Théorème 10. — *Soit* M *un anneau d'opérateurs de classe finie contenant* 1. *Il existe une application* $A \to A^{\natural}$ *de* M *sur* $M \cap M'$ *possédant les propriétés suivantes :*

(1) *Si* $A \in M \cap M'$, $A^{\natural} = A$.
(2) $(\lambda A)^{\natural} = \lambda A^{\natural}$.
(3) $(A + A')^{\natural} = A^{\natural} + A'^{\natural}$.
(4α) $(AB)^{\natural} = (BA)^{\natural}$.
(4β) $(AB)^{\natural} = AB^{\natural}$ *si* $A \in M \cap M'$ (9).
(5α) *Si* $A \in M_s$ *et* $A \geq 0$, *on a* $A^{\natural} \in M_s$ *et* $A^{\natural} \geq 0$.
(5β) $A \in M_s$, $A \geq 0$ *et* $A^{\natural} = 0$ *entraînent* $A = 0$.
(6) $(A^*)^{\natural} = (A^{\natural})^*$.
(7) *Si* $\mathfrak{M} \gamma_1 M$ *est une variété simple*, $P^{\natural}_{\mathfrak{M}} = T(\mathfrak{M})$ (10).

Démonstration. — D'après les théorèmes 1 et 2, il existe une application $A \to A^{\natural}$ de M_s sur $(M \cap M')_s$ possédant les propriétés (1), (3), (5α), possédant la propriété (2) si λ est réel, et telle que, pour tout $U \in M_U$, $(UAU^{-1})^{\natural} = A^{\natural}$.

Soit maintenant $A \in M$. On a $A = B + iC$, avec $B \in M_s$, $C \in M_s$; B et C sont définis de manière unique par $A : B = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $C = \frac{1}{2i}(A - A^*)$. Posons

$$A^{\natural} = B^{\natural} + iC^{\natural}.$$

(9) Cette propriété m'a été indiquée par R. Godement.

(10) Par des remarques classiques, on déduit de là que :

1° Si A et B sont self-adjoints $(AB)^{\natural}$ est self-adjoint. Car $(AB)^{\natural *} = (AB)^{*\natural} = (BA)^{\natural} = (AB)^{\natural}$.

2° Si A et B sont self-adjoints ≥ 0 $(AB)^{\natural}$ est self-adjoint ≥ 0. Car $A = C^2$, $B = D^2$, avec C, D self-adjoints, donc $(AB)^{\natural} = (C^2D^2)^{\natural} = (CD^2C)^{\natural}$; or CD^2C est self-adjoint ≥ 0, car $(CD^2C)^* = CD^2C$, et $(CD^2Cf, f) = \|DCf\|^2$ pour $f \in H$.

L'application $A \to A^\natural$ est ainsi définie pour tout $A \in M$, et $A^\natural \in M \cap M'$. On vérifie alors par des calculs immédiats les propriétés (1), (2), (3), (6).

On a $UAU^{-1} = UBU^{-1} + iUCU^{-1}$ de sorte que la propriété $(UAU^{-1})^\natural = A^\natural$ reste valable pour tout $A \in M$. On en déduit

$$(AU)^\natural = [U^{-1}(UA)U]^\natural = (UA)^\natural.$$

La propriété (4α) est donc démontrée si $B \in M_U$. Il suffit donc de prouver que tout élément K de M est combinaison linéaire d'éléments de M_U, et il suffit de le vérifier pour un $K \in M_S$ tel que $-1 \leq K \leq 1$. Or, on a $K = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$, avec

$$K_1 = K + i\sqrt{1 - K^2}, \qquad K_2 = K - i\sqrt{1 - K^2},$$

et l'on vérifie aussitôt que

$$K_1 K_1^* = K_1^* K_1 = K_2 K_2^* = K_2^* K_2 = 1,$$

de sorte que $K_1 \in M_U$, $K_2 \in M_U$.

La propriété (4β) s'établit de la manière suivante. Soit $A \in M \cap M'$, et soit $B \in M$. Nous utilisons dès maintenant le théorème 12 (qui sera établi indépendamment). Il existe des éléments $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de M_U, des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbf{R}$, avec $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, tels que $\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i B U_i^{-1} - B^\natural \right\| \leq \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$. D'où

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A B U_i^{-1} - AB^\natural \right\| = \left\| A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i B U_i^{-1} - B^\natural \right) \right\| \leq \|A\| \varepsilon.$$

Donc $(AB)^\natural = AB^\natural$ d'après l'unicité de la trace.

Prouvons la propriété (7). Soit $\mathfrak{M} \tau_1 M$ une variété simple, et soit $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition homogène de $\mathfrak{M} \tau_1 M \cap M'$, avec $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$. Il existe des $U_i \in M_{n1}$ tels que $U_i^* U_i = P_{\mathfrak{M}}$, $U_i U_i^* = P_{\mathfrak{M}_i}$, d'où $P_{\mathfrak{M}}^\natural = P_{\mathfrak{M}_i}^\natural$. Alors

$$P_{\mathfrak{M}}^\natural = \frac{1}{n}\left(P_{\mathfrak{M}_1}^\natural + P_{\mathfrak{M}_2}^\natural + \ldots + P_{\mathfrak{M}_n}^\natural\right) = \frac{1}{n}\left(P_{\mathfrak{M}_1} + P_{\mathfrak{M}_2} + \ldots + P_{\mathfrak{M}_n}\right)^\natural = \frac{1}{n} P_{\mathfrak{M}}^\natural = \frac{1}{n} P_{\mathfrak{M}} = T(\mathfrak{M}).$$

Prouvons enfin la propriété (5β). Il suffit de prouver que $A \in M_S$, $A \geq 0$ et $A \neq 0$ entraînent $A^\natural \neq 0$. Or nos hypothèses entraînent, d'après la théorie spectrale, $A \geq a P_{\mathfrak{M}}$ avec $\mathfrak{M} \tau_1 M$, $\mathfrak{M} \neq 0$, a étant un nombre strictement positif. Les lemmes 4.11, 4.10 et 6.4 prouvent qu'il existe une variété simple $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$. D'où

$$A \geq a P_{\mathfrak{M}'}, \qquad A^\natural \geq a P_{\mathfrak{M}'}^\natural = a T(\mathfrak{M}') \neq 0.$$

Théorème 11. — *Soit* M *un anneau d'opérateurs de classe finie contenant* 1. *S'il existe une application* $A \to \varphi(A)$ *de* M *dans* $M \cap M'$ *avec les propriétés* (1), (2), (3), (4α), (5α) *du théorème* 10, *on a* $\varphi(A) = A^\natural$ *pour tout* $A \in M$.

Démonstration. — Les hypothèses entraînent aussitôt que l'application φ, restreinte à M_S, possède les propriétés qui permettent l'application du théorème 3 [en particulier, la propriété (4α) entraîne que $\varphi(UAU^{-1}) = \varphi(AU^{-1}U) = \varphi(A)$ pour $A \in M_S$, $U \in M_U$]. Donc $\varphi(A) = A^\natural$ pour $A \in M_S$. D'où, si $A = B + iC \in M$, avec $B \in M_S$, $C \in M_S$:

$$\varphi(A) = \varphi(B) + i\varphi(C) = B^\natural + iC^\natural = A^\natural.$$

THÉORÈME 12. — *Soient* M *un anneau d'opérateurs de classe finie contenant* **1**, *et* $A \in M$: *l'intersection de* $M \cap M'$ *et de l'ensemble convexe uniformément fermé* K_A *engendré par les* UAU^{-1} $(U \in M_U)$ *se compose du seul opérateur* $A^\natural$.

Démonstration. — Nous savons, par le théorème 7, que $K_A \cap M \cap M'$ est non vide. Soit $A' \in K_A \cap M \cap M'$. On a, pour des $U_i \in M_U$ et des $\lambda_i \in \mathbf{R}\left(\lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right)$ bien choisis

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1} - A' \right\| \leq \varepsilon,$$

d'où

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A^* U_i^{-1} - A'^* \right\| = \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1} - A' \right)^* \right\| \leq \varepsilon,$$

et par conséquent

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i \frac{A + A^*}{2} U_i^{-1} - \frac{A' + A'^*}{2} \right\| \leq \varepsilon.$$

D'après l'unicité de la trace de $B = \dfrac{A + A^*}{2}$, $C = \dfrac{A - A^*}{2i}$, on en déduit

$$\frac{A' + A'^*}{2} = B^\natural.$$

De même

$$\frac{A' - A'^*}{2i} = C^\natural.$$

D'où

$$A' = B^\natural + iC^\natural = A^\natural.$$

THÉORÈME 13. — *Soit* M *un anneau d'opérateurs de classe finie contenant* **1**. *Soit* $M^* \subset M$ *l'adhérence (au sens de la norme des opérateurs) de l'ensemble des opérateurs* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1}$ *où* $A \in M$, $U_i \in M_U$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ *et* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. M^* *est le sous-espace vectoriel* (11) *fermé des opérateurs de trace nulle, et l'on a*

$$M \cap M' \cap M^* = 0, \qquad M = M^* + (M \cap M').$$

(11) Noter que ce résultat, même isolé, n'est pas trivial.

Ainsi, tout $A \in M$ *se met, d'une seule manière, sous la forme* $A = A_1 + A_2$, *avec* $A_1 \in M \cap M'$, $A_2 \in M^*$. *On a d'ailleurs* $A_1 = A^\natural$, *de sorte que l'opération* $^\natural$ *n'est autre que le projecteur sur* $M \cap M'$ *défini par* $M \cap M'$ *et* M^*. M^* *est aussi le sous-espace vectoriel fermé de* M *engendré par les opérateurs de la forme* $AB - BA$, *où* $A \in M$, $B \in M$.

Démonstration. — Sauf la dernière définition de M^*, le théorème résulte du théorème 5, en remarquant que M^* et $M \cap M'$ sont invariants par l'application $A \to A^*$. (D'ailleurs, la démonstration du théorème 5 peut aussi être appliquée ici mot pour mot.) Si maintenant $C = AB - BA$, où $A \in M$, $B \in M$, on a $C^\natural = (AB)^\natural - (BA)^\natural = 0$, donc $C \in M^*$. Réciproquement, M^* est engendré par les opérateurs de la forme $AB - BA$ puisque, avec les notations du théorème,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i U_i A U_i^{-1} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) U_n A U_n^{-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (U_i A U_i^{-1} - U_n A U_n^{-1}),$$

et que

$$U_i A U_i^{-1} - U_n A U_n^{-1} = (U_i U_n^{-1})(U_n A U_i^{-1}) - (U_n A U_i^{-1})(U_i U_n^{-1}).$$

Théorème 14. — *Soit* M *un anneau d'opérateurs contenant* 1. *Si* M *n'est pas de classe finie, il est impossible de définir une application* $A \to \varphi(A)$ *de* M *dans* $M \cap M'$ *possédant les propriétés* (1), (3), (4α), *du théorème* 10.

Démonstration. — M n'étant pas de classe finie, il existe une variété $\mathfrak{M}_1 \tau_1 M$ avec $\mathfrak{M}_1 \sim H$ et $\mathfrak{N}_1 = H \ominus \mathfrak{M}_1 \neq 0$. Soit $U \in M_{[1]}$ un opérateur appliquant isométriquement H sur $\mathfrak{M}_1$: Soient

$$\mathfrak{M}_2 = U(\mathfrak{M}_1), \quad \mathfrak{M}_3 = U(\mathfrak{M}_2), \quad \ldots, \quad \mathfrak{N}_2 = U(\mathfrak{N}_1), \quad \mathfrak{N}_3 = U(\mathfrak{N}_2), \ldots.$$

$\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{N}_1$ sont orthogonales complémentaires dans H, donc $\mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{N}_2$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{M}_1$, donc $\mathfrak{M}_3$ et $\mathfrak{N}_3$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{M}_2$, etc. Ainsi, $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \ldots)$ est une partition homogène infinie.

Considérons les partitions homogènes qui contiennent $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots$ comme éléments. Appliquant, comme nous l'avons fait souvent, le théorème de Zorn, nous obtenons une partition homogène *infinie* $(\mathfrak{N}_i)_{i \in I}$ telle que, en posant $\mathfrak{N}_0 = H \ominus \left(\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{N}_i \right)$, il n'existe aucune variété équivalente à $\mathfrak{N}_1$ contenue dans $\mathfrak{N}_0$.

Appliquons le théorème 6 à $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_0$. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}' \tau_1 M \cap M'$, $\mathfrak{N}' = H \ominus \mathfrak{N}$;

trois variétés n_1, $\bar{n}_1$, $n_0 \tau_1 M$ contenues dans $\mathfrak{N}$, $\bar{n}_1$ orthogonale à n_1 et n_0 ;

trois variétés n'_1, n'_0, $n'_0 \tau_1 M$ contenues dans $\mathfrak{N}'$, $\bar{n}'_0$ orthogonale à n'_1 et n'_0, avec

$$n_1 \sim n_0, \quad n'_1 \sim n'_0, \quad \mathfrak{N}_1 = n_1 \oplus \bar{n}_1 \oplus n'_1, \quad \mathfrak{N}_0 = n_0 \oplus n'_0 \oplus \bar{n}'_0.$$

Si $\mathfrak{N}=0$, on a $\mathfrak{N}_1=n_1'\sim n_0'\subset\mathfrak{N}_0$ contrairement à la propriété de $\mathfrak{N}_0$. Donc $\mathfrak{N}\neq 0$. Posant $\tilde{\mathfrak{N}}_i=\mathfrak{N}_i\cap\mathfrak{N}$ pour $i=0$ ou $i\in I$, on a les propriétés suivantes : $\tilde{\mathfrak{N}}_0$ et les $\tilde{\mathfrak{N}}_i$ sont deux à deux orthogonales et sous-tendent $\mathfrak{N}$; $\tilde{\mathfrak{N}}_0=n_0\sim n_1\subset\tilde{\mathfrak{N}}_1$; $(\tilde{\mathfrak{N}}_i)_{i\in I}$ est une partition homogène infinie.

Soient $\tilde{\mathfrak{N}}=\bigoplus_{i\in I}\tilde{\mathfrak{N}}_i$, et $n_i\subset\tilde{\mathfrak{N}}_i$, $\overline{n_i}=\tilde{\mathfrak{N}}_i\ominus n_i$, avec $n_i\sim n_1$. On a

$$\bigoplus_{i\in I} n_i\sim\bigoplus_{i\in I\cup\{0\}} n_i$$

et

$$\bigoplus_{i\in I}\overline{n_i}\text{ orthogonale à }\bigoplus_{i\in I\cup\{0\}} n_i$$

donc (lemme 3.4) $\mathfrak{N}\sim\tilde{\mathfrak{N}}$. La partition $(\tilde{\mathfrak{N}}_i)_{i\in I}$ de $\tilde{\mathfrak{N}}$ donne finalement une partition homogène infinie $(\hat{\mathfrak{N}}_i)_{i\in I}$ de $\mathfrak{N}$.

Divisons la partition $(\hat{\mathfrak{N}}_i)_{i\in I}$ en deux partitions homogènes semblables, que nous désignerons par $(\mathfrak{N}_j^1)_{j\in J}$, $(\mathfrak{N}_j^2)_{j\in J}$. Soient

$$\mathfrak{L}_1=\bigoplus_{j\in J}\mathfrak{N}_j^1,\qquad \mathfrak{L}_2=\bigoplus_{j\in J}\mathfrak{N}_j^2.$$

On a, d'après le lemme 3.4, comme I et J sont équipotents

$$\mathfrak{L}_1\sim\mathfrak{L}_2\sim\mathfrak{N}.$$

Ceci posé, admettons l'existence d'une application φ de M dans $M\cap M'$ avec les propriétés (1), (3), (4α), du théorème 10. Comme $P_{\mathfrak{L}_1}=UU^*$, $P_{\mathfrak{L}_1\oplus\mathfrak{L}_2}=U^*U$ avec un $U\in M_{p1}$, on aurait

$$\varphi(P_{\mathfrak{L}_1})=\varphi(P_{\mathfrak{L}_1\oplus\mathfrak{L}_2})=\varphi(P_{\mathfrak{L}_1}+P_{\mathfrak{L}_2})=\varphi(P_{\mathfrak{L}_1})+\varphi(P_{\mathfrak{L}_2}),$$

d'où

$$\varphi(P_{\mathfrak{L}_2})=0=\varphi(P_{\mathfrak{L}_1})=\varphi(P_{\mathfrak{N}}),$$

contrairement à la propriété

$$\varphi(P_{\mathfrak{N}})=P_{\mathfrak{N}}\neq 0,$$

qui résulte de $\mathfrak{N}\eta M\cap M'$.

Théorème 15. — *Soit* M *un anneau d'opérateurs contenant* 1. *Si* M *n'est pas de classe finie,* M_8 *ne vérifie pas* C'.5. *Il existe des éléments* A *tels que* $K_A\cap M\cap M'$ *ne se réduit pas à un point.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer les théorèmes 4 et 14.

VIII. — Continuité de l'opération *.

L'application $A\to A^*$ est continue pour la topologie uniforme [*cf.* note (*)]. Nous allons étudier la continuité de cette application pour d'autres topologies.

LEMME 8.1. — *Si* $A \in M$, *on a*

$$A^{\frac{1}{2}*} A^{\frac{1}{2}} \leq (A^*A)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. — On a

$$0 \leq (A - A^{\frac{1}{2}})^*(A - A^{\frac{1}{2}}) = (A^* - A^{\frac{1}{2}*})(A - A^{\frac{1}{2}}) = A^*A - A^{\frac{1}{2}*}A - A^*A^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}*}A^{\frac{1}{2}},$$

d'où, d'après le théorème 10, et en observant que $A^{\frac{1}{2}} \in M \cap M'$, $A^{\frac{1}{2}*} \in M \cap M'$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (A^*A)^{\frac{1}{2}} - (A^{\frac{1}{2}*}A)^{\frac{1}{2}} - (A^*A^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} + (A^{\frac{1}{2}*}A^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \\ &= (A^*A)^{\frac{1}{2}} - A^{\frac{1}{2}*}A^{\frac{1}{2}} - A^{*\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}*}A^{\frac{1}{2}} = (A^*A)^{\frac{1}{2}} - A^{\frac{1}{2}*}A^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

THÉORÈME 16. — *Soit* M *un facteur de classe finie. L'application* $A \to A^{\frac{1}{2}}$ *est continue pour la topologie faible* (12).

Démonstration. — D'après le lemme 6.20, il existe des vecteurs unitaires $g_1, g_2, \ldots, g_{2^n}$ tels que, pour tout $A \in M_8$, avec $A \geq 0$, et tout $U \in M_U$, on ait

$$\varphi(A) \leq 2\varphi(UAU^{-1}),$$

où l'on a posé

$$\varphi(A) = \sum_{j=1}^{2^n} (Ag_j, g_j) \qquad [\text{notons que } \varphi(A) \geq 0 \text{ pour } A \geq 0].$$

Soit donc $A \in M_8$, avec $A \geq 0$. Soit $\varepsilon > 0$, et soient $U_1, U_2, \ldots, U_p$ des éléments de M_U, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des éléments de $\mathbf{R}$, avec $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, tels que

$$A^{\frac{1}{2}} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i A U_i^{-1} \leq \varepsilon . \mathbf{1}.$$

On a

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i A U_i^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi(U_i A U_i^{-1}) \leq \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) 2\varphi(A) = 2\varphi(A)$$

et

$$\varphi(A^{\frac{1}{2}}) - \varphi\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i A U_i^{-1}\right) \leq \varphi(\varepsilon . \mathbf{1}),$$

d'où

$$\varphi(A^{\frac{1}{2}}) \leq 2\varphi(A) + \varphi(\varepsilon . \mathbf{1}),$$

et, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire

$$\varphi(A^{\frac{1}{2}}) \leq 2\varphi(A).$$

---

(12) Ce théorème est établi dans [4], mais notre méthode est beaucoup plus rapide. Cependant, nous n'obtenons pas une expression précise de la trace comme dans [4].

Si maintenant $A \in M$ est quelconque, on a, en utilisant le lemme 8.1,

$$\varphi(A^{2^n} A^{2^n}) \leq \varphi\left((A^* A)^{2^n}\right) \leq 2\varphi(A^* A) \qquad \text{ou} \qquad \sum_{j=1}^{2^n} \| A^{2^n} g_j \|^2 \leq 2 \sum_{j=1}^{2^n} \| A g_j \|^2.$$

Utilisons maintenant le fait que M est un facteur. On a $A^{2^n} = t(A).1$, où $t(A)$ est un nombre complexe. L'inégalité précédente donne

$$|t(A)|^2 \leq 2^{1-n} \sum_{j=1}^{2^n} \| A g_j \|^2.$$

En particulier, $Ag_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, 2^n)$ entraîne $t(A) = 0$. Le système de vecteurs $(Ag_1, Ag_2, \ldots, Ag_{2^n})$ peut, avec des conventions classiques, être considéré comme un vecteur d'un espace hilbertien auxiliaire, sa norme étant $\left(\sum_{j=1}^{2^n} \| A g_j \|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, et l'on voit que $t(A)$ est une fonctionnelle linéaire continue de ce vecteur. Par suite, il existe un système de vecteurs $(h_1, h_2, \ldots, h_{2^n})$ tel que

$$t(A) = \sum_{j=1}^{2^n} (A g_j, h_j),$$

ce qui démontre le théorème.

Passons au cas où M est un anneau de classe finie quelconque. Construisons d'abord un exemple.

Supposons H séparable et de dimension infinie. Soient $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ des variétés linéaires fermées, deux à deux orthogonales, sous-tendant H, et telles que la dimension de V_n soit n. Soit M^0 l'ensemble des opérateurs de $\mathfrak{B}$ réduits par les V_i. M^0 est un anneau d'opérateurs, dont le centre se compose des opérateurs $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_{V_i}$ (où les λ_i sont des nombres complexes bornés quelconques). Si $A \in M^0$, désignons par $t_i(A)$ la trace (au sens élémentaire) de l'opérateur induit par A dans V_i, divisée par i. Alors, l'application

$$A \to A^b = \sum_{i=1}^{\infty} t_i(A) P_{V_i}$$

a toutes les propriétés du théorème 10, de sorte que M^0 est un anneau de classe finie.

LEMME 8.2. — *Conservons les notations précédentes, et soit f un vecteur de* H *tel que $\| P_{V_i} f \| \neq 0$ pour tout i. Quels que soient les vecteurs $g_1, g_2, \ldots, g_n$ de* H *et le nombre réel* C, *il existe un $A \in M^0$ tel que $Ag_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et tel que $|(A^2 f, f)| \geq C$.*

Démonstration. — Il existe une variété linéaire à 1 dimension $V \subset V_{n+1}$ qui est orthogonale aux g_i. Soit k un nombre complexe. On a $kP_V g_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$. D'autre part $(kP_V)^{\frac{1}{2}} = k(n+1)^{-\frac{1}{2}} P_{V_{n+1}}$, donc

$$\left|\left((kP_V)^{\frac{1}{2}} f, f\right)\right| = |k|(n+1)^{-1}(P_{V_{n+1}} f, f) = |k|(n+1)^{-1} \| P_{V_{n+1}} f \|^2$$

qui est arbitrairement grand pour k bien choisi.

Lemme 8.3. — *Soit* M *un anneau de classe finie contenant* 1. *Soit* $\mathfrak{S}$ *l'ensemble des* $h \in H$ *qui possèdent la propriété suivante : il existe des vecteurs* $h_1, h_2, \ldots, h_r$ *(dépendant de* h*) tels que* $\| A^{\frac{1}{2}} h \|^2 \leq \sum_{i=1}^{r} \| A h_i \|^2$. $\mathfrak{S}$ *est partout dense dans* H.

Démonstration. — Il est immédiat que $\mathfrak{S}$ est une variété linéaire. Ensuite, si $h \in \mathfrak{S}$ et si $T \in (M \cap M')'$, on a $Th \in \mathfrak{S}$. En effet

$$\| A^{\frac{1}{2}} T h \| = \| TA^{\frac{1}{2}} h \| \leq \| T \| . \| A^{\frac{1}{2}} h \|.$$

Donc $T(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}$ pour tout $T \in (M \cap M')'$, et par suite $[\mathfrak{S}] \eta_1 M \cap M'$. Montrons que $[\mathfrak{S}] \neq H$ est absurde. Si $[\mathfrak{S}] \neq H$, il existe dans $H \ominus [\mathfrak{S}] \neq 0$ des vecteurs unitaires $g_1, g_2, \ldots, g_{2^n}$ tels que, pour tout $A \in M_8$, avec $A \geq 0$, et tout $U \in M_U$, on ait

$$\sum_{i=1}^{2^n} (A g_i, g_i) \leq 2 \sum_{i=1}^{2^n} (UAU^{-1} g_i, g_i)$$

(d'après le lemme 6.20 appliqué dans l'espace $H \ominus [\mathfrak{S}] \eta_1 M \cap M'$). D'après le début de la démonstration du théorème 16, ceci entraîne, pour tout $A \in M$:

$$\sum_{i=1}^{2^n} \| A^{\frac{1}{2}} g_i \|^2 \leq 2 \sum_{i=1}^{2^n} \| A g_i \|^2,$$

donc $g_i \in \mathfrak{S}$, ce qui est absurde puisque $g_i \in H \ominus [\mathfrak{S}]$.

Théorème 17. — *Soit* M *un anneau de classe finie contenant* 1.

α. L'application $A \to A^{\frac{1}{2}}$ *n'est continue ni pour la topologie faible, ni pour la topologie forte.*

β. L'application $A \to A^{\frac{1}{2}}$ *restreinte à la boule* $\| A \| \leq 1$ *est continue pour la topologie forte* (13).

Démonstration. — α résulte aussitôt du lemme 8.2. Prouvons β. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ des vecteurs de H. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminons des éléments $\psi_1, \psi_2, \ldots,$

(13) L'auteur ne sait pas s'il en est de même pour la topologie faible.

ψ_p de $\mathfrak{S}$ tels que $\|\psi_i - \varphi_i\| \leq \varepsilon$ pour $1 \leq i \leq p$ (lemme 8.3). Puis, pour chaque $i \leq p$, déterminons des vecteurs $\psi_i^1, \psi_i^2, \ldots, \psi_i^{r_i}$ tels que

$$\|A^2\psi_i\|^2 \leq \sum_{k=1}^{r_i} \|A\psi_i^k\|^2.$$

On a, si $\|A^2\| \leq 1$, (donc si $\|A\| \leq 1$) :

$$\|A^2\varphi_i\|^2 \leq (\|A^2\psi_i\| + \varepsilon)^2 \leq 2\|A^2\psi_i\|^2 + 2\varepsilon^2 \leq 2\sum_{k=1}^{r_i} \|A\psi_i^k\|^2 + 2\varepsilon^2,$$

donc

$$\|A^2\varphi_i\| \leq 2\varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

dès que

$$\sum_{k=1}^{r_i} \|A\psi_i^k\|^2 \leq \varepsilon^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Ceci démontre le théorème.

Enfin le théorème suivant complète d'une manière remarquable le théorème 12.

THÉORÈME 18. — *Soit* M *un anneau de classe finie, et soit* $A \in M$. *L'ensemble convexe faiblement fermé* K *engendré par les* UAU^{-1} ($U \in M_t$) *rencontre* $M \cap M'$ *en un point unique* (*qui est* A^2).

Démonstration. — Soit k l'ensemble convexe engendré par les UAU^{-1}. On a $\|B\| \leq \|A\|$ pour tout $B \in k$, donc pour tout B appartenant à l'adhérence forte K' de k. Or $B^2 = A^2$ pour $B \in k$, donc, d'après le théorème 17, $B^2 = A^2$ pour $B \in K'$ et par suite $K' \cap M \cap M'$ se réduit à A^2. Enfin, K', ensemble convexe fortement fermé, est aussi faiblement fermé (14), donc $K' = K$.

NOTE I.

PROBLÈME. — *Le théorème 7 est valable pour tout anneau d'opérateurs. Est-il encore valable pour une algèbre auto-adjointe d'opérateurs qu'on suppose seulement uniformément fermée ?*

Nous allons montrer, par un exemple, que la réponse à cette question est négative.

Soit $\mathfrak{I}$ l'ensemble des opérateurs complètement continus de H. Soient E_1

(14) Cf. *Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace hilbertien*, à paraître aux *Annals of Mathematics*.

et $E_2 = \mathbf{1} - E_1$ deux projecteurs tels que Δ_{E_1} et Δ_{E_2} aient une infinité de dimensions (observons que $E_1 E_2 = 0$). Considérons l'ensemble $\mathfrak{A}$ des opérateurs de la forme $C_1 E_1 + C_2 E_2 + A$, où $A \in \mathfrak{J}$, et où C_1, C_2 sont deux nombres complexes quelconques.

On a

$$\lambda(C_1 E_1 + C_2 E_2 + A) = \lambda C_1 E_1 + \lambda C_2 E_2 + \lambda A;$$

$$(C_1 E_1 + C_2 E_2 + A) + (C'_1 E_1 + C'_2 E_2 + A') = (C_1 + C'_1) E_1 + (C_2 + C'_2) E_2 + (A + A');$$

$$(C_1 E_1 + C_2 E_2 + A)(C'_1 E_1 + C'_2 E_2 + A') = C_1 C'_1 E_1 + C_2 C'_2 E_2 + A(C'_1 E_1 + C'_2 E_2) + (C_1 E_1 + C_2 E_2) A' + AA';$$

$$(C_1 E_1 + C_2 E_2 + A)^* = \overline{C}_1 E_1 + \overline{C}_2 E_2 + A^*,$$

avec des notations évidentes. $\mathfrak{J}$ étant un idéal bilatère auto-adjoint de $\mathfrak{B}$, ces formules prouvent que $\mathfrak{A}$ est une algèbre auto-adjointe. Comme $\mathfrak{J}$ est uniformément fermé, et comme l'espace vectoriel $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ est de dimension finie, $\mathfrak{A}$ est uniformément fermée. Enfin, $\lambda . \mathbf{1} = \lambda E_1 + \lambda E_2 \in \mathfrak{A}$ pour tout nombre complexe λ.

Les seuls opérateurs permutables à tous les opérateurs de rang fini sont les opérateurs $\lambda . \mathbf{1}$. *A fortiori*, le centre de $\mathfrak{A}$ se compose des seuls opérateurs $\lambda \mathbf{1}$.

Soit maintenant

$$U = C_1 E_1 + C_2 E_2 + A,$$

où $A \in \mathfrak{J}$, un opérateur unitaire de $\mathfrak{A}$. On a

$$\mathbf{1} = U U^* = (C_1 E_1 + C_2 E_2 + A)(\overline{C}_1 E_1 + \overline{C}_2 E_2 + A^*) = C_1 \overline{C}_1 E_1 + C_2 \overline{C}_2 E_2 + B,$$

avec $B \in \mathfrak{J}$. Comme Δ_{E_1} a une infinité de dimensions, il existe un vecteur $x \in \Delta_{E_1}$, avec $\|x\| = 1$, $\|Bx\| \leq \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est quelconque. D'où

$$1 - C_1 \overline{C}_1 = \|x - C_1 \overline{C}_1 x\| = \|UU^* x - C_1 \overline{C}_1 x\| = \|C_1 \overline{C}_1 x + Bx - C_1 \overline{C}_1 x\| = \|Bx\| \leq \varepsilon,$$

donc $C_1 \overline{C}_1 = 1$. De même, $C_2 \overline{C}_2 = 1$.

Soient alors $U_1, U_2, \ldots, U_n$ des opérateurs unitaires de $\mathfrak{A}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels avec $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$; on a

$$U_i = C'_1 E_1 + C'_2 E_2 + A_i,$$

avec

$$C'_1 \overline{C}'_1 = C'_2 \overline{C}'_2 = 1, \qquad A_i \in \mathfrak{J} \qquad (1 \leq i \leq n).$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i (E_1 - E_2) U_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (C'_1 E_1 + C'_2 E_2 + A_i)(E_1 - E_2)(\overline{C}'_1 E_1 + \overline{C}'_2 E_2 + A_i^*)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (C'_1 \overline{C}'_1 E_1 - C'_2 \overline{C}'_2 E_2) + B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (E_1 - E_2) + B = E_1 - E_2 + B,$$

où $B \in \mathfrak{I}$. Or il est impossible qu'une suite d'opérateurs de cette forme tende vers un opérateur de la forme $\lambda . 1$. Car supposons

$$\| E_1 - E_2 + B - \lambda . 1 \| < \varepsilon.$$

Utilisant comme plus haut le fait que Δ_{E_1} a une infinité de dimensions et que $B \in \mathfrak{I}$, on en déduirait que $|1 - \lambda| \leq \varepsilon$. Opérant de même avec Δ_{E_2}, on trouverait $|-1 - \lambda| \leq \varepsilon$. D'où absurdité pour ε assez petit.

NOTE II.

L'OSCILLATION D'UN OPÉRATEUR.

Soit M un anneau d'opérateurs quelconque, et soit $A \in M_S$. Posons

$$\omega_M(A) = \sup_{U \in M_U} \| A - UAU^{-1} \|,$$

$$\omega'_M(A) = \inf_{\Phi} \omega(\Phi, A),$$

où Φ parcourt l'ensemble des partitions finies de H appartenant à $M \cap M'$.

THÉORÈME A. — *a.* $0 \leq \omega_M(A) \leq \omega_H(A)$.

b. Si M *est abélien,* $\omega_M(A) = 0$.

c. Si M *est un facteur,* $\omega_M(A) = \omega_H(A)$ (15).

Démonstration. — *a.* $\omega_M(A) \geq 0$ est évident. D'autre part, pour tout $U \in M_U$ et tout $x \in H(\|x\| = 1)$, on a

$$((A - UAU^{-1})x, x) = (Ax, x) - (AU^{-1}x, U^{-1}x),$$

donc

$$M_H(A) - m_H(A) \geq ((A - UAU^{-1})x, x) \geq m_H(A) - M_H(A),$$

donc

$$\| A - UAU^{-1} \| \leq \omega_H(A)$$

$$\omega_M(A) \leq \omega_H(A).$$

b. est immédiat.

c. Si M est un facteur, toute partition de H appartenant à $M \cap M'$ se réduit à H, donc $\omega'_M(A) = \omega_H(A)$. Or, on va voir que $\omega'_M(A) = \omega_M(A)$.

THÉORÈME B. — $\omega_M(A) = \omega'_M(A)$.

Démonstration. — 1. Soient $A \in M_S$, $U \in M_U$, et $\Phi = (\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition finie de H appartenant à $M \cap M'$. $\mathfrak{M}_i$ réduit A et U; A et U induisent dans $\mathfrak{M}_i$

(15) Les réciproques sont aussi exactes.

des opérateurs respectivement self-adjoints et unitaires. Le théorème A, a, appliqué dans l'espace $\mathfrak{M}_i$, donne

$$\|(A - UAU^{-1})P_{\mathfrak{M}_i}\| \leq \omega_{\mathfrak{M}_i}(A),$$

donc

$$\|A - UAU^{-1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|(A - UAU^{-1})P_{\mathfrak{M}_i}\| \leq \omega(\Phi, A)$$

quel que soit $U \in M_U$. Ainsi, $\omega_M(A) \leq \omega(\Phi, A)$ quelle que soit Φ satisfaisant aux conditions indiquées, et par suite $\omega_M(A) \leq \omega'_M(A)$. Si $\omega'_M(A) = 0$, le théorème est démontré. Supposons donc désormais $\omega'_M(A) > 0$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, avec $\varepsilon < \frac{1}{2}\omega'_M(A)$. Soit $\Phi = (\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition finie de H appartenant à $M \cap M'$ telle que

$$\omega'_M(A) \leq \omega(\Phi, A) < \omega'_M(A) + \varepsilon. \tag{1}$$

En modifiant au besoin l'ordre des $\mathfrak{M}_i$, on peut supposer

$$\omega'_M(A) \leq \omega_{\mathfrak{M}_i}(A) < \omega'_M(A) + \varepsilon \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq p \tag{2}$$

et

$$\omega_{\mathfrak{M}_i}(A) < \omega'_M(A) \quad \text{pour} \quad p+1 \leq i \leq n \tag{3}$$

($1 \leq p \leq n$). Raisonnons dans l'espace $\mathfrak{M}_i$, où $1 \leq i \leq p$. Soit $\mathfrak{M}_i^1$, $\mathfrak{M}_i^2$ deux variétés linéaires fermées orthogonales, avec

$$\mathfrak{M}_i^1 r_i M, \quad \mathfrak{M}_i^2 r_i M; \quad \mathfrak{M}_i^1 \subset \mathfrak{M}_i, \ \mathfrak{M}_i^2 \subset \mathfrak{M}_i$$

et

$$M_{\mathfrak{M}_i^1}(A) \leq m_{\mathfrak{M}_i}(A) + \varepsilon, \tag{4}$$

$$m_{\mathfrak{M}_i \ominus \mathfrak{M}_i^1}(A) \geq m_{\mathfrak{M}_i}(A) + \varepsilon, \tag{5}$$

$$m_{\mathfrak{M}_i^2}(A) \geq M_{\mathfrak{M}_i}(A) - \varepsilon, \tag{6}$$

$$M_{\mathfrak{M}_i \ominus \mathfrak{M}_i^2}(A) \geq M_{\mathfrak{M}_i}(A) - \varepsilon; \tag{7}$$

ce qui est possible d'après la théorie spectrale, et grâce au fait que $2\varepsilon < \omega_{\mathfrak{M}_i}(A)$.

Soit $\mathfrak{N}_i = [(\mathfrak{M}_i^2)^M] r_i M \cap M'$. On a $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{M}_i$. Soit $\mathfrak{N}'_i = \mathfrak{M}_i \ominus \mathfrak{N}_i$.

Supposons d'abord $\mathfrak{N}_i$ orthogonale à $\mathfrak{M}_i^1$, ceci pour $1 \leq i \leq p$. Alors, nous considérons les variétés

$$\mathfrak{N}_i (1 \leq i \leq p); \qquad \mathfrak{N}'_i (1 \leq i \leq p); \qquad \mathfrak{M}_i (p+1 \leq i \leq n).$$

Elles forment une partition finie $\Psi = (\mathfrak{P}_j)$ de H appartenant à $M \cap M'$, et l'on va montrer que $\omega(\Psi, A) < \omega'_M(A)$, ce qui sera absurde. Il suffit de prouver que $\omega_{\mathfrak{P}_j}(A) < \omega'_M(A)$ pour toute $\mathfrak{P}_j$. Or, ceci est vrai si $\mathfrak{P}_j = \mathfrak{M}_i$ avec $p+1 \leq i \leq n$ d'après (3). On a $\mathfrak{M}_i^2 \subset \mathfrak{N}_i$, donc $\mathfrak{N}'_i \subset \mathfrak{M}_i \ominus \mathfrak{M}_i^2$, de sorte que, d'après (7), $\omega_{\mathfrak{N}'_i}(A) \leq \omega_{\mathfrak{M}_i}(A) - \varepsilon < \omega'_M(A)$, d'après (2), pour $1 \leq i \leq p$.

Enfin, $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{M}_i \ominus \mathfrak{M}_i'$ d'après notre hypothèse actuelle, donc, d'après (5), $\omega_{\mathfrak{N}_i}(A) \leq \omega_{\mathfrak{M}_i}(A) - \varepsilon < \omega_M'(A)$ pour $1 \leq i \leq p$. L'absurdité est ainsi établie.

Donc $\mathfrak{N}_i$ est non orthogonale à $\mathfrak{M}_i'$ pour un i compris entre 1 et p, soit $i = 1$ pour fixer les idées. Donc il existe un $U' \in M_r$ tel que $U'(\mathfrak{M}_1^2)$ soit non orthogonale à $\mathfrak{M}_1'$. On peut donc trouver des variétés différentes de zéro et en position p', soit $\overline{\mathfrak{M}}_1$ et $\overline{\mathfrak{M}}_2'$, contenues respectivement dans $\mathfrak{M}_1'$ et $U'(\mathfrak{M}_1^2)$, appartenant à M. Il existe alors une symétrie $S \in M$ telle que $S(\overline{\mathfrak{M}}_2') = \overline{\mathfrak{M}}_1$. Soit $U = SU'$, et soit $\overline{\mathfrak{M}}_2 = U'^{-1}(\overline{\mathfrak{M}}_2') \subset \mathfrak{M}_1^2$. On a $U(\overline{\mathfrak{M}}_2) = \overline{\mathfrak{M}}_1$. $\overline{\mathfrak{M}}_1 \subset \mathfrak{M}_1'$, $\overline{\mathfrak{M}}_2 \subset \mathfrak{M}_1^2$.

Ceci posé, soit $x \in \overline{\mathfrak{M}}_2$, avec $\|x\| = 1$. On a $Ux \in \overline{\mathfrak{M}}_1$. Donc

$$(Ax, x) \geq M_{\mathfrak{M}_1}(A) - \varepsilon, \qquad \text{d'après (6)},$$
$$(AUx, Ux) \leq m_{\mathfrak{M}_1}(A) + \varepsilon, \qquad \text{d'après (4)},$$

donc

$$\|U^{-1}AU - A\| \geq -((U^{-1}AU - A)x, x) \geq M_{\mathfrak{M}_1}(A) - \varepsilon - m_{\mathfrak{M}_1}(A) - \varepsilon = \omega_{\mathfrak{M}_1}(A) - 2\varepsilon$$
$$\geq \omega_M'(A) - 2\varepsilon.$$

A fortiori

$$\omega_M(A) \geq \omega_M'(A) - 2\varepsilon,$$

et, comme ε est arbitraire $\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\omega_M'(A)\right)$.

$$\omega_M(A) \geq \omega_M'(A).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. Dixmier, *Position relative de deux variétés linéaires fermées dans un espace de Hilbert* [*Revue Scientifique* (*Revue Rose*), 86, 1948, p. 387-399].

[2] J. Dixmier, *Mesure de Haar et trace d'un opérateur* (*C. R. Ac. Sc.*, Paris, 228, 1949, p. 152-154).

[3] F. J. Murray et J. von Neumann, *On rings of operators* (*Ann. of Math.*, 37, 1936, p. 116-229).

[4] F. J. Murray et J. von Neumann, *On rings of operators*, II (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 41, 1937, p. 208-248).

[5] J. von Neumann, *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren* (*Math. Ann.*, 102, 1929, p. 370-427).

[6] J. von Neumann, *Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen* (*Comp. Math.*, 1, 1934, p. 106-114).

[7] J. von Neumann, *On rings of operators. Reduction theory* (*Ann. of Math.*, 50, 1949, p. 401-485).

SUR LES SÉRIES DE DIRICHLET

Par M. Shmuel AGMON.

INTRODUCTION.

Dans ce travail nous ne considérons que des séries de Dirichlet de la forme

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}, \tag{1}$$

où $0\leq\lambda_n\uparrow\infty$ et $0<h\leq\lambda_{n-1}-\lambda_n\leq H<\infty$. Nous supposons aussi, sauf dans les cas où l'on précise le contraire, que l'abscisse de convergence de la série (1) est égale à zéro. C'est-à-dire qu'on a $\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log^+|d_n|}{\lambda_n}=0$. Remarquons que la condition $\lambda_{n-1}-\lambda_n\leq H$ ne constitue pas une vraie restriction, nous l'introduisons uniquement pour la commodité. En effet, on peut la satisfaire toujours en ajoutant dans (1) des coefficients égaux à zéro.

On sait que les séries (1) possèdent des propriétés analogues à celles des séries de Taylor, en particulier elles ont l'abscisse de convergence simple, de convergence absolue et d'holomorphie identiques.

Ce travail se compose de cinq chapitres (1). Dans le premier nous énonçons et démontrons notre théorème fondamental. Nous introduisons dans le même chapitre l'importante notion d'une suite de coefficients principaux $\{d_{n_k}\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ de la série (1) (Déf. B, § 6).

Dans les Chapitres II, III et IV nous donnons des applications du théorème fondamental à la recherche des points singuliers de $f(s)$ sur l'axe imaginaire.

Dans le Chapitre II nous démontrons un théorème qui précise le théorème de Fatou-Pólya. Un autre théorème que nous démontrons (théorème VIII)

(1) Les trois premiers Chapitres seulement sont publiés ici. Les deux derniers Chapitres seront publiés ultérieurement. Remarquons aussi que quelques résultats obtenus ici ont été énoncés par nous, dans le cas des séries de Taylor, dans quatre Notes des *Comptes rendus* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1497-1499, 1673-1674, 1786-1787 et 1875-1876).

contient comme un cas particulier le *petit théorème* de Fabry sur les séries lacunaires. En effet, nous remplaçons les conditions sur les lacunes par des conditions plus générales.

Enfin, nous donnons dans ce chapitre un critère général pour que le point $s=0$ soit un point singulier de $f(s)$.

Dans le Chapitre III, nous généralisons un théorème de M. Pólya pour la classe des séries (1) dont les coefficients $\{d_n\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ forment une suite quasi-régulière. Nous donnons aussi un théorème dans l'ordre d'idées de celui de M. Mandelbrojt, donnant une relation entre la *largeur des lacunes* et la *densité* de distribution des singularités sur l'axe imaginaire.

Dans le Chapitre IV (1), nous généralisons un théorème de M. Szegö sur les séries de Taylor dont les coefficients ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Nous traitons ensuite des séries dont les coefficients satisfont à quelque conditions de régularité et des séries dont les exposants satisfont à quelques conditions arithmétiques. Enfin, nous utilisons le théorème fondamental pour les problèmes de séparation de singularités.

Dans le dernier chapitre (1), nous nous occupons du comportement des sommes partielles de la série (1) dans le voisinage de l'axe imaginaire. Nous précisons, ainsi, le théorème de Fatou-Riesz sur la convergence des séries de Dirichlet (1), avec $\lim_{n=\infty} d_n = 0$, en chaque point régulier de l'axe imaginaire, et nous donnons la rapidité de cette convergence. Nous traitons ensuite la question de l'ultra-convergence d'une classe de séries lacunaires sur l'axe imaginaire. Enfin nous donnons des précisions sur le théorème de Jentsch.

J'exprime toute ma gratitude à M. Mandelbrojt, qui a bien voulu s'intéresser à mon travail, me permettant de venir le présenter à Paris et à qui je ne saurai jamais assez dire toute ma reconnaissance pour ses conseils éclairés et sa chaude amitié.

Je veux également remercier M. Denjoy de sa bienveillante introduction et M. Montel de la confiance qu'il a bien voulu me montrer. J'ai été infiniment sensible à l'excellent accueil que m'ont réservé M. Valiron et M. Favard.

Je ne saurais terminer sans profiter de cette occasion pour assurer de toute ma gratitude mes Maîtres de Jérusalem, M. Fekete et M. Amira dont les encouragements m'ont toujours été si précieux.

CHAPITRE I.

Le théorème fondamental.

1. Commençons par rappeler deux notions connues qui nous serviront fréquemment dans ce travail. Soit $\{\lambda_n\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ une suite croissante de

(1) *Voir* la note précédente.

nombres non négatifs, $\lambda_n \uparrow \infty$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n > 0$. Soit $\{C_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ une suite infinie de nombres réels où C_n peut être égal à $-\infty$, mais où il est fini pour une suite croissante d'entiers non négatifs $n = n_j (j = 1, 2, \ldots,)$ avec $n_1 = 0$. Supposons que l'on a :

a. $\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{C_n}{\lambda_n} = 0$. Il existe donc une fonction concave $C(x)$, définie pour $\lambda_0 \leq x < \infty$, appelée la plus petite enveloppe concave non négative de points $P_n = (\lambda_n, C_n)$ caractérisée par les propriétés suivantes :

α. $C(x) \geq 0$ et $C(\lambda_n) \geq C_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

β. Si $C_1(x)$ est une autre fonction concave satisfaisant à α, on a

$$C_1(x) \geq C(x) \qquad \text{pour} \quad \lambda_0 \leq x < \infty.$$

On démontre aisément, par une méthode géométrique, l'existence et l'unicité de $C(x)$. D'après *a*, α et β on obtient facilement :

b. $\lim_{x_1=\infty} \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$ $(x_2 > x_1)$, et en particulier :

b'. $\lim_{x=\infty} \frac{C(x)}{x} = 0$.

Il est évident, d'après la définition, que la courbe $y = C(x)$ est une ligne polygonale dont les sommets sont tous des points $P_{n_k} = (\lambda_{n_k}, C_{n_k})$. Or, dans le cas où $\overline{\lim_{n=\infty}} C_n = \infty$, on trouve $C(x) \uparrow \infty$. Si l'on tient compte de *b'*, on peut conclure que $y = C(x)$ possède un nombre infini de sommets. Donc, d'après ce qui précède, $C(\lambda_{n_k}) = C_{n_k}$ pour une suite infinie d'entiers positifs $\{n_k\}$.

2. $\{\lambda_n\}$ et $\{C_n\}$ étant les suites définies plus haut, supposons qu'au lieu de satisfaire à *a* la suite $\{C_n\}$ satisfasse à la condition suivante :

c. $\lim_{n=\infty} \frac{C_n}{\lambda_n} = -\infty$. Dans ce cas, il existe une fonction concave $C(x)$, définie pour $\lambda_0 \leq x < \infty$, appelée la plus petite enveloppe concave de points $P_n = (\lambda_n, C_n)$, caractérisée par les propriétés suivantes :

α'. $C(\lambda_n) \geq C_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

β'. Si $C_1(x)$ est une autre fonction concave satisfaisant à α', on a

$$C_1(x) \geq C(x) \qquad \text{pour} \quad \lambda_0 \leq x < \infty.$$

L'existence et l'unicité de cette fonction $C(x)$ est aussi facile à démontrer En effet, $y = -C(x)$ n'est autre que le polygone de Newton de point $P_n = (\lambda_n - C_n)$ et il possède un nombre infini de sommets qui sont tous de points P_n. Enfin, remarquons que la fonction $-C(x)$ a été introduite dans l'étude de fonctions entières par M. G. Valiron.

3. Énonçons ici un cas particulier du théorème fondamental dont la démonstration est très simple. Le théorème plus général sera donné ultérieurement.

Dans notre démonstration nous employons un artifice dû à M. M. Riesz (¹) qui lui a servi à démontrer et généraliser un théorème de Fatou. La méthode de M. Riesz donne le théorème I dans le cas particulier où les coefficients sont bornés. En faisant intervenir un autre artifice nous obtenons notre théorème dans le cas général.

THÉORÈME I. — *Soit $f(s)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$ contenant le demi-plan $\mathcal{R}(s) \geq 0$. Supposons que, pour $\mathcal{R}(s) \geq 0$, $f(s)$ soit représentée par la série* (1). *Soit $C(x)$ la plus petite enveloppe concave non négative de points $P_n = (\lambda_n, \log|d_n|)$. Posons*

$$q_n = e^{C(\lambda_n)}, \qquad f_n(s) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu e^{-\lambda_\nu s}.$$

Dans ces conditions, dans tout domaine borné et fermé $\bar{\Delta}$ contenu dans $\mathcal{D}$, on a

$$\max_{s \in \bar{\Delta}} \left| \frac{f(s) - f_n(s)}{q_n e^{-\lambda_n s}} \right| = O(1) \qquad \text{pour} \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Démonstration. — Posons

$$\tau_n = \frac{C(\lambda_{n-1}) - C(\lambda_n)}{\lambda_{n-1} - \lambda_n}.$$

D'après la concavité de $C(x)$ et la relation b du paragraphe 1, $\tau_n \downarrow 0$. Posons ensuite

$$\varphi_n(s) = \frac{f(s + \tau_n) - f_n(s + \tau_n)}{q_n e^{-\lambda_n (s + \tau_n)}}, \tag{3}$$

$\varphi_n(s)$ étant holomorphe dans chaque domaine fermé $\bar{\Delta}$ contenu dans $\mathcal{D}$ pour $n \geq n_0 = n_0(\bar{\Delta})$, il suffit pour arriver à (2) de démontrer

$$\max_{s \in \bar{\Delta}} |\varphi_n(s)| = O(1) \qquad \text{pour} \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Or, tenant compte du lemme de Borel-Lebesgue, il suffit de démontrer la proposition A suivante :

A. *Chaque point $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \bar{\Delta}$ est le centre d'un carré $C(s_0, \delta_0)$: $|\sigma - \sigma_0| \leq \delta_0$, $|t - t_0| \leq \delta_0$, avec $\delta_0 = \delta_0(s_0) > 0$, dans lequel $\varphi_n(s)$ est holomorphe et satisfait à* (4) [*où l'on remplace $\bar{\Delta}$ par $C(s_0, \delta_0)$*].

Enfin, la proposition à démontrer peut être réduite à celle-ci :

$$|\varphi_n(s)| \leq \frac{K}{1 - e^{h\sigma}} \qquad \text{pour} \quad s \in \bar{\Delta}, \tag{5}$$

(¹) M. RIESZ, *Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen* (*Acta math.*, t. 40, 1916).

où h et K sont deux constantes positives. En effet, si (5) est satisfaite, A est satisfaite également. C'est évident pour $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \overline{\Delta}$ avec $\sigma_0 \leqq 0$. Dans le cas $\sigma_0 = 0$, $s_0 = it_0$, choisissons $0 < \delta_0 < \frac{\pi}{2h}$ assez petit pour que $f(s)$ soit holomorphe dans $C(s_0, 3\delta_0)$ et posons

$$\psi_n(s) = [1 - e^{-i[s - i(t_0 - 2\delta_0)]h}][1 - e^{-i[s - i(t_0 + 2\delta_0)]h}]\varphi_n(s). \tag{6}$$

La fonction $\psi_n(s)$ est holomorphe dans $C(s_0, 2\delta_0)$ et satisfait le long des côtés de ce carré, d'après (5) et (6), à l'inégalité $|\psi_n(s)| \leqq K_1$, pour $n = 1, 2, \ldots$ où K_1 est une constante qui ne dépend pas de n. Par conséquent, la dernière inégalité est vérifiée dans tout le carré. Posons $\mu = \min |1 - e^{-i[s - i(t_0 - 2\delta_0)]h}|$ pour s_0 variant sur les côtés de $C(s_0, \delta_0)$. D'après ce qui précède, on obtient aisément $|\varphi_n(s)| \leqq \frac{K_1}{\mu^2}$ pour $s \in C(s_0, \delta_0)$. Donc, la proposition A est satisfaite pour ce cas aussi.

Revenons à la démonstration de (5) et distinguons entre deux cas :

a. Pour $s = \sigma + it \in \overline{\Delta}$ avec $\sigma > 0$, on trouve, d'après (2), (3) et la définition de $\{q_n\}$,

$$|\varphi_n(s)| = \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{d_\nu}{q_n} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_n)(s + \tau_{in})} \right| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{q_\nu}{q_n} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_n)(\sigma + \tau_{in})} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} e^{C(\lambda_\nu) - C(\lambda_n) - (\lambda_\nu - \lambda_n)\tau_{in}} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_n)\sigma}.$$

Or, d'après la concavité de $C(x)$, on peut écrire, pour $\nu \geqq n+1$,

$$\frac{C(\lambda_\nu) - C(\lambda_n)}{\lambda_\nu - \lambda_n} - \tau_{in} \leqq \frac{C(\lambda_{n+1}) - C(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} - \tau_{in} = 0.$$

En portant cette dernière inégalité dans la précédente, on obtient

$$|\varphi_n(s)| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_n)\sigma} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\sigma h} < \frac{1}{1 - e^{-\sigma h}}, \tag{7}$$

[la constante positive h étant celle dont il a été question dans (1)]. Ce qui démontre (5) dans le cas étudié.

b. Pour $s = \sigma + it \in \overline{\Delta}$ avec $\sigma < 0$, $n \geqq n_0$, on a

$$|\varphi_n(s)| = \left| \frac{f(s + \tau_{in})}{q_n e^{-\lambda_n(s + \tau_{in})}} - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{d_\nu}{q_n} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_n)(s + \tau_{in})} \right| \tag{8}$$

$$\leqq \frac{M_n}{q_n e^{-\lambda_n(\tau_{in} + \sigma)}} + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{q_\nu}{q_n} e^{(\lambda_n - \lambda_\nu)(\sigma + \tau_{in})} = I_n(\sigma) + J_n(\sigma),$$

où

$$M_n = \max |f(s + \tau_{in})| \quad \text{pour} \quad s \in \overline{\Delta},\ n \geqq n_0.$$

Or, d'après la concavité de $C(x)$, on obtient pour $0 \leq \nu \leq n-1$,

$$\frac{C(\lambda_n) - C(\lambda_\nu)}{\lambda_n - \lambda_\nu} \leq \frac{C(\lambda_{n+1}) - C(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \gamma_{1n}. \tag{9}$$

En prenant (9) pour $\nu = 0$ et étant donné que $\sigma < 0$, $\gamma_{1n} \downarrow 0$, on trouve pour $I_n(\sigma)$ et n assez grand

$$I_n(\sigma) = \frac{M_n}{q_n e^{-\lambda_n(\gamma_{1n}+\sigma)}} \leq \frac{2M e^{\lambda_n \sigma}}{e^{C(\lambda_n)-\lambda_n\gamma_{1n}}} \leq \frac{2M e^{\lambda_n\sigma}}{e^{C(\lambda_0)-\lambda_0\gamma_{10}}} < 2M e^{\lambda_0\gamma_{10}}, \tag{10}$$

où $M = \operatorname{Max} |f(s)|$ pour $s \in \Delta$. D'après (9), on peut écrire

$$J_n(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{n} e^{-C(\lambda_n)+C(\lambda_\nu)+(\lambda_n-\lambda_\nu)\gamma_{1n}} e^{(\lambda_n-\lambda_\nu)\sigma} \leq \sum_{\nu=0}^{n} e^{(\lambda_n-\lambda_\nu)\sigma} < \sum_{n=0}^{\infty} e^{n\sigma h} = \frac{1}{1-e^{\sigma h}}. \tag{11}$$

On tire de (8), (10) et (11) l'inégalité (5), énoncée pour $\sigma < 0$. D'après ce qui précède (5) est établi dans tous les cas et le théorème est ainsi démontré.

4. Soit $\{\lambda_n\}$ la suite dont il a été question dans (1). Soit $\{C_n\}$ une suite infinie de nombres positifs satisfaisant aux conditions suivantes :

a. $\log C_n$ est une fonction concave de λ_n.

b. $\lim_{n=\infty} \frac{\log |C_n|}{\lambda_n} = -\infty$. Posons

$$m(\sigma) = \max_{0 \leq n < \infty} C_n e^{-\lambda_n \sigma}. \tag{12}$$

Le théorème suivant est un théorème analogue au théorème I pour les séries de Dirichlet (1) représentant des fonctions entières; la condition de régularité de $f(s)$ sur le segment de l'axe imaginaire $\sigma = 0$, $|t| \leq d$ dans le théorème I est remplacée ici par une condition portant sur la croissance de $f(s)$ dans la bande $t \leq d$ (1).

THÉORÈME II. — *Soit* $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *une série de Dirichlet* (1) *qui représente une fonction entière. C'est-à-dire* $\lim_{n=\infty} \frac{\log |d_n|}{\lambda_n} = -\infty$. *Soit* $\{C_n\}$ *une suite de nombres positifs telle que* $C_n \geq |d_n|$ *et satisfaisant aux conditions a et b précisées plus haut. Supposons qu'il existe une suite décroissante* $\{\sigma_k\}$, $\sigma_k \downarrow -\infty$, *et deux nombres positifs* $d > 0$, $\delta > 0$ *satisfaisant à*

$$\max_{\substack{\sigma_k - \delta \leq \sigma \leq \sigma_k \\ -d \leq t \leq d}} |f(\sigma + it)| = O[m(\sigma_k)] \quad \text{pour} \quad k \to \infty, \tag{13}$$

(1) Notons que le théorème II joue dans la recherche des *lignes de Julia* de séries (1) convergeant dans tout le plan, le même rôle que joue le théorème fondamental de ce travail dans la recherche des points singuliers sur l'axe imaginaire.

où $m(\sigma)$ est définie par (12). *Soit $\{n_k\}$ une suite d'entiers positifs telle que l'on ait*

$$m(\sigma_k) = C_{n_k} e^{-\lambda_{n_k}\sigma_k},$$

(on démontre aisément que $n_k \uparrow \infty$). *Soient d' et δ' deux nombres positifs quelconques tels que $0 < d' < d$, $0 < \delta' < \delta$. Posons*

$$f_n(s) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu e^{-\lambda_\nu s}.$$

Dans ces conditions on a

$$(14) \qquad \max_{\substack{\sigma_k - \delta' \leq \sigma \\ -d' \leq t \leq d'}} \left| \frac{f(s) - f_{n_k}(s)}{C_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} s}} \right| = O(1) \qquad \text{pour} \quad k \to \infty.$$

Démonstration. — La démonstration est similaire à celle du théorème I. Posons

$$(15) \qquad \varphi_k(s') = \frac{f(s' + \sigma_k) - f_{n_k}(s' + \sigma_k)}{C_{n_k} e^{-\lambda_{n_k}(s' + \sigma_k)}}.$$

Il faut donc démontrer

$$\max_{\substack{-\delta' \leq \sigma' \\ -d' \leq t' \leq d'}} |\varphi_k(\sigma' + it')| = O(1) \qquad \text{pour} \quad k \to \infty.$$

Comme pour le théorème I, il suffit de démontrer l'inégalité

$$(16) \qquad |\varphi_k(\sigma' + it')| \leq \frac{A}{|1 - e^{-\sigma' h}|} \qquad \text{pour} \quad \sigma' \geq -\delta, \quad |t| \leq d \quad \text{et} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

où h et A sont deux constantes positives qui ne dépendent pas de k. Posons

$$\gamma_{in} = \frac{\log C_{n+1} - \log C_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}.$$

D'après la concavité de $\log C_n$, $\gamma_{in} \downarrow -\infty$. Or, d'après la façon dont on a défini $m(\sigma)$ et la suite $\{n_k\}$, on obtient les inégalités

$$C_{n_k - 1} e^{-\lambda_{n_k - 1}\sigma_k} \leq C_{n_k} e^{-\lambda_{n_k}\sigma_k} \qquad \text{et} \qquad C_{n_k + 1} e^{-\lambda_{n_k + 1}\sigma_k} \leq C_{n_k} e^{-\lambda_{n_k}\sigma_k}.$$

Cela nous donne

$$\gamma_{in_k} \leq \sigma_k \leq \gamma_{in_k - 1}.$$

En tenant compte de cette dernière inégalité et de la concavité de $\log C_n$, on obtient, pour $\nu \geq n_k + 1$,

$$(17) \qquad \frac{\log C_\nu - \log C_{n_k}}{\lambda_\nu - \lambda_{n_k}} \leq \frac{\log C_{n_k + 1} - \log C_{n_k}}{\lambda_{n_k + 1} - \lambda_{n_k}} = \gamma_{in_k} \leq \sigma_k,$$

et pour $0 \leq \nu \leq n_k - 1$,

$$(17') \qquad \frac{\log C_{n_k} - \log C_\nu}{\lambda_{n_k} - \lambda_\nu} \geq \frac{\log C_{n_k} - \log C_{n_k - 1}}{\lambda_{n_k} - \lambda_{n_k - 1}} = \gamma_{n_k - 1} \geq \sigma_k.$$

Dans la démonstration de (16) nous distinguons entre deux cas :

a. Soit $s' = \sigma' + it'$ avec $\sigma' > 0$. En partant de (15), de (17) et des hypothèses du théorème, on peut écrire dans ce cas

$$(18)\qquad |\varphi_k(s')| = \left| \sum_{\nu=n_k+1}^{\infty} \frac{d_\nu}{C_{n_k}} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_{n_k})(s'+\sigma_k)} \right| \leq \sum_{\nu=n_k+1}^{\infty} \frac{C_\nu}{C_{n_k}} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_{n_k})(\sigma'+\sigma_k)}$$

$$= \sum_{\nu=n_k+1}^{\infty} e^{\log C_\nu - \log C_{n_k} - \sigma_k(\lambda_\nu - \lambda_{n_k})} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_{n_k})\sigma'}$$

$$\leq \sum_{\nu=n_k+1}^{\infty} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_{n_k})\sigma'} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\sigma' h} < \frac{1}{1 - e^{-\sigma' h}},$$

la constante positive h étant celle dont il a été question dans (1).

b. Soit maintenant $s' = \sigma' + it'$ avec $-\delta \leq \sigma' < 0$, $|t'| \leq d$. Dans ce cas, on peut écrire

$$(19)\qquad |\varphi_k(s')| = \left| \frac{f(s'+\sigma_k)}{C_{n_k} e^{-\lambda_{n_k}(s'+\sigma_k)}} - \sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{d_\nu}{C_{n_k}} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_{n_k})(s'+\sigma_k)} \right|$$

$$\leq \frac{|f(s'+\sigma_k)|\, e^{\lambda_{n_k}\sigma'}}{C_{n_k} e^{-\lambda_{n_k}\sigma_k}} + \sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{C_\nu}{C_{n_k}} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_{n_k})(\sigma'+\sigma_k)} = I_k(s') + J_k(\sigma').$$

Or, d'après notre hypothèse (13) et d'après la définition de $m(\sigma)$ et de la suite $\{n_k\}$, on a

$$(20)\qquad I_k(s') = \frac{|f(s'+\sigma_k)|}{m(\sigma_k)} e^{\lambda_{n_k}\sigma'} \leq \frac{|f(s'+\sigma_k)|}{m(\sigma_k)} \leq B,$$

B étant une constante qui ne dépend pas de s' et de k.

En tenant compte de (17'), on obtient

$$(21)\qquad J_k(\sigma') = \sum_{\nu=0}^{n_k} e^{\log C_\nu - \log C_{n_k} - (\lambda_\nu - \lambda_{n_k})\sigma_k} e^{(\lambda_{n_k} - \lambda_\nu)\sigma'} \leq \sum_{\nu=0}^{n_k} e^{(\lambda_{n_k} - \lambda_\nu)\sigma'} < \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu\sigma' h}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{\sigma' h}} < \frac{B_1}{|1 - e^{-\sigma' h}|}.$$

On tire de (19), (20) et (21), l'inégalité (16) pour $-\delta \leq \sigma' < 0$. D'après ce qui précède, l'inégalité (16) est établie dans tous les cas et le théorème est donc démontré.

5. Définition A. — *Soit $\{\lambda_n\}$ une suite croissante de nombres non négatifs $0 \leq \lambda_n \uparrow \infty$, où $0 < h \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n \leq H < \infty$. Nous désignons par $Q\{\lambda_n\}$ la classe des suites de nombres positifs $\{q_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, satisfaisant aux conditions suivantes :*

a.
$$\lim_{n=\infty} \frac{\log q_{n+1} - \log q_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0,$$

b. $\frac{\log q_n}{\Gamma(\lambda_n+1)}$ *est une fonction concave de* λ_n *pour n assez grand.* [$\Gamma(x)$ étant la fonction Gamma de Euler].

On voit, en particulier, que la condition *b* est satisfaite si $\log q_n$ est une fonction concave de λ_n pour n assez grand. D'une manière plus générale, $\{q_n\}$ appartient à la classe $Q\{\lambda_n\}$ si la suite $\{q_n\}$ satisfait à la condition *a* et où la condition *b* est remplacée par la condition plus restrictive suivante :

$$b'. \qquad \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{2\lambda_n}{\lambda_{n-1}-\lambda_{n+1}}\left(\frac{\log q_{n+1}-\log q_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}-\frac{\log q_n-\log q_{n-1}}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}\right)<1.$$

Ce qu'on démontre aisément en tenant compte des développements asymptotiques de $\Gamma(x)$ et de ses dérivées.

Remarquons enfin que si $q_n=q(\lambda_n)$, où $q(x)$ est une fonction positive ayant les deux premières dérivées satisfaisant à $\lim_{x=\infty}[\log q(x)]'=0$ et $\lim_{x=\infty} x[\log q(x)]''=0$, les deux suites $\{q_n\}$ et $\left\{\frac{1}{q_n}\right\}$ appartiennent à la classe $Q\{\lambda_n\}$.

6. Définition B. — *Soit* $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Une suite partielle de coefficients* $\{d_{n_k}\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ *sera appelée suite de coefficients principaux et la suite croissante d'entiers positifs* $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$, *suite d'indices principaux, s'il existe une suite* $\{q_n\}$ *appartenant à la classe* $Q\{\lambda_n\}$, *telle que*

a. $q_n \geqq |d_n|$ $(n=0, 1, \ldots)$.
b. $|q_{n_k}| \leqq C|d_{n_k}|$ *pour* $k=1, 2, \ldots$ *et où* $1 \leqq C < \infty$ *est une constante.*

7. Définition C. — *Soit* $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Nous disons que :*

a. La suite de coefffficients $\{d_n\}$ *est une suite régulière, si la suite d'entiers* $\{n\}$ *pour* $n \geqq n_0$ *est une suite d'indices principaux* (Déf. B).

a'. La suite de coefficients $\{d_n\}$ *est une suite quasi-régulière, s'il existe une suite d'indices principaux* $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ *telle que* $n_{k+1}-n_k=O(1)$ *pour* $k \to \infty$.

Pour démontrer que chaque série (1) possède des suites de coefficients principaux, nous nous servirons du lemme suivant.

8. Lemme I. — *Soit* $\{\lambda_n\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ *la suite croissante introduite dans le paragraphe* 5. *Soit* $\{a_n\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ *une suite de nombres non négatifs, telle que* $\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log a_n}{\lambda_n}=0$. *Il existe une suite croissante de nombres positifs* $\{p_n\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ *possédant les propriétés suivantes :*

a. $\log p_n$ *est une fonction concave de* λ_n *et l'on a*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log p_{n+1} - \log p_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0$$

(*La suite* $\{p_n\}$ *appartient donc à la classe* $Q\{\lambda_n\}$).

b. La suite $\left\{\frac{1}{p_n}\right\}$ *appartient aussi à la classe* $Q\{\lambda_n\}$.

c. $\overline{\lim_{n=\infty}} p_n a_n = \infty$.

Démonstration. — Dans le cas où $\overline{\lim_{n=\infty}} a_n > 0$, la suite $p_n = \lambda_n$ possède les propriétés énoncées dans le lemme. Supposons donc qu'on ait $\lim_{n=\infty} a_n = 0$. Soit $\{n_k\}(k = 1, 2, \ldots)$ une suite infinie d'entiers positifs telle que $\lim_{k=\infty} \frac{\log a_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = 0$. (Une telle suite existe toujours d'après nos hypothèses.) Posons

$$\varepsilon(x) = \overline{\text{borne}}_{\lambda_{n_k} \geq x} \frac{1}{\lambda_{n_k}} \log \frac{\lambda_{n_k}}{a_{n_k}} \qquad \text{pour} \quad \lambda_{n_1} \leq x < \infty,$$

et $\varepsilon(x) = \varepsilon(\lambda_{n_1})$ pour $0 \leq x \leq \lambda_{n_1}$. $\varepsilon(x)$ est une fonction positive décroissante, $\varepsilon(x) \downarrow 0$.

Soit $\{\eta_n\}(n = 1, 2, \ldots)$ une suite décroissante de nombres positifs, $\eta_n \downarrow 0$ avec $\eta_1 = \varepsilon(0)$ et $\sum_1^\infty \eta_n < \infty$. Faisons correspondre à $\{\eta_n\}$ une suite croissante de nombres positifs $\{x_n\}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$\alpha.$ $x_{n+1} > 3x_n + 1$ pour $n = 1, 2, \ldots$.

$\beta.$ $\varepsilon(x) < \eta_{n+1}$ pour $x \geq x_n (n = 1, 2, \ldots)$.

Posons

$$\delta_n = \frac{\eta_n}{\log(x_{n+1} - 1) - \log x_n},$$

d'après α on obtient $0 < \delta_n < \eta_n$ et donc $\lim_{n=\infty} \delta_n = 0$. Posons

$$\mu(x) = \frac{\delta_1}{x_1} \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq x_1, \qquad \mu(x) = \frac{\delta_n}{x} \quad \text{pour} \quad x_n \leq x \leq x_{n+1} - 1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

et enfin

$$\mu(x) = \delta_n \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - 1} + \delta_{n+1} \frac{x + 1 - x_{n+1}}{x_{n+1}} \qquad \text{pour} \quad x_{n+1} - 1 \leq x \leq x_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On voit aisément que la fonction $\mu(x)$, qui est positive et continue, satisfait pour $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ à l'inégalité $(x - 1)\mu(x) \leq \delta_n + \delta_{n+1}$, donc, on peut écrire

(22) $$\lim_{x=\infty} x\mu(x) = 0.$$

D'après les définitions de $\mu(x)$ et de la suite $\{\delta_n\}$, on trouve

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}-1}\mu(y)\,dy=\int_{x_n}^{x_{n+1}-1}\frac{\delta_n}{y}\,dy=\eta_n \qquad \text{pour} \quad n=1,\,2,\,\ldots.$$

et

$$\int_{x_{n+1}-1}^{x_{n+1}}\mu(y)\,dy\leq\max\{\delta_n,\,\delta_{n+1}\}<\eta_n \qquad \text{pour} \quad n=1,\,2,\,\ldots.$$

Les dernières inégalités nous donnent

$$\int_{x_1}^{\infty}\mu(y)\,dy=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_n}^{x_{n+1}-1}\mu(y)\,dy+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_{n+1}-1}^{x_{n+1}}\mu(y)\,dy<2\sum_{1}^{\infty}\eta_n<\infty.$$

Posons

$$\tau(x)=\int_{x}^{\infty}\mu(y)\,dy.$$

$\tau(x)$ est une fonction décroissante, $\tau(x)\downarrow 0$ et l'on a $\tau'(x)=-\mu(x)$. De plus, pour $x_{n-1}\leq x\leq x_n$ on peut écrire

$$\tau(x)=\int_{x}^{\infty}\mu(y)\,dy>\int_{x_n}^{x_{n+1}-1}\mu(y)\,dy=\eta_n>\varepsilon(x). \tag{23}$$

Posons

$$\log p(x)=\int_{0}^{x_1}\varepsilon(y)\,dy+\int_{0}^{x}\tau(y)\,dy,$$

et définissons $p_n=p(\lambda_n)$. La suite $\{p_n\}$ ainsi définie satisfait aux conditions du lemme. En effet, on a $[\log p(x)]'=\tau(x)\downarrow 0$ pour $x\to\infty$, et $[\log p(x)]''=-\mu(x)<0$ et l'on en tire facilement que a est satisfaite. D'après (22) et ce qui précède, on obtient

$$\lim_{x=\infty}x\,[\log p(x)]''=-\lim_{x=\infty}x\,\mu(x)=0.$$

Donc, d'après la remarque faite à la fin du paragraphe 5 on conclut que b est aussi satisfaite. Enfin, en tenant compte de (23), on peut écrire

$$\log p_{n_k}=\log p(\lambda_{n_k})=\int_{0}^{x_1}\varepsilon(y)\,dy+\int_{0}^{\lambda_{n_k}}\tau(y)\,dy\geq\int_{0}^{\lambda_{n_k}}\varepsilon(y)\,dy\geq\lambda_{n_k}\varepsilon(\lambda_{n_k})$$
$$\geq\log\left(\frac{\lambda_{n_k}}{a_{n_k}}\right) \qquad \text{pour} \quad k=1,\,2,\,\ldots,$$

où la suite $\{n_k\}$ est celle dont il a été question dans la définition de $\varepsilon(x)$.

La dernière inégalité nous donne

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\,(p_n a_n)\geq\overline{\lim_{k=\infty}}\,(p_{n_k}a_{n_k})\geq\overline{\lim_{k=\infty}}\,\lambda_{n_k}=\infty.$$

Ainsi la condition c est aussi remplie et le lemme est démontré.

9. Lemme II. — *Soit* $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Il existe une suite* $\{q_n\}$ *appartenant à la classe* $Q\{\lambda_n\}$ *et une suite croissante d'entiers positifs* $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ *satisfaisant aux conditions suivantes :*

a. $q_n \geq |d_n|$ $(n=0, 1, \ldots)$.

b. $q_{n_k}=|d_{n_k}|$ *pour* $k=1, 2, \ldots$. *Si* $n_{k+1}-n_k \geq 2$, *n étant entier, tel que* $n_k < n < n_{k+1}$, *on a*

$$c. \qquad \log q_n \leq \frac{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_n}{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}} \log |d_{n_k}| + \frac{\lambda_n-\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}} \log |d_{n_{k+1}}|.$$

Démonstration. — Dans le cas où $\overline{\lim_{n=\infty}} |d_n| = \infty$, soit $C(x)$ la plus petite enveloppe concave non négative de points $P_n=(\lambda_n, \log|d_n|)$ $(n=0, 1, \ldots)$ et soit $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ la suite croissante d'entiers positifs correspondant aux sommets P_{n_k} de la ligne polygonale $y=C(x)$. Posons $\log q_n = C(\lambda_n)$. On voit aisément que les deux suites $\{q_n\}$ et $\{n_k\}$ ainsi définies satisfont aux conditions du lemme. Prenons maintenant le cas $\overline{\lim}|d_n| < \infty$. D'après le lemme I il existe une suite de nombres positifs $\{p_n\}$ appartenant à la classe $Q\{\lambda_n\}$ et possédant les propriétés *a*, *b* et *c* du lemme I, où $a_n=|d_n|$. Posons $b_n=p_n|d_n|$ pour $n=0, 1, \ldots$.

Soit $C(x)$ la petite enveloppe concave non négative de points

$$P_n=(\lambda_n, \log b_n) \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

et soit $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ la suite croissante d'entiers positifs correspondant aux sommets P_{n_k} de la ligne polygonale $y=C(x)$. Posons $q_n=\frac{e^{C(\lambda_n)}}{p_n}$.

Les deux suites $\{q_n\}$ et $\{n_k\}$ ainsi définies satisfont aux conditions du lemme. En effet, les deux suites $\{e^{C(\lambda_n)}\}$ et $\left\{\frac{1}{p_n}\right\}$ appartenant à la classe $Q\{\lambda_n\}$, la suite $\{q_n\}$ y appartient aussi. On a

$$q_n = \frac{e^{C(\lambda_n)}}{p_n} \geq \frac{b_n}{p_n} = |d_n|,$$

et donc la relation *a* est satisfaite. Pour $n=n_k$ on obtient

$$q_{n_k} = \frac{e^{C(\lambda_{n_k})}}{p_{n_k}} = \frac{b_{n_k}}{p_{n_k}} = |d_{n_k}|,$$

d'où l'on tire la relation *b*. Enfin, étant donnée la convexité de la suite $\log\frac{1}{p_n}$ considérée comme une fonction de λ_n (d'après la démonstration du lemme I), le caractère linéaire de $C(x)$ pour $\lambda_{n_k} \leq x \leq \lambda_{n_{k+1}}$ et la relation *b* du lemme déjà démontrée, on obtient la relation *c*. En particulier, on tire du lemme II les deux corollaires suivants :

Corollaire A. — *Chaque série de Dirichlet* (1) *possède des suites de coefficients principaux.*

En effet, d'après la définition B et d'après a et b du lemme II, on voit aisément que la suite des coefficients $\{d_{n_k}\}(k=1, 2, \ldots)$ qui satisfait à la condition b du lemme II est une suite de coefficients principaux.

COROLLAIRE B. — *Si dans la série de Dirichlet* (1) *on a* $\lim_{n=\infty} d_n = 0$, *il existe des suites majorantes* $\{q_n\}$, $q_n \geq |d_n|$, *appartenant à la classe* $Q\{\lambda_n\}$, *telles que* $\lim_{n=\infty} q_n = 0$.

En effet, d'après la condition c du lemme II, la suite $\{q_n\}$ qui satisfait aux conditions du lemme est une telle suite.

Dans les deux paragraphes qui suivent nous donnons quelques lemmes qui serviront dans la démonstration du théorème fondamental.

10. Soit $f(s)=\sum_{n}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ la série de Dirichlet (1) avec $\lambda_0 > 0$. Posons

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{\Gamma(\lambda_n+1)} e^{-\lambda_n s},$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma de Euler. On démontre aisément que $F(s)$ est une fonction entière satisfaisant pour chaque $\varepsilon > 0$ à l'inégalité

$$M(\sigma)=\overline{\underset{-\infty<t<\infty}{\text{borne}}}\,|F(\sigma+it)|=O(e^{e^{-\sigma}+\varepsilon\sigma}) \qquad (\sigma\to-\infty).$$

Soit τ_1 un nombre réel $-\infty < \tau_1 < +\infty$ et désignons par B_{τ_1} la courbe symétrique par rapport à l'axe positif, donnée par l'équation paramétrique $\sigma=\tau_1-\log\cos\theta$, $t=\theta$, pour $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$. Désignons par $\mathcal{D}_{\tau_1}$ le domaine simplement connexe, contenant l'axe positif et dont la frontière est B_{τ_1}. Remarquons que la transformation $w=e^s$, représente conformément et simplement le domaine $\mathcal{D}_{\tau_1}$ sur le demi-plan $\mathcal{R}(w)>e^{\tau_1}$. Les relations suivantes, (24) et (25) entre les deux fonctions $f(s)$ et $F(s)$, énoncées ici pour les séries de Dirichlet, sont bien connues (1). Pour $\sigma > 0$, on a

$$f(s)=f(\sigma+it)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} F(u-it)\,du. \tag{24}$$

Cette relation n'est autre que la transformation connue de Laplace, si l'on pose $z=e^{\sigma}$ et $x=e^{-u}$. On trouve aussi

$$F(s)=F(\sigma+it)=\frac{1}{2\pi i}\int_{B_{\tau_1}} e^{-\sigma+z} f(z-it)\,dz; \tag{25}$$

l'intégration dans (25) est prise dans le sens négatif et τ_1 est choisi de manière

(1) *Voir*, par exemple, V. BERNSTEIN, *Leçons sur les séries de Dirichlet* (Collection Borel), p. 294.

que la fonction $f_t(z)=f(z+it)$ soit holomorphe dans le domaine fermé $\bar{\omega}_{\gamma_1}$ (ce qui sera toujours le cas si $\gamma_1>0$). En utilisant (24) et (25), on obtient aisément le lemme suivant, qui n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus précis de M. G. Pólya (1).

LEMME III. — *Soient $f(s)$ et $F(s)$ les deux séries de Dirichlet définies plus haut. Si la fonction $f(s)$ est holomorphe sur le segment de l'axe imaginaire donné par $t_1\leq t\leq t_2$, il existe un nombre $\delta>0$ tel que l'on ait*

$$\max_{t_1\leq t\leq t_2}|F(\sigma+it)|=O(e^{e^{-\sigma-\delta}}) \quad \text{pour} \quad \sigma\downarrow-\infty. \tag{26}$$

Si, au contraire, (26) est satisfaite, la fonction $f(s)$ est holomorphe dans la bande $\sigma>-\delta$, $t_1<t<t_2$ et y est donnée par (24).

11. LEMME IV. — *Soit $\{q_n\}$ une suite appartenant à la classe $Q\{\lambda_n\}$. Posons $C_n=\frac{q_n}{\Gamma(\lambda_n+1)}$. $\log C_n$ est donc une fonction concave de λ_n pour n assez grand. Pour simplifier les choses, supposons que ceci est vrai pour tous les $n(n=0,1,\ldots)$. Posons comme dans le paragraphe 4 :*

$$m(\sigma)=\max_{0\leq n<\infty} C_n e^{-\lambda_n\sigma} \quad \text{pour} \quad -\infty<\sigma<\infty. \tag{12}$$

Soit $\{\sigma_n\}(n=0,1,\ldots)$ une suite de nombres réels telle que $m(\sigma_n)=C_n e^{-\lambda_n\sigma_n}$. (On voit aisément que $\sigma_n\downarrow-\infty$). Les inégalités suivantes sont alors satisfaites :

a. $\sigma_n=-\log\lambda_n+o(1)$ *pour* $n\to\infty$.

b. Pour chaque $\delta>0$, $\sigma\leq-\log\lambda_n-\delta$ *et* $n\geq n_0=n_0(\delta)$,

$$C_\nu e^{-\lambda_\nu\sigma}\geq C_{\nu-1}e^{-\lambda_{\nu-1}\sigma} \quad \text{pour} \quad \nu=1,2,\ldots,n.$$

c. Étant donné $\varepsilon>0$, *il existe* $\sigma_0=\sigma_0(\varepsilon)$ *tel que*

$$m(\sigma)\geq e^{e^{-\sigma-\varepsilon}} \quad \text{pour} \quad \sigma<\sigma_0.$$

Démonstration. — Pour démontrer *a* remarquons que, d'après la définition de la suite $\{\sigma_n\}$, on a

$$\frac{\log C_n-\log C_{n-1}}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}\leq\sigma_n\leq\frac{\log C_{n+1}-\log C_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}.$$

Or, d'après la définition de $\{C_n\}$, la définition A et les formules asymptotiques pour la dérivée de $\Gamma(x)$, on trouve

$$\frac{\log C_{n+1}-\log C_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}=\frac{\log q_{n+1}-\log q_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}-\frac{\log\Gamma(\lambda_{n+1}+1)-\log\Gamma(\lambda_n+1)}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}=-\log\lambda_n+o(1),$$

(1) G. PÓLYA, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* (*Math. Zeitsch.*, B. 29, 1929, p. 585).

d'où l'on tire la relation a. L'inégalité b est une conséquence immédiate de a. Pour chaque $-\infty < \sigma < -\log\lambda_0$ désignons par $n(\sigma)$ l'entier non négatif satisfaisant à $\lambda_{n(\sigma)} \leq e^{-\sigma} < \lambda_{n(\sigma)+1}$. En écrivant $m(\sigma) \geq C_{n(\sigma)} e^{-\lambda_{n(\sigma)}\sigma}$ et en tenant compte de la définition de $n(\sigma)$ et de la suite $\{C_n\}$, on arrive aisément à la dernière inégalité c.

Nous allons maintenant énoncer notre théorème fondamental. Ce théorème diffère du théorème I en ce qu'on remplace la suite majorante $\{q_n\}$ du théorème I, définie par $q_n = e^{C(\lambda_n)}$, $C(x)$ étant la plus petite enveloppe concave non négative de points $P_n = (\lambda_n, \log|d_n|)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, par les suites majorantes $\{q_n\}$ appartenant à la classe $Q\{\lambda_n\}$. Ce qui est important, en particulier, dans le cas où $\lim_{n=\infty} d_n = 0$. En effet, la suite majorante $\{q_n\}$ du théorème I satisfait dans ce cas, comme toujours, à la restriction $q_n \geq 1$. Tandis que, d'après le paragraphe 9, corollaire B, il existe alors des suites majorantes $\{q_n\}$ appartenant à la classe $Q\{\lambda_n\}$ avec $\lim q_n = 0$.

12. Théorème III (théorème fondamental). — *Soit $f(s)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$ contenant le demi-plan $\mathcal{R}(s) > 0$. Supposons que dans ce demi-plan $f(s)$ soit représentée par la série de Dirichlet* (1), $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$. *Posons* $f_n(s) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu e^{-\lambda_\nu s}$. *Supposons, enfin que les coefficients d_n soient majorés par une suite $\{q_n\}$ appartenant à la classe $Q\{\lambda_n\}$, $|d_n| \leq q_n$. Dans ces conditions on a, dans tout domaine fermé et borné $\bar{\Delta}$ contenu dans $\mathcal{D}$,*

$$(27) \qquad \max_{s\in\bar{\Delta}} \left| \frac{f(s) - f_n(s)}{q_n e^{-\lambda_n s}} \right| = O(1) \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

Démonstration. — Posons $g(x) = \max |\log q_n - \log q_m|$ pour $|\lambda_n - \lambda_m| \leq x$. D'après cette définition et la relation $\lim_{n=\infty} \frac{\log q_{n+1} - \log q_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0$, on voit aisément que $g(x)$ est une fonction croissante non négative satisfaisant aux deux conditions suivantes :

α. $\lim_{x=\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$.

β. $|\log q_n - \log q_m| \leq g(|\lambda_n - \lambda_m|)$.

Étant donné le lemme de Borel-Lebesgue, il suffit de démontrer la proposition suivante :

Chaque point $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \bar{\Delta}$ est le centre d'un carré $C(s_0, \delta_0)$: $\sigma - \sigma_0 \leq \delta_0$, $|t - t_0| \leq \delta_0$, $[\delta_0 = \delta_0(s_0) > 0]$, dans lequel $f(s)$ est holomorphe et satisfait à (27) *[où l'on remplace $\bar{\Delta}$ par $C(s_0, \delta_0)$]*.

Pour la démonstration de cette proposition, nous distinguons entre trois cas :

Cas A. — Soit $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \bar{\Delta}$ avec $\sigma_0 > 0$. Choisissons $0 < \delta_0 \leq \frac{\sigma_0}{2}$. D'après les hypothèses du théorème et d'après les propriétés de la fonction $g(x)$ définie plus haut, on a dans le carré $C(s_0, \delta_0)$,

$$\max_{s \in C(s_0, \delta_0)} \left| \frac{f(s) - f_n(s)}{q_n e^{-\lambda_n s}} \right| = \max_{s \in C(s_0, \delta_0)} \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{d_\nu}{q_n} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_n)s} \right| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{q_\nu}{q_n} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_n)\delta_0}$$

$$\leq \sum_{\nu=n-1}^{\infty} e^{g(\nu H) - g(n h) - (\lambda_\nu - \lambda_n)\delta_0} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{g(\nu H) - \nu h \delta_0} = K_1(\delta_0) < \infty,$$

où h et H sont les constantes positives dont il a été question dans (1) et $K_1(\delta_0)$ est une constante positive qui ne dépend pas de n.

Cas B. — Soit $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \bar{\Delta}$ avec $\sigma_0 < 0$. Choisissons $0 < \delta_0 \leq -\frac{\sigma_0}{2}$ assez petit pour que $f(s)$ soit holomorphe dans $C(s_0, \delta_0)$. Posons $M = \max |f(s)|$ pour $s \in C(s_0, \delta_0)$. On obtient

$$\max_{s \in C(s_0, \delta_0)} \left| \frac{f(s) - f_n(s)}{q_n e^{-\lambda_n s}} \right| = \max_{s \in C(s_0, \delta_0)} \left| \frac{f(s)}{q_n e^{-\lambda_n s}} - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{d_\nu}{q_n} e^{(\lambda_n - \lambda_\nu)s} \right| \tag{28}$$

$$\leq \frac{M}{q_n e^{\lambda_n \delta_0}} + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{q_\nu}{q_n} e^{-(\lambda_n - \lambda_\nu)\delta_0}.$$

Or, puisque $\lim \frac{\log q_n}{\lambda_n} = 0$, on a

$$\frac{M}{q_n e^{\lambda_n \delta_0}} \leq M_1(\delta_0), \tag{28'}$$

où $M_1(\delta_0)$ est une constante positive qui ne dépend pas de n.

D'après les propriétés de la fonction $g(x)$ définie plus haut

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{q_\nu}{q_n} e^{-(\lambda_n - \lambda_\nu)\delta_0} \leq \sum_{\nu=0}^{n} e^{g(\lambda_n - \lambda_\nu) - (\lambda_n - \lambda_\nu)\delta_0} < \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{g(\nu H) - \nu h \delta_0} = K_2(\delta_0) < \infty. \tag{28''}$$

(28), (28') et (28'') nous donnent le résultat cherché (27) pour $\bar{\Delta} = C(s_0, \delta_0)$.

Enfin, prenons le troisième cas, le plus difficile.

Cas C. — Soit $s_0 = it_0 \in \bar{\Delta}$. Sans diminuer la généralité, on peut supposer que $s_0 = 0$ et donc que $f(s)$ est régulière sur le segment de l'axe imaginaire $t \leq d$ où $d > 0$. Posons

$$F(s) = \sum_{0}^{\infty} \frac{d_n}{\Gamma(\lambda_n + 1)} e^{\lambda_n s}. \tag{29}$$

D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe 10, $F(s)$ est une fonction entière. De plus, la dernière hypothèse que nous avons faite sur $f(s)$ et le

lemme III nous permettent de conclure qu'il existe un nombre $\delta > 0$, tel qu'on ait

$$\max_{|t|\leq d} |F(\sigma+it)| = O(e^{e^{-\sigma-\delta}}) \quad \text{pour} \quad \sigma \to -\infty. \tag{30}$$

D'après le même lemme, $f(s)$ est holomorphe dans la bande $\sigma > -2\delta$, $|t| < d$ et y est représentée par l'intégrale

$$f(s) = f(\sigma+it) = \int_{-\infty}^{\sigma} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} F(u+it)\, du. \tag{24}$$

Posons

$$C_n = \frac{q_n}{\Gamma(\lambda_n+1)} \quad \text{et} \quad m(\sigma) = \max_{0\leq n<\infty} C_n e^{-\lambda_n\sigma}.$$

D'après la définition A, $\log C_n$ est une fonction concave de λ_n pour n assez grand. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que ceci soit vrai, pour tous les n, $n \geq 0$.

Soit $\sigma_n (n = 0, 1, \ldots)$ une suite décroissante $\sigma_n \downarrow -\infty$ telle que l'on ait $m(\sigma_n) = C_n e^{-\lambda_n\sigma_n}$ et soit $\varepsilon > 0$ un nombre positif quelconque. D'après le lemme IV, on a

$$\begin{cases} m(\sigma) \geq e^{e^{\sigma-\varepsilon}} & \text{pour} \quad \sigma \leq \sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon), \\ \sigma_n = -\log\lambda_n + o(1) & \text{pour} \quad n \to \infty. \end{cases} \tag{31}$$

Dans le théorème II posons

$$f(s) (=) F(s), \qquad d_n (=) \frac{d_n}{\Gamma(\lambda_n+1)}; \qquad C_n (=) C_n, \qquad n_k (=) n, \qquad \sigma_k (=) \sigma_n.$$
$$\delta (=) \delta \quad \text{et} \quad d (=) d.$$

On voit aisément que les conditions du théorème II sont satisfaites pour la fonction $F(s)$. En particulier la condition (13) est satisfaite. Car, si nous choisissons dans la première inégalité (31), $0 < \varepsilon < \delta$, nous obtenons, compte tenu de cette inégalité et de (30),

$$\max_{\substack{\sigma'-\delta\leq\sigma\leq\sigma' \\ -d\leq t\leq d}} |F(\sigma+it)| \leq e^{e^{\sigma'-\delta}} < m(\sigma') \quad \text{pour} \quad \sigma' \leq \sigma'_0. \tag{31'}$$

Soient d' et δ' deux nombres positifs tels que $0 < d' < d$, $0 < \delta' < \min(\delta, d)$. Posons

$$F_n(s) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{d_\nu}{\Gamma(\lambda_\nu+1)} e^{-t\nu s}.$$

D'après le théorème II et la seconde inégalité (31), on a, dans la demi-bande $\sigma \geq -\log\lambda_n - \delta'$, $|t| \leq d'$,

$$|F(\sigma+it) - F_n(\sigma+it)| \leq kC_n e^{\lambda_n\sigma} \quad (n = 0, 1, \ldots); \tag{32}$$

Posons

$$\delta_0 = \min\left\{\frac{\delta'}{2}, \frac{\delta'^2}{4}, \log\frac{1+\frac{\delta'}{2}}{1+\frac{\delta'}{3}}, \frac{e^{\delta'}}{2}(e^{-\delta}-e^{-2\delta})\right\}. \tag{33}$$

(24) nous permet d'écrire, pour $s=\sigma+it$ appartenant au carré $C(o,\delta_0)$: $|\sigma_0|\leq\delta_0$, $|t|\leq\delta_0$,

$$\begin{aligned} f(s)-f_n(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u}[F(u+it)-F_n(u+it)]\,du \\ &= \int_{-\log\lambda_n-\delta'}^{\infty} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u}[F(u+it)-F_n(u+it)]\,du \\ &\quad + \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n-\delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u}[F(u+it)-F_n(u+it)]\,du = I_n(s)+J_n(s). \end{aligned} \tag{34}$$

D'après (32) et la définition de $\{C_n\}$, on trouve

$$\begin{aligned} |I_n(s)| &\leq KC_n\int_{-\log\lambda_n-\delta'}^{\infty} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} e^{-\lambda_n u}\,du < KC_n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} e^{-\lambda_n u}\,du \\ &= KC_n e^{-\lambda_n\sigma}\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\lambda_n}\,dx = KC_n\Gamma(\lambda_n+1)e^{-\lambda_n\sigma} = Kq_n e^{-\lambda_n\sigma}, \end{aligned} \tag{35}$$

où K est la constante positive introduite dans (32).

Pour $J_n(s)$ on obtient

$$\begin{aligned} J_n(s) &= \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n-\delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u}F(u+it)\,du \\ &\quad - \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n-\delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u}F_n(u+it)\,du = J_n^*(s)-J_n^{**}(s). \end{aligned} \tag{36}$$

(30) et (33) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} |J_n^*(s)| &= \left|\int_{-\infty}^{-\log\lambda_n-\delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u}F(u+it)\,du\right| \\ &\leq A_1\int_{-\infty}^{-\log\lambda_n-\delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} e^{\sigma-u-2\delta}\,du \\ &= A_1 e^{\sigma}\int_{\lambda_n e^{\delta'}}^{\infty} e^{-x(e^{\sigma}-e^{-2\delta})}\,dx \\ &\leq A_1 e^{\delta}\int_{\lambda_n e^{\delta'}}^{\infty} e^{-x(e^{-\delta}-e^{-2\delta})}\,dx \leq A_2 e^{-2\delta_0\lambda_n} = o(q_n e^{-\lambda_n\sigma}), \end{aligned} \tag{36'}$$

uniformément par rapport à $s\in C(o,\delta_0)$. (A_1 et A_2 sont deux constantes positives qui ne dépendent que de δ_0).

En tenant compte du lemme IV, conséquence b, on obtient pour n assez grand

$$(36') \qquad |J_n^{**}(s)| = \left| \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n - \delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} F_n(u+it)\, du \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n - \delta'} \left(e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu e^{-\lambda_\nu u} \right) du$$

$$\leq (n+1) C_n \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n - \delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} e^{-\lambda_n u}\, du.$$

Pour la dernière intégrale, on a

$$(36'') \qquad \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n - \delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} e^{-\lambda_n u}\, du = e^{(\lambda_n+1)\delta'} \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n} e^{-e^{\delta'} e^{\sigma-u}} e^{\sigma-(\lambda_n+1)u}\, du$$

$$= e^{(\lambda_n+1)\delta'} \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n} e^{-(e^{\delta'}-1)e^{\sigma-u}} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-(\lambda_n+1)u}\, du$$

$$< e^{\delta'} e^{-[(e^{\delta'}-1)e^{\sigma}-\delta']\lambda_n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-(\lambda_n+1)u}\, du$$

$$= e^{\delta'} e^{-[(e^{\delta'}-1)e^{\sigma}-\delta']\lambda_n} \Gamma(\lambda_n+1).$$

Or, pour $s \in C(o, \hat{\delta}_0)$, on a d'après (33) $e^{\sigma} \geq \dfrac{1+\dfrac{\delta'}{3}}{1+\dfrac{\delta'}{2}}$, et donc

$$(e^{\delta'}-1)e^{\sigma} - \delta' > \left(\delta' + \frac{\delta'^2}{2}\right) e^{\sigma} - \delta' \geq \frac{\delta'^2}{3}.$$

La dernière inégalité, (36‴), (36″), (33), la relation $n = O(\lambda_n)$ et la définition de $\{C_n\}$, nous donnent

$$(36''') \qquad J_n^{**}(s) = O\left(\lambda_n q_n e^{-\lambda_n \frac{\delta'^2}{3}}\right) = o(q_n e^{-\lambda_n \sigma}),$$

uniformément par rapport à $s \in C(o, \hat{\delta}_0)$.

De (36), (36′) et (36‴), on tire

$$(37) \qquad J_n(s) = o(q_n e^{-\lambda_n \sigma}) \qquad \text{pour} \quad n \to \infty,$$

uniformément par rapport à $s \in C(o, \delta_0)$.

(34), (35) et (37) nous donnent le résultat cherché (27) pour $\overline{\Delta} = C(o, \hat{\delta}_0)$. Ce qui démontre le dernier cas et achève la démonstration du théorème.

CHAPITRE II.

SUR LE THÉORÈME DE FATOU-PÓLYA. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE FABRY-PÓLYA. GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE Mlle CARTWRIGHT. CRITÈRE GÉNÉRAL POUR QUE $s = o$ SOIT UN POINT SINGULIER POUR LA SÉRIE (1).

1. Soit $f(s) = \sum_0^\infty d_n e^{-\lambda_n s}$ une série de Dirichlet (1) pour laquelle l'axe imagi-

naire n'est pas une coupure. Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe où $f(s)$ est holomorphe et qui contient le demi-plan $\mathcal{R}(s) > 0$ et tous les points réguliers de $f(s)$ sur l'axe imaginaire. Désignons par T le domaine composé de deux demi-plans $\mathcal{R}(s) > 0$ et $\mathcal{R}(s) < 0$ et tous les points réguliers de $f(s)$ sur l'axe imaginaire. Soit $\{n_k\}$ $(k = 1, \ldots)$ une suite croissante d'indices principaux de $f(s)$ (Déf. B, § 6, Chap. I). Posons

$$g_{n_k}(s) = \frac{f(s) - f_{n_k}(s)}{d_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} s}} \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{38}$$

D'après le théorème fondamental et la définition B, les fonctions $g_{n_k}(s)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ sont holomorphes et bornées dans leur ensemble dans tout domaine fermé $\bar{\Delta}$ contenu dans $\mathcal{D}$. La famille $\{g_{n_k}(s)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ est donc normale dans $\mathcal{D}$. On peut énoncer le théorème suivant :

Théorème IV. — *Chaque fonction $g(s)$, limite d'une suite partielle de fonctions de la famille, $g_{\bar{n}_k}(s) \to g(s)$ pour $k \to \infty$ $s \in \mathcal{D}$, ($\{\bar{n}_k\}$ étant une suite partielle de $\{n_k\}$), possède les propriétés suivantes :*

a. $g(s)$ est une fonction holomorphe et uniforme dans le domaine T et y possède les développements

$$\begin{cases} g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s} & \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) > 0, \\ g(s) = -1 - \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} e^{\mu_{-m} s} & \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) < 0; \end{cases} \tag{39}$$

où $|a_m| \leq C$ pour $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, C étant une constante positive qui ne dépend que de la suite $\{n_k\}$ et où $\{\mu_m\}$ et $\{\mu_{-m}\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ sont deux suites croissantes de nombres positifs satisfaisant aux inégalités $h \leq \mu_{-1} \leq H$, $h \leq \mu_{m+1} - \mu_m \leq H$ et $h \leq \mu_{-m-1} - \mu_{-m} \leq H$ pour $m = 1, 2, \ldots$; h et H sont les deux constantes positives introduites dans (1). *De plus, on peut extraire de la suite $\{\bar{n}_k\}$ une suite partielle $\{n'_k\}$ pour laquelle on ait*

$$\lim_{k=\infty} (\lambda_{n'_k+m} - \lambda_{n'_k}) = \mu_m \quad \text{et} \quad \lim_{k=\infty} (\lambda_{n'_k} - \lambda_{n'_k-m}) = \mu_{-m} \quad \text{pour } m = 1, 2, \ldots; \tag{40}$$

$$\lim_{k=\infty} \frac{d_{n'_k+m}}{d_{n'_k}} = a_m \quad \text{et} \quad \lim_{k=\infty} \frac{d_{n'_k-m}}{d_{n'_k}} = a_{-m} \quad \text{pour } m = 1, 2, \ldots. \tag{40'}$$

b. La fonction $g(s)$ possède des points singuliers sur l'axe imaginaire qui sont tous, d'après a, des points singuliers de $f(s)$.

Démonstration. — Soit $\{q_n\}$ la suite majorante appartenant à la classe $Q\{\lambda_n\}$ qui nous a servi dans la définition de la suite d'indices principaux $\{n_k\}$ (Déf. B). C'est-à-dire que l'on a $|d_n| < q_n$ et $q_{n_k} \leq C|d_{n_k}|$ pour $k = 1, 2, \ldots$, où $1 \leq C < \infty$. Posons $\log G(x) = \max \log q_n - \log q_m$ pour $|\lambda_n - \lambda_m| \leq x$. $G(x)$ est une

fonction croissante qui satisfait $\left(\text{d'après } \lim_{n=\infty} \frac{q_n}{q_{n+1}} = 1\right)$ à $\lim_{x=\infty} \frac{\log G(x)}{x} = 0$. On trouve facilement les relations suivantes :

$$\left|\frac{d_{n_k \pm m}}{d_{n_k}}\right| \leq CG(|\lambda_{n_k \pm m} - \lambda_{n_k}|), \tag{41}$$

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \left|\frac{d_{n_k \pm m}}{d_{n_k}}\right| \leq \lim_{k=\infty} C \frac{q_{n_k \pm m}}{q_{n_k}} = C, \tag{41'}$$

$$mh \leq |\lambda_{n_k \pm m} - \lambda_{n_k}| \leq mH \quad \text{pour} \quad k, m = 1, 2, \ldots; \tag{41''}$$

où $0 < h < H < \infty$. Les relations (41), (41') et (41'') nous permettent de démontrer aisément qu'on peut extraire, de la suite $\{\bar{n}_k\}$, qui est une suite partielle de $\{n_k\}$ (par un procédé diagonal), une suite partielle $\{n'_k\}$ pour laquelle les limites (40) et (40') existent.

Définissons les suites $\{\mu_m\}$, $\{\mu_{-m}\}$, $\{a_m\}$ et $\{a_{-m}\}$ par les limites (40) et (40'). On voit aisément, d'après (41') et (41''), que les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\left.\begin{array}{l} h \leq \mu_{\pm 1} \leq H, \quad h \leq \mu_{m+1} - \mu_m \leq H, \\ h \leq \mu_{-m-1} - \mu_{-m} \leq H \quad \text{et} \quad |a_{\pm m}| \leq C, \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots. \end{array}\right\} \tag{42}$$

Posons

$$\left\{\begin{array}{ll} g^+(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s} & \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) > 0, \\ g^-(s) = -1 - \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} e^{\mu_{-m} s} & \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) < 0. \end{array}\right. \tag{43}$$

D'après les inégalités précédentes, les séries $g^+(s)$ et $g^-(s)$ convergent pour $\mathcal{R}(s) > 0$ et $\mathcal{R}(s) < 0$ respectivement. Pour démontrer a et b il suffit, donc de prouver

$$g(s) = g^+(s) \quad \text{pour } \mathcal{R}(s) > 0 \qquad \text{et} \qquad g(s) = g^-(s) \quad \text{pour } s \in \mathcal{D},\ \mathcal{R}(s) < 0.$$

Or, dans tout domaine fermé et borné $\bar{\Delta}$ contenu dans $\mathcal{D}$, on a uniformément

$$g_{n'_k}(s) = \frac{f(s) - f_{n'_k}(s)}{d_{n'_k} e^{-\lambda_{n'_k} s}} \to g(s). \tag{44}$$

En tenant compte des premières égalités (40), (40'), (41) et (44), on démontre aisément que, pour $\mathcal{R}(s) > 0$,

$$g(s) = \lim_{k=\infty} g_{n'_k}(s) = \lim_{k=\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_{n'_k+m}}{d_{n'_k}} e^{-(\lambda_{n'_k+m} - \lambda_{n'_k})s} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s} = g^+(s).$$

Soit maintenant $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \mathcal{D}$, avec $\sigma_0 < 0$. Il est évident que

$$\lim_{k=\infty} \frac{f(s_0)}{d_{n'_k} e^{-\lambda_{n'_k} s_0}} = 0.$$

Mais, la dernière relation, (44) (41) et (40′) nous donnent le résultat cherché

$$g(s_0) = \lim_{k=\infty} g_{n_k'}(s_0) = -\lim_{k=\infty} \frac{f_{n_k'}(s_0)}{d_{n_k'}\, e^{-\lambda_{n_k'} s_0}} = -\lim_{k=\infty} \sum_{m=0}^{n_k'} \frac{d_{n_k'-m}}{d_{n_k'}} e^{(\lambda_{n_k'} - \lambda_{n_k'-m}) s_0}$$

$$= -1 - \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}\, e^{\mu_{-m} s_0} = g^-(s_0).$$

Ceci achève la démonstration de *a* et de *b*.

Démontrons *c* par l'impossible. Supposons que l'une des séries (39) soit holomorphe sur l'axe imaginaire. On conclut, d'après cette hypothèse et d'après (39), que $g(s)$ est une fonction entière bornée dans tout le plan. $g(s)$ est donc une constante. Mais de (39) nous tirons $\lim g(\sigma) = 0$ pour $\sigma \to \infty$ et $\lim g(\sigma) = -1$ pour $\sigma \to -\infty$. Ce qui nous mène à une contradiction et le théorème se trouve complètement établi.

2. Lemme V. — *Soit $f(s)$ une fonction holomorphe dans le domaine $\mathcal{D}$ composé de deux demi-plans $\mathcal{R}(s) > 0$ et $\mathcal{R}(s) < 0$ et le segment de l'axe imaginaire $|t| < d$, $d > 0$. Supposons que $f(s)$ possède les développements suivants :*

$$(45) \qquad \begin{cases} f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s} & \text{pour } \mathcal{R}(s) > 0, \\ f(s) = -\sum_{m=0}^{\infty} a_{-m} e^{-\lambda_{-m} s} & \text{pour } \mathcal{R}(s) < 0, \end{cases}$$

où $\lambda_1 \geq 2h > 0$, $\lambda_{m+1} - \lambda_m \geq 2h$ pour $m = 1, 2, \ldots$, $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_{-m-1} - \lambda_{-m} \geq 2h$ pour $m = 0, 1, \ldots$, et $|a_{\pm m}| \leq C$ pour $m = 0, 1, \ldots$, C étant une constante positive. Dans ce cas, on a, pour $s = \sigma + it$ tel que $|t| \leq d$, $s \neq \pm id$, l'inégalité suivante :

$$(46) \qquad |f(s)| \leq \frac{C}{|[1 - e^{\lambda_1 s - id\lambda_1}][1 - e^{\lambda_1 s + id\lambda_1}]|}.$$

Pour démontrer ce lemme on considère les fonctions

$$F_\varepsilon(s) = f(s)[1 - e^{\lambda_1 s - id\lambda_1 + i\varepsilon}][1 - e^{\lambda_1 s + id\lambda_1 - i\varepsilon}].$$

Or, on démontre aisément que $|F_\varepsilon(s)| \leq C$ sur les deux droites $t = \pm(d - \varepsilon)$ et que $F_\varepsilon(s)| \leq C + o(1)$ sur les deux droites $\sigma = \pm N$ $(0 < N \to \infty)$. En appliquant le théorème du maximum sur la fonction $F_\varepsilon(s)$ dans le rectangle $\sigma < N$, $t < d - \varepsilon$ et en faisant tendre N vers l'infini et ε vers zéro, on trouve précisément l'inégalité énoncée dans le lemme.

Nous nous servirons du dernier lemme pour ajouter une précision dans certains cas au théorème IV.

3. Théorème IV *bis*. — *Supposons que les conditions du théorème* IV *soient satisfaites. La fonction $f(s)$ est donnée par la série* (1) *et la fonction $g(s)$ possède les*

développements (39). *Soit $s_0 = i\tau_0$ un point singulier de $f(s)$, isolé sur l'axe imaginaire.* [C'est-à-dire qu'il existe un segment de l'axe imaginaire : $\tau_0 - 2\delta \leq t \leq \tau_0 + 2\delta$, $\delta > 0$, dont tous les points sauf le point $s_0 = i\tau_0$ sont des points réguliers de $f(s)$]. *Si $s = s_0$ est aussi un point singulier de $g(s)$, on peut affirmer : Ce point est un pôle simple pour $g(s)$.*

Pour démontrer ce théorème, remarquons que, d'après le théorème IV, s_0 est un point isolé singulier non critique de $g(s)$. Or, en appliquant le lemme V, sur les deux fonctions $g(s + i[\tau_0 + \delta])$ et $g(s + i[\tau_0 - \delta])$, on obtient, dans le voisinage de s_0 :

$$g(s) = O\left(\frac{1}{\left|1 - e^{-\frac{h}{2}(s - i\tau_0)}\right|}\right) = O\left(\frac{1}{|s - s_0|}\right).$$

On tire immédiatement de la dernière inégalité le théorème énoncé : s_0 ne peut être qu'un pôle simple pour $g(s)$.

4. Soit $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ la série de Dirichlet (1). D'après le théorème connu de Fatou-Pólya, [généralisé pour les séries de Dirichlet générales par M. A. Dvoretzky (1)], il existe une suite $\{\varepsilon_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $\varepsilon_n = \pm 1$, telle que la série $f^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n d_n e^{-\lambda_n s}$ possède l'axe imaginaire comme coupure. La démonstration élégante de M. G. Pólya est une *démonstration d'existence* seulement, tandis que les autres démonstrations employées sont basées sur le critère de Hadamard-Ostrowski et fournissent un procédé assez compliqué pour la détermination de la suite $\{\varepsilon_n\}$. Le théorème suivant propose une méthode beaucoup plus simple pour la détermination de cette suite.

Théorème V. — *Soit $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ la série de Dirichlet* (1). *Soit $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ une suite croissante d'indices principaux de $f(s)$* (Déf. B), *telle que $\lim_{k=\infty}(n_{k+1} - n_k) = \infty$. Posons*

$$f^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^* e^{-\lambda_n s}, \tag{47}$$

où $d_n^* = d_n$ pour $n \neq n_k$, $d_n^* = -d_n$ pour $n = n_k$. Dans ce cas l'axe imaginaire est une coupure pour au moins une de ces deux séries.

Démonstration. — Supposons, par impossible, que les deux séries $f(s)$ et $f^*(s)$ soient prolongeables à l'extérieur du demi-plan $\mathcal{R}(s) > \alpha$. Désignons

(1) A. Dvoretzky, *Studies on general Dirichlet series*, Jérusalem, 1941 (Thèse de doctorat. Résumé en hébreu et en anglais).

par T le domaine composé des deux demi-plans $\mathcal{R}(s) > 0$, $\mathcal{R}(s) < 0$ et de tous les points réguliers de $f(s)$ sur l'axe imaginaire. Désignons par T* le domaine analogue pour $f^*(s)$. Posons

$$g_{n_k}(s) = \frac{f(s) - f_{n_k}(s)}{d_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} s}} \qquad \text{et} \qquad g^*_{n_k}(s) = \frac{f^*(s) - f^*_{n_k}(s)}{d^*_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} s}},$$

où

$$f_n(s) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu e^{-\lambda_\nu s} \qquad \text{et} \qquad f^*(s) = \sum_{\nu=0}^{n} d^*_\nu e^{-\lambda_\nu s}.$$

Appliquons d'abord le théorème IV à la famille $\{g_{n_k}(s)\}$. Soit $\{n'_k\}$ une suite partielle de $\{n_k\}$ pour laquelle on a $\lim_{k=\infty} g_{n'_k}(s) = g(s)$ pour $\mathcal{R}(s) > 0$, et pour laquelle les relations (4o) et (4o') sont satisfaites. D'après le théorème IV, la fonction $g(s)$ est holomorphe et uniforme dans le domaine T et y possède les développements

$$(39) \qquad \begin{cases} g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s} & \text{pour } \mathcal{R}(s) > 0, \\ g(s) = -1 - \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} e^{\mu_{-m} s} & \text{pour } \mathcal{R}(s) < 0; \end{cases}$$

où $|a_m| + |a_{-m}| = O(1)$, $h \leq \mu_{\pm 1} \leq H$, $h \leq \mu_{m-1} - \mu_m \leq H$ et $h \leq \mu_{-m-1} - \mu_{-m} \leq H$. D'après (4o) et (4o') et la définition de la suite $\{d^*_n\}$, on obtient pour $\mathcal{R}(s) > 0$

$$\lim_{k=\infty} g^*_{n'_k}(s) = g^*(s).$$

Si l'on applique maintenant le théorème IV à la famille $\{g^*_{n_k}(s)\}$, on trouve que $g^*(s)$ est une fonction holomorphe et uniforme dans le domaine T* et y possède les développements

$$(39^*) \qquad \begin{cases} g^*(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a^*_m e^{-\mu_m s} & \text{pour } \mathcal{R}(s) > 0, \\ g^*(s) = -1 - \sum_{m=1}^{\infty} a^*_{-m} e^{\mu_{-m} s} & \text{pour } \mathcal{R}(s) < 0. \end{cases}$$

Or, d'après la définition de la suite $\{d^*_n\}$ et d'après (4o') [où l'on pose $d_n (=) d^*_n$ et $a_n (=) a^*_n$], on obtient

$$a^*_{\pm m} = \lim_{k=\infty} \frac{d^*_{n'_k \pm m}}{d^*_{n'_k}} = -\lim_{k=\infty} \frac{d_{n'_k \pm m}}{d_{n'_k}} = -a_{\pm m} \qquad \text{pour } m = 1, 2, \ldots.$$

La dernière inégalité et les développements (39) et (39*) pour $\mathcal{R}(s) > 0$ nous donnent $g(s) \equiv -g^*(s)$. Mais, d'après les développements (39) et (39*) pour $\mathcal{R}(s) < 0$, on trouve

$$\lim_{\sigma=-\infty} g^*(\sigma) = \lim_{\sigma=-\infty} g(\sigma) = -1.$$

Ce qui nous mène à une contradiction et démontre le théorème :

5. D'après un théorème connu de Fabry-Pólya sur les séries de Dirichlet lacunaires (dans sa forme faible), on sait que si la série de Dirichlet $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ (1) est telle que l'on ait $d_n=0$, sauf pour une suite croissante d'entiers non négatifs $\{n_k\}$, avec $\lim_{k=\infty}(n_{k+1}-n_k)=\infty$, la fonction $f(s)$ possède l'axe imaginaire comme coupure. Nous allons généraliser ce théorème en montrant qu'on obtient le même résultat lorsqu'il n'existe qu'une suite infinie de lacunes dont la longueur tend vers l'infini, à condition toutefois que ces lacunes soient bordées d'un côté par des coefficients principaux (Déf. B). De plus, nous remplaçons la condition sur les lacunes par une condition plus générale. Nous commençons par une forme restreinte du théorème. Une forme plus générale sera donnée ultérieurement.

THÉORÈME VI. — *Soit* $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Soit* $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ *une suite croissante d'indices principaux telle que* $\lim_{k=\infty}(n_{k+1}-n_k)=\infty$ *et pour laquelle l'une des deux conditions suivantes est remplie :*

$$(48)\qquad \overline{\lim_{k=\infty}}\left|\frac{d_{n_k+m}}{d_{n_k}}\right|\leq e^{-\delta m} \text{ pour } m\geq m_0, \qquad \overline{\lim_{k=\infty}}\left|\frac{d_{n_k-m}}{d_{n_k}}\right|\leq e^{-\delta m} \text{ pour } m\geq m_0,$$

où $\delta>0$. *Dans ces conditions, l'axe imaginaire est une coupure pour* $f(s)$.

Démonstration. — Supposons, par impossible, que $f(s)$ soit prolongeable à l'extérieur du demi-plan $\mathcal{R}(s)>0$ et que la première condition (48), par exemple, soit satisfaite. Posons $g_{n_k}(s)=\dfrac{f(s)-f_{n_k}(s)}{d_{n_k}e^{-\lambda_{n_k}s}}$ où, comme toujours, $f_n(s)=\sum_{0}^{n} d_\nu e^{-\lambda_\nu s}$ et appliquons le théorème IV à la famille de fonctions $\{g_{n_k}(s)\}$ qui est normale dans chaque domaine simplement connexe $\mathcal{D}$ contenant le demi-plan $\mathcal{R}(s)>0$, et où $f(s)$ est holomorphe. Soit $\{n'_k\}$ une suite partielle de $\{n_k\}$ telle que l'on ait $\lim_{k=\infty} g_{n'_k}(s)=g(s)$ pour $s\in\mathcal{D}$ et telle que les relations (40) et (40′) soient vérifiées. D'après le théorème (IV), $g(s)$ est holomorphe dans le demi-plan $\mathcal{R}(s)>0$ et y possède le développement

$$(49)\qquad g(s)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s},$$

où

$$\mu_m=\lim_{k=\infty}(\lambda_{n'_k+m}-\lambda_{n'_k}) \qquad \text{et} \qquad a_m=\lim_{k=\infty}\frac{d_{n'_k+m}}{d_{n'_k}}.$$

De plus, d'après le même théorème, l'abscisse de convergence de $g(s)$ est égale à zéro, et donc

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \frac{\log|a_m|}{\mu_m} = 0.$$

Mais, d'après les relations données plus haut pour μ_m et a_m et d'après la première condition (48), on trouve $\mu_m \leq mH$ et $|a_m| \leq e^{-\delta m}$ pour $m \geq m_0$, où H est la constante positive dont il a été question dans (1). Les dernières inégalités nous donnent

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \frac{\log|a_m|}{\mu_m} \leq -\frac{\delta}{H} < 0.$$

Ce qui nous mène à une contradiction et démontre le théorème.

Nous allons généraliser le dernier théorème en remplaçant les conditions (48) par des conditions plus générales. Mais énonçons d'abord quelques lemmes et un théorème dont nous nous servirons dans la démonstration du théorème plus général.

6. Le lemme suivant est dû à M. N. Levinson (1).

LEMME VI. — *Soit* $F(z)$ *une fonction entière qui satisfait aux conditions suivantes :*

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\log M(R)}{R} \leq k < \infty, \qquad \text{où} \quad M(R) = \max_{|z|=R} |F(z)|; \tag{50}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+|F(x)|}{1+x^2}\,dx < \infty. \tag{50'}$$

Soit $\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *une suite croissante de nombres positifs telle que l'on ait*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{n}{\lambda_n} = D. \tag{51}$$

Supposons que les inégalités suivantes soient vérifiées

$$\pi D > k, \tag{52}$$

$$F(\lambda_n) = O(e^{-\theta(\lambda_n)}) \qquad (n \to \infty), \tag{53}$$

où $\theta(x)$ est une fonction croissante telle que

$$\int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^2}\,dx = \infty. \tag{53'}$$

Alors la fonction $F(z)$ est identiquement nulle.

LEMME VII. — *Soit* $\{\lambda_n\}$ $(n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ *une suite croissante de nombres réels, telle que* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$ et $|\lambda_n - n| \leq \alpha < \infty$ *pour* $-\infty < n < \infty$.

(1) N. LEVINSON, *Gap and density theorems* (*Amer. Math. Soc. Publ.*, vol. XXVI, 1940, p. 19).

Posons

$$G(z)=(z-\lambda_0)\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)\left(1-\frac{z}{\lambda_{-n}}\right). \tag{54}$$

$G(z)$ *est donc une fonction entière qui satisfait aux deux inégalités suivantes :*

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{\log|G(re^{i\varphi})|}{r}\leq\pi|\sin\varphi|, \tag{55}$$

$$|G'(x)|\leq C(|x|+1)^{1x} \qquad \text{pour} \quad -\infty<x<\infty. \tag{55'}$$

C *étant une constante positive.*

Pour démontrer (55) et (55′) nous nous servirons d'un autre résultat dû aussi à M. N. Levinson (¹), qui a démontré que dans les conditions du lemme, on a

$$|G(z)|=|G(x+iy)|<C_1(|z|+1)^{1x}e^{\pi|y|}, \tag{56}$$

où C_1 est une constante.

Or, l'inégalité (55) est une conséquence immédiate de (56). Si l'on tient compte de l'inégalité de Cauchy, on peut écrire pour $-\infty<x<\infty$: $|G'(x)|\leq\max_{0\leq\varphi\leq 2\pi}|G(x+e^{i\varphi})|$. On tire aisément de cette inégalité et de (56) la relation énoncée (55′).

7. Théorème VII. — *Soit $f(s)$ une fonction holomorphe dans un domaine T_0 composé de deux demi-plans $\mathcal{R}(s)>0$, $\mathcal{R}(s)<0$ et du segment de l'axe imaginaire $|t-t_0|<d$ où $-\infty<t<\infty$, $d>0$.*

Supposons que $f(s)$ possède les développements suivants :

$$\begin{cases} f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n s} & \text{pour} \quad \mathcal{R}(s)>0, \\ f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{-n}e^{\lambda_{-n}s} & \text{pour} \quad \mathcal{R}(s)<0; \end{cases} \tag{57}$$

où $\lambda_1\geq h>0$, $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geq h$, $(n=1,2,\ldots)$; $\lambda_0\geq 0$, $\lambda_{-n-1}-\lambda_{-n}\geq h$, $(n=0,1,\ldots)$; les a_n vérifient les relations

$$|a_{-n}|\leq C \quad \text{pour } n=0,1,\ldots, \qquad |a_n|\leq e^{-\theta(\lambda_n)} \quad \text{pour } n=1,2,\ldots, \tag{58}$$

C *étant une constante positive et $\theta(x)$ étant une fonction croissante telle que*

$$\int_1^{\infty}\frac{\theta(x)}{x^2}dx=\infty.$$

Dans ces conditions $f(s)$ est identiquement nulle (et donc $a_n=0$ pour $-\infty<n<\infty$).

(¹) *Loc. cit.*, p. 56.

Remarquons que dans le cas où les λ_n sont des entiers, le théorème est un cas particulier d'un théorème plus général démontré par M^lle M. L. Cartwright (¹).

Démonstration. — Sans restreindre la généralité, on peut supposer que l'on ait $t_0 = 0$ et

$$|\lambda_{\pm n} - n| < 1 \qquad \text{pour} \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{59}$$

Car on peut toujours se ramener à ce cas en ajoutant dans (57) des termes $a_n e^{-\lambda_n s}$ avec $a_n = 0$ et en faisant un changement de variable $s = cs' + it_0$, $c > 0$.

Avec V. Bernstein (²), faisons correspondre à $f(s)$ la fonction $J^+(z)$ définie par

$$J^+(z) = \int_a^b f(s)\, e^{sz}\, ds + \int_b^{\infty[\arg(s-b)=\alpha]} f(s)\, e^{sz}\, ds = J_1^+(z) + J_0^+(z), \tag{60}$$

où $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, a et b sont deux nombres réels tels que l'on ait $a \leq b$, $-b < d|\operatorname{cotg}\alpha|$. Il est évident que la première intégrale $J_1^+(z)$ définit une fonction entière de z. Pour la seconde intégrale de (60), $J_0^+(z)$, posons $z = \rho e^{i\varphi}$, $s = b + ue^{i\alpha}$. On voit aisément, d'après les hypothèses faites sur les nombres a et b, que la partie du rayon d'intégration $s = b + ue^{i\alpha}$, $0 \leq u < \infty$ qui se trouve dans le demi-plan $\mathcal{R}(s) \leq 0$ est toute entière contenue dans la bande $|t| \leq d$. Pour s variant sur le rayon considéré plus haut, on a

$$|e^{sz}| = e^{\rho b \cos\varphi}\, e^{u\rho\cos(\alpha+\varphi)}. \tag{61}$$

On tire aisément de cette égalité que la seconde intégrale de (60), $J_0^+(z)$, représente une fonction holomorphe de z dans le demi-plan

$$\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z = \varphi < \frac{3\pi}{2} - \alpha.$$

Or, comme il est facile de le voir, en gardant le nombre a fixe et en faisant varier les nombres b et α de manière que les autres conditions soient satisfaites, on obtient le prolongement analytique de $J^+(z)$ dans le domaine $0 < \arg z < 2\pi$. Pour étudier le comportement de $J^+(z)$ sur l'axe positif, choisissons dans (60) : $b = b_0 > 0$. En remplaçant $f(s)$, dans la seconde intégrale (60), par la première série (57), on voit que pour z tel que $\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \alpha$, on peut effectuer l'intégration de $J_0^+(z)$ terme à terme et l'on obtient

$$J_0^+(z) = \int_{b_0}^{\infty[\arg(s-b_0)=\alpha]} f(s)\, e^{sz}\, ds = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{(z-\lambda_n)b_0}}{z-\lambda_n} = -e^{b_0 z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{-\lambda_n b_0}}{z-\lambda_n}. \tag{62}$$

(¹) M. L. Cartwright, *Some Uniqueness Theorems, Proceedings of the London Math. Soc.*, Vol. 41, 1936, p. 55, Theorem III.

(²) V. Bernstein, *loc. cit.*, p. 111.

La série à droite nous donne le prolongement analytique de $J_0^-(z)$ dans tout le plan. On tire donc, de (60) et (62) que $J^+(z)$ est une fonction méromorphe avec des pôles simples aux points $z=\lambda_n (n=1, 2, \ldots)$ et dont les résidus sont égaux à $-a_n (n=1, 2, \ldots)$ respectivement.

D'une manière analogue, posons

$$(63)\qquad J^-(z)=\int_a^b f(s)\,e^{sz}\,ds+\int_b^{\infty,\arg(s-b)=\alpha} f(s)\,e^{sz}\,ds=J_1^-(z)-J_0^-(z),$$

où $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3}{2}\pi$, $-\infty<b\leq a<\infty$ et $b<d\,|\operatorname{cotg}\alpha|$. Comme dans le cas précédent, on démontre que (63) représente une fonction holomorphe $J(z)$ dans le demi-plan $\frac{\pi}{2}-\alpha<\arg z<\frac{3\pi}{2}-\alpha$. En gardant le nombre a fixe et en faisant varier les nombres b et α de manière que les autres conditions soient satisfaites, on obtient le prolongement analytique de $J^-(z)$ dans le domaine $|\arg z|<\pi$. En prenant $b=b_0<0$, en remplaçant $f(s)$ dans la seconde intégrale (63) par la seconde série (57) et en intégrant $J_0^-(z)$ terme à terme $\left(\text{pour } z \text{ tel que } \frac{\pi}{2}-\alpha<\arg z<\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$, on obtient

$$(64)\qquad J_0^+(z)=\int_{b_0}^{\infty,\arg(s-b_0)=\alpha} f(s)\,e^{sz}\,ds=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}e^{z-\lambda_{-n})b_0}}{z+\lambda_{-n}}=-e^{b_0 z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}e^{\lambda_{-n}b_0}}{z+\lambda_{-n}}.$$

On conclut, d'après (63) et (64), que $J^-(z)$ est une fonction méromorphe dans tout le plan avec des pôles simples aux points $z=-\lambda_{-n} (n=0, 1, \ldots)$, et dont les résidus sont égaux à $-a_{-n} (n=0, 1, \ldots)$ respectivement.

Posons maintenant

$$(65)\qquad J(z)=\int_{-a}^{\infty,\arg(s+a)=\alpha} f(s)\,e^{sz}\,ds-\int_{-a}^{\infty,\arg(s+a)=\beta} f(s)\,e^{sz}\,ds=J^+(z)-J^-(z),$$

où $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{3\pi}{2}$, $\beta\neq\alpha+\pi$ et a est un nombre réel tel que $-d\,|\operatorname{cotg}\beta|<a<d\,|\operatorname{cotg}\alpha|$.

On voit aisément, d'après ce qui précède, que les intégrales (65) représentent une fonction holomorphe de z dans le secteur commun aux deux demi-plans

$$P_\alpha:\ \frac{\pi}{2}-\alpha<\arg z<\frac{3\pi}{2}-\alpha \qquad \text{et} \qquad P_\beta:\ \frac{\pi}{2}-\beta<\arg z<\frac{3\pi}{2}-\beta.$$

De plus, la fonction $J(z)$ est une fonction méromorphe dans tout le plan avec des pôles simples aux points $z=\varepsilon_n\lambda_n$, $-\infty<n<+\infty$, où $\varepsilon_n=1$ pour $n=1, 2, \ldots$ et $\varepsilon_n=-1$ pour $n=0, -1, \ldots$, et dont les résidus sont égaux à $-\varepsilon_n a_n$ respectivement. Posons

$$(66)\qquad \delta(z)=\min|z-\varepsilon_n\lambda_n| \qquad \text{pour} \quad -\infty<n<\infty.$$

Les relations (60), (62), (63), (64) et (65) nous montrent qu'il existe un nombre positif $0 < \Omega < \infty$ et une constante positive K tels que

$$|J(z)| \leq K\left(1 + \frac{1}{\delta(z)}\right) e^{\Omega|z|}. \tag{67}$$

Nous allons maintenant étudier la croissance de $J(z)$ dans une direction déterminée de manière plus précise. Pour cela remarquons que si l'on fait varier les nombres α, β et a dans (65), les autres conditions étant satisfaites, on obtient le prolongement analytique de la même fonction $J(z)$ dans le secteur commun aux deux demi-plans P_α et P_β.

Soient φ, ε et d' trois nombres positifs tels que $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $0 < \varepsilon < \varphi$ et $0 < d' < d$. Choisissons dans (65)

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi + \varepsilon, \qquad \beta = \pi - \varphi + \varepsilon \quad \text{et} \quad a = d' \operatorname{cotg} \alpha. \tag{68}$$

On voit aisément que les conditions de (65) sont satisfaites et que cette formule représente la fonction $J(z)$ dans le secteur $\varphi - \varepsilon < \arg z < \frac{\pi}{2} + \varphi - \varepsilon$. Pour la première intégrale $J^+(z)$ de (65) posons $s = -a + ue^{i\alpha}$, $0 \leq u < \infty$, pour la seconde $s = -a + ue^{i\beta}$, $0 \leq u < \infty$. Les relations (61) (où l'on pose $b = -a$), (65) et (68) nous donnent pour $z = \rho e^{i\varphi}$ l'inégalité suivante :

$$|J(\rho e^{i\varphi})| \leq K_1 e^{-\rho a \cos\varphi} = K_1 e^{-\rho d' \operatorname{tg}\varphi - \varepsilon \cos\varphi},$$

où K_1 est une constante. Nous avons donc

$$\overline{\lim_{\rho = \infty}} \frac{\log|J(\rho e^{i\varphi})|}{\rho} \leq -d' \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon)\cos\varphi.$$

En faisant tendre dans la dernière inégalité $\varepsilon \downarrow 0$ et $d' \uparrow d$, on obtient

$$\overline{\lim_{\rho = \infty}} \frac{\log|J(\rho e^{i\varphi})|}{\rho} \leq -d|\sin\varphi| \qquad \text{pour} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}. \tag{69}$$

D'une manière analogue, on démontre (69) pour chaque $-\pi < \varphi < \pi$ tel que $\varphi \not\equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{\pi}{2}\right)$. Or, la fonction $J(z)$ étant holomorphe dans les deux demi-plans $\mathcal{I}(z) > 0$ et $\mathcal{I}(z) < 0$, où elle satisfait à l'inégalité (67), on conclut, d'après un théorème connu de Phragmén-Lindelöf, que l'on a (69) même pour $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. Enfin, étudions la croissance de $J(z)$ sur l'axe réel. Nous allons démontrer que pour x réel on a

$$|J(x)| \leq \frac{K_2}{\delta(x)}, \tag{70}$$

où la fonction $\delta(x)$ est définie par (66), K_2 étant une constante positive.

Il suffit de démontrer (70) pour $|x| \geq x_0$. Pour fixer les idées, supposons que x soit positif. Dans la définition de $J(z)$, (65), prenons $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < a < d\cot g\alpha$ et $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$, $\beta \neq \alpha + \pi$. On a $J(z) = J^+(z) - J^-(z)$ où les fonction $J^+(z)$ et $J^-(z)$ sont définies (dans un certain secteur) par les intégrales correspondantes de (65). Or, d'après (64), on a

$$J^-(z) = -e^{-az} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n} e^{-d\lambda_{-n}}}{z - \lambda_{-n}}.$$

On obtient donc, pour x positif,

$$J^-(x) = O(e^{-ax}) = o(1) \quad \text{pour} \quad x \to \infty. \tag{71}$$

Posons

$$f_n(s) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}.$$

Dans le demi-plan $\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \alpha$ on peut écrire

$$J^-(z) = \int_{-a}^{\infty, \arg(s+a)=\alpha} f(s) e^{sz} ds = \int_{-a}^{\infty, \arg(s+a)=\alpha} f_n(s) e^{sz} ds + \int_{-a}^{\infty, \arg(s+a)=\alpha} [f(s) - f_n(s)] e^{sz} ds = I_n(z) + I_n^*(z). \tag{72}$$

En intégrant la première intégrale terme à terme, on obtient

$$I_n(z) = \int_{-a}^{\infty, \arg(s+a)=\alpha} f_n(s) e^{sz} ds = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{z - \lambda_\nu} e^{-(z-\lambda_\nu)a}. \tag{73}$$

Remarquons maintenant que pour s appartenant au secteur $|\arg(s+a)| \leq \alpha$, on a l'inégalité suivante :

$$|f(s) - f_n(s)| \leq K_3 e^{-\lambda_n \sigma} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{74}$$

où K_3 est une constante. On obtient ceci en appliquant le théorème I (avec une légère modification) à la fonction $f(s)$ et en tenant compte du fait que la suite $\{a_n\}$ est bornée par une constante positive A pour $n = 1, 2, \ldots$.

Or, d'après (74), on voit aisément que la seconde intégrale (72) qui représente la fonction $I_n^*(z)$ dans le demi-plan P_α

$$\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \alpha,$$

converge aussi vers une fonction holomorphe de z dans le domaine Δ_n : $x < \lambda_n, y > -(\cot g\alpha)(\lambda_n - x)$. Comme les deux domaines P_α et Δ_n possèdent une partie commune, on obtient ainsi le prolongement analytique de $I_n^*(z)$

dans le domaine Δ_n. En particulier la fonction $I_n^*(z)$ est holomorphe sur le demi-axe réel $x < \lambda_n$ et y est donnée par

$$I_n^*(x) = \int_{-a}^{\infty\,[\arg(s+a)=\alpha]} [f(s) - f_n(s)]\, e^{sx}\, ds. \tag{75}$$

Soit maintenant x un nombre positif tel que $x \neq \lambda_n (n = 1, 2, \ldots)$, $x > \lambda_1$ et déterminons le nombre $n = n(x)$ par l'inégalité $\lambda_{n-1} < x < \lambda_n$, $n \geq 2$.

En tenant compte de (73) nous pouvons écrire

$$|I_n(x)| \leq \sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{|a_\nu|}{x - \lambda_\nu} e^{-(x-\lambda_\nu)a} + \left(\frac{|a_{n-1}|}{x - \lambda_{n-1}} e^{-(x-\lambda_{n-1})a} + \frac{|a_n|}{\lambda_n - x} e^{-(x-\lambda_n)a} \right). \tag{76}$$

En utilisant les inégalités

$$|a_\nu| \leq A \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

et

$$x - \lambda_\nu \geq \lambda_{n-1} - \lambda_\nu \geq (n - 1 - \nu)h \qquad \text{pour} \quad \nu = 1, \ldots, n-2,$$

on obtient pour la première somme

$$\sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{|a_\nu|}{x - \lambda_\nu} e^{-(x-\lambda_\nu)a} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A}{mh} e^{-mha} = K_3. \tag{77}$$

Les deux derniers termes de (76) sont plus petits que $\frac{K_4}{\delta(x)}$. On arrive donc à l'inégalité

$$|I_n(x)| \leq \frac{K_5}{\delta(x)} \quad , \quad \text{pour} \quad x > \lambda_1. \tag{78}$$

Pour $I_n^*(x)$ on obtient, en tenant compte de (74) et (75),

$$\begin{aligned} |I_n^*(x)| \leq K_2 \int_{-a}^{\infty\,[\arg(s+a)=\alpha]} e^{(x-\lambda_n)\sigma} |ds| &= \frac{K_2}{\cos\alpha} \int_{-a}^{\infty} e^{(x-\lambda_n)\sigma}\, d\sigma \\ &= \frac{K_2\, e^{-(x-\lambda_n)a}}{(\cos\alpha)(\lambda_n - x)} \leq \frac{K_6}{\delta(x)}. \end{aligned} \tag{79}$$

(65), (71), (72), (78) et (79) nous donnent l'inégalité (70) énoncée pour $x > \lambda_1$. La démonstration de cette inégalité pour x négatif est faite d'une manière analogue.

Posons maintenant

$$G(z) = (z + \lambda_0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \left(1 + \frac{z}{\lambda_{-n}}\right). \tag{80}$$

La fonction $G(z)$ ainsi définie est une fonction entière qui satisfait aux conditions du lemme VII pour $\alpha = 1$. Posons ensuite

$$H(z) = G(z) J(z), \tag{81}$$

où $J(z)$ est la fonction méromorphe définie par (65).

D'après ce qui précède, $H(z)$ est une fonction entière satisfaisant à la relation

$$(82) \qquad H(\lambda_n) = -\varepsilon_n G'(\lambda_n) a_n \quad \text{pour} \quad -\infty < n < \infty, \quad (\varepsilon_n = \pm 1).$$

Les relations (55) et (67) nous permettent de constater que $H(z)$ est d'ordre 1 et de type moyen. Des inégalités (56) du lemme VII pour $\alpha = 1$ (70) et (81), nous tirons

$$(83) \qquad |H(x)| = O(x^4) \quad \text{pour} \quad |x| \to \infty.$$

Or, (55') et la seconde condition (58) nous donnent

$$(A) \qquad \lim_{n=\infty} |(H\lambda_n)| = 0.$$

En appliquant le théorème de M. Hadamard sur la factorisation des fonctions entières d'ordre fini, à la fonction $H(z)$, et en utilisant les relations (A), (83) et le fait que $H(z)$ est d'ordre 1, on conclut que $H(z)$ possède une infinité de zéros. Soient $z_i (i = 1, 2, 3, 4)$ quatre zéros distincts de $H(z)$. Posons

$$(84) \qquad F(z) = \frac{H(z)}{\prod_{i=1}^{4} (z - z_i)}.$$

La fonction entière $F(z)$ satisfait aux conditions du lemme VI. En effet, on voit aisément que $F(z)$ est d'ordre 1 et de type moyen. D'après (55), (69), (81) et (84) on a

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{\rho=\infty}} \frac{\log |F(\rho e^{i\varphi})|}{\rho} \leq (\pi - d) |\sin \varphi| \quad \text{pour} \quad 0 < |\varphi| < \pi.$$

Or, l'indicatrice de croissance $h(\varphi)$ est une fonction continue de φ, la dernière inégalité est valable aussi pour $\varphi = 0, \pi$. Donc. les conditions (50), (51) et (52) du lemme VI sont satisfaites avec $k = \pi - d$, $D = 1$. D'après (83) et (84), on voit que $F(z)$ est bornée sur l'axe réel et donc que la condition (50') est satisfaite. Enfin, en tenant compte de (55'), (58), (82) et (84) on obtient

$$F(\lambda_n) = O(e^{-\theta(\lambda_n)}) \quad \text{pour} \quad n \to \infty,$$

où $\theta(x)$ est la fonction croissante dont il a été question dans (58).

Donc les dernières conditions (53) et (53') du lemme VI sont satisfaites et l'on conclut que $F(z) \equiv H(z) \equiv 0$. D'après (82), on obtient $a_n = 0$ pour $-\infty < n < \infty$, $f(s) \equiv 0$. Ce qui démontre le théorème.

8. Nous utilisons le dernier théorème pour démontrer la généralisation suivante du théorème VI.

THÉORÈME VIII. — *Soit* $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Soit* $\{n_k\} (k = 1, 2, \ldots)$ *une suite croissante d'indices principaux telle que*

$\lim_{k=\infty}(n_{k+1}-n_k)=\infty$ *et telle que l'une des deux conditions suivantes soit remplie*

$$(85)\quad \overline{\lim_{k=\infty}}\left|\frac{d_{n_k+m}}{d_{n_k}}\right|\leq e^{\theta_m}\quad (m=1,2,\ldots),\qquad \overline{\lim_{k=\infty}}\left|\frac{d_{n_k-m}}{d_{n_k}}\right|\leq e^{-\theta_m}\quad (m=1,2,\ldots),$$

où $\theta(m)$ *est une suite croissante satisfaisant à* $\sum_1^\infty \frac{\theta(m)}{m^2}=\infty$. *L'axe imaginaire est alors une coupure pour* $f(s)$.

Démonstration. — Supposons, par impossible, que $f(s)$ soit holomorphe sur le segment de l'axe imaginaire $|t-t_0|<d\ (-\infty<t_0<\infty,\ d>0)$ et que la première condition (85), par exemple, soit remplie. Désignons par T_0 le domaine composé de deux demi-plans $\mathcal{R}(s)>0$, $\mathcal{R}(s)<0$ et le segment de l'axe imaginaire $|t-t_0|<d$. Posons

$$g_{n_k}(s)=\frac{f(s)-f_{n_k}(s)}{d_{n_k}e^{-\lambda_{n_k}s}}$$

[où, comme toujours, $f_n(s)=\sum_{\nu=0}^{n} d_\nu e^{-\lambda_\nu s}$] et appliquons le théorème IV à la famille de fonctions $\{g_{n_k}(s)\}$ qui est normale dans tout domaine simplement connexe $\mathcal{D}$, contenant le demi-plan $\mathcal{R}(s)>0$, et où $f(s)$ est holomorphe. Soit $g(s)$ une fonction quelconque, la limite d'une suite partielle de fonctions de la famille dans le domaine $\mathcal{D}$. D'après le théorème IV la fonction $g(s)$ est holomorphe dans le domaine T_0 et y possède les développements (39) suivants :

$$(39)\quad \begin{cases} g(s)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s} & \text{pour } \mathcal{R}(s)>0, \\ g(s)=-1-\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} e^{\mu_{-m} s} & \text{pour } \mathcal{R}(s)<0, \end{cases}$$

où $|a_m|<C$ pour $m=\pm 1, \pm 2, \ldots$, $\{\mu_m\}$ et $\{\mu_{-m}\}$ $(m=1,2,\ldots)$ sont deux suites croissantes de nombres positifs telles que $0<h\leq\mu_{m+1}\leq H<\infty$, $h\leq\mu_{m+1}-\mu_m\leq H$ et $h\leq\mu_{-m+1}-\mu_{-m}\leq H$. De plus, les relations (40) et (40') sont satisfaites. Or, en tenant compte de (40') et (85) on obtient l'inégalité $a_{-m}<e^{\theta(m)}$, $\{\theta(m)\}(m=1,2,\ldots)$ étant la suite croissante introduite dans l'énoncé de notre théorème. Il est donc évident que la fonction $f(s)$ satisfait aux conditions du théorème VII et l'on tire $g(s)\equiv 0$. Mais, d'après (39), on a $\lim_{\tau} g(\tau)=-1$. Ce qui mène à une contradiction et démontre le théorème.

9. Le dernier théorème peut être encore amélioré pour une classe assez vaste de séries de Taylor. Pour cela nous nous servirons du lemme suivant qu'on démontre aisément.

LEMME VIII. — *Soit* $f(z)=\sum_0^\infty d_n z^n$ *une série de Taylor dont le rayon du cercle de convergence est égal à* 1. *Supposons que dans le secteur* S_α : $|z|<1$, $|\arg z|\leq\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$, *la fonction* $f(z)$ *soit bornée* $|f(z)|\leq M$. *Dans ces conditions, on peut décomposer* $f(z)$ *en somme de deux fonctions*

$$f(z)=g(z)+h(z), \tag{86}$$

où $g(z)$ *et* $h(z)$ *sont des fonctions holomorphes dans le cercle* $|z|<1$, *où* $g(z)$ *est holomorphe sur l'arc du cercle unité* $|\arg z|<\alpha$ *et* $h(z)$ *est holomorphe sur l'arc du cercle unité* $\alpha<|\arg z|\leq\pi$. *De plus, posons pour* $|z|<1$, $h(z)=\sum_0^\infty c_n z^n$, *on a*

$$\sum_0^\infty |c_n|^2<\infty \tag{87}$$

et en particulier $\lim c_n=0$.

10. THÉORÈME IX. — *Soit* $f(z)=\sum_{n=0}^\infty d_n z^n$ *une série de Taylor dont le rayon du cercle de convergence est égal à* 1. *Soit* $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ *une suite croissante d'indices principaux telle que* $\lim_{k=\infty}(n_{k-1}-n_k)=\infty$ *et pour laquelle l'une des deux conditions* (85) *du théorème VIII soit satisfaite. Supposons de plus que l'on ait* $\overline{\lim_{k=\infty}}\,|d_{n_k}|>0$. *Dans ces conditions* $f(z)$ *n'est pas bornée dans aucun secteur du cercle unité.*

Démonstration. — Nous démontrons le théorème par contradiction. Sans restreindre la généralité on peut supposer (par l'impossible) que dans un secteur S_α : $|\arg z|<\alpha$ avec $0<\alpha<\pi$ on ait $|f(z)|\leq M$. D'après le lemme VIII on peut écrire $f(z)=g(z)+h(z)$, où $g(z)$ est holomorphe dans $|z|<1$ et sur l'arc du cercle unité $|\arg z|<\alpha$; $h(z)=\sum_0^\infty c_n z^n$ pour $|z|<1$ avec $\lim c_n=0$. Pour $g(z)$ on obtient

$$g(z)=\sum_{n=0}^\infty (d_n-c_n)z^n=\sum_{n=0}^\infty b_n z^n.$$

Soit $\{n'_k\}$ une suite partielle de $\{n_k\}$ telle que l'on ait $\lim_{k=\infty}|d_{n'_k}|>0$. Or, on démontre aisément que la suite $\{n'_k\}$ est une suite d'indices principaux pour la fonction $g(z)$. De plus, d'après nos hypothèses et d'après $\lim c_n=0$, on conclut que l'une des conditions (85) est satisfaite pour $g(z)$ (où l'on pose $n_k=n'_k$). Donc $g(z)$ satisfait aux conditions du théorème VIII et l'on peut affirmer que le cercle unité est une coupure pour $g(z)$. Mais cela nous donne une contradiction [la fonction $g(z)$ est holomorphe sur l'arc du cercle unité $|\arg z|<\alpha$], et démontre le théorème.

Comme un cas particulier on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME IX'. — *Soit* $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$ *une série de Taylor dont le rayon du cercle de convergence est égal à* 1 *et qui satisfait aux conditions suivantes :*

a. $\lim_{k=\infty}(n_{k+1}-n_k)=\infty$.

b. $\overline{\lim_{k=0}}\,|a_{n_k}|>0$.

Dans ce cas la fonction $f(z)$ *n'est bornée dans aucun secteur du cercle unité.*

11. Soit $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ une série de Taylor dont le rayon du cercle de convergence est égal à 1. D'après M. Hadamard on définit l'ordre ω de $f(z)$ sur le cercle unité par

$$\omega=\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log|a_n|}{\log n}+1. \tag{88}$$

De même, M. Hadamard a défini l'ordre $\omega_{\bar{C}}$ de $f(z)$ sur un arc fermé $\bar{C}$ du cercle unité. Sans entrer dans les détails de la définition mentionnons quelques propriétés de l'ordre $\omega_{\bar{C}}$ ainsi défini.

α. Si l'arc fermé $\bar{C}_1$ est contenu dans $\bar{C}$ on a $\omega_{\bar{C}_1}\leq\omega_{\bar{C}}$.

En particulier, on a toujours $\omega_{\bar{C}}\leq\omega$, où ω est l'ordre de $f(z)$ sur tout le cercle unité.

β. Si $f(z)$ est holomorphe sur $\bar{C}$, on a $\omega_{\bar{C}}=-\infty$.

Enfin, on a le lemme suivant (1) :

LEMME H. — *Soit* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$, *la série de Taylor d'ordre* $\omega_{\bar{C}}$ *sur un arc fermé* $\bar{C}$ *du cercle unité introduite plus haut. Étant donné* $\varepsilon>0$, *on peut décomposer* $f(z)$ *en une somme* $f(z)=g(z)+h(z)$, *où* $g(z)$ *et* $h(z)$ *sont holomorphes dans* $|z|<1$, $g(z)$ *étant holomorphe sur l'arc ouvert* C *du cercle unité, tandis que l'ordre* ω_1, *de* $h(z)$ *sur tout le cercle unité satisfait à* $\omega_1\leq\omega_{\bar{C}}+\varepsilon$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME X. — *Soit* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ *une série de Taylor dont le rayon du cercle de convergence est égal à* 1 *et telle qu'on ait* $d_n=0$ *pour* $n=0, 1, \ldots$, *sauf pour* $n=n_k$, *où* $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ *est une suite croissante d'entiers non négatifs avec* $\lim_{k=\infty}(n_{k+1}-n_k)=\infty$. *Soit* ω *et* $\omega_{\bar{C}}$ *l'ordre de* $f(z)$ *sur tout le cercle unité et sur un*

(1) *Voir*, par exemple, S. MANDELBROJT, *Modern Researches on the Singularities of functions defined by Taylor's Series* (*The Rice Institute Pamphlet*, vol. 14, 1927, p. 303).

arc fermé $\overline{C}$ *du cercle unité. Dans ces conditions, pour tout arc fermé* $\overline{C}$ *du cercle unité, on a*

$$\omega_{\overline{C}} = \omega = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|d_n|}{\log n} + 1.$$

Remarquons que dans le cas où la suite $\{n_k\}$ satisfait en outre à la restriction $n_{k+1} - n_k > A\sqrt{n_k \log n_k}$, ce théorème a déjà été énoncé et démontré par Fabry (1).

Démonstration. — Dans le cas $\omega = -\infty$ le théorème est évident d'après $-\infty \leq \omega_{\overline{C}} \leq \omega = -\infty$. Prenons le cas $-\infty < \omega \leq \infty$. Supposons, par l'impossible, qu'il existe un arc C du cercle unitaire pour lequel on ait $\omega_{\overline{C}} < \omega \leq \infty$. Soit ω' un nombre réel tel que $\omega_{\overline{C}} < \omega' < \omega$. D'après le lemme H on peut écrire

$$f(z) = g(z) + h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad \text{pour} \quad |z| < 1,$$

où $g(z)$ et $h(z)$ sont holomorphes dans le cercle $|z| < 1$, où $g(z)$ est holomorphe sur l'arc ouvert C, et où l'ordre ω_1 de $h(z)$ sur tout le cercle unité satisfait à l'inégalité $\omega_1 \leq \omega'$. Donc, on a $d_n = b_n + c_n$ pour $n = 0, 1, \ldots$ et d'après les hypothèses faites sur les d_n on trouve

$$b_n = -c_n \qquad \text{pour} \quad n = 0, 1, \ldots, n \neq n_k, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{89}$$

De plus, d'après la définition (88), il vient

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|d_n|}{\log n} = \omega - 1, \qquad \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|c_n|}{\log n} \leq \omega' - 1. \tag{90}$$

Puisque $d_n = b_n + c_n$, $\omega' < \omega$, on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|b_n|}{\log n} = \omega - 1. \tag{91}$$

Or, en utilisant (91), on démontre aisément qu'il existe une suite infinie de coefficients principaux $\{b_{n'_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ de la fonction $g(s)$ satisfaisant à la condition

$$\lim_{k=\infty} \frac{\log|b_{n'_k}|}{\log n'_k} = \omega - 1. \tag{92}$$

L'égalité (89) et la seconde inégalité (90) nous permettent de conclure que la suite $\{n'_k\}$ pour $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$ fait partie de la suite $\{n_k\}$. D'après (89), $b_{n'_k+m} = -c_{n'_k+m}$ pour $m = 1, 2, \ldots$ et $k \geq k_0(m)$. Ce dernier résultat, la seconde inégalité (90) et (92) nous donnent

$$\lim_{k=\infty} \frac{b_{n'_k+m}}{b_{n'_k}} = 0 \qquad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots.$$

(1) E. Fabry, *Ordre des points singuliers d'une série de Taylor* (*Comptes rendus*, t. 151, 1910, p. 922).

On voit que les conditions du théorème VI sont satisfaites pour la fonction $g(z)$, pour la suite d'indices principaux $\{n'_k\}$ et pour le nombre positif $\delta = \infty$. On conclut que le cercle unité est une coupure pour $g(z)$. Mais, comme $g(z)$ est holomorphe sur l'arc ouvert C, cela nous mène à une contradiction et démontre le théorème.

12. Le théorème suivant donne un critère général pour que le point $s = 0$ soit un point singulier pour la série de Dirichlet (1). Ce critère présente des aspects analogues à ceux du critère donné par Fabry pour les séries de Taylor (1), bien que aucun de ces deux critères ne contienne l'autre.

THÉORÈME XI. — *Soit* $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Supposons qu'il existe deux suites croissantes d'entiers positifs* $l_k \uparrow \infty$ *et* $m_k \uparrow \infty$ *telles que* $l_k < m_k < l_{k+1}$ *pour* $k = 1, 2, \ldots$ *que* $\lim(m_k - l_k) = \infty$ *et que les conditions suivantes soient satisfaites :*

a. Il existe une suite d'indices principaux $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *avec* $l_k \leq n_k \leq m_k$.

b. Il existe un angle $|\arg z| \leq \gamma$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, *et une suite de nombres complexes* $\{e^{-i\alpha_k}\}$, $-\infty < \alpha_k < \infty$, *telle que les nombres* $d_n e^{-i\alpha_k}$ *pour* $l_k \leq n \leq m_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *soient tous compris dans cet angle.*

Le point $s = 0$ *est alors un point singulier de* $f(s)$.

Démonstration. — Supposons, par l'impossible, que $s = 0$ soit un point régulier de $f(s)$. Soit $\{k_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ une suite partielle de $\{k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ pour laquelle l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

α. $\lim_{i=\infty}(m_{k_i} - n_{k_i}) = \infty$.

β. $\lim_{i=\infty}(n_{k_i} - l_{k_i}) = \infty$.

Pour simplifier les choses supposons qu'on puisse prendre comme suite $\{k_i\}$ la suite $\{k\}$ elle-même, et que l'on ait α. Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe contenant le demi-plan $\mathcal{R}(s) > 0$, le point $s = 0$ et où $f(s)$ est holomorphe. Posons

$$g_{n_k}(s) = \frac{f(s) - f_{n_k}(s)}{d_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} s}} \qquad \text{où} \quad f_n(s) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu e^{-\lambda_\nu s},$$

et appliquons le théorème IV à la famille $\{g_{n_k}(s)\}$, qui est holomorphe et normale dans $\mathcal{D}$. Soit $g(s)$ une fonction quelconque limite d'une suite partielle de

(1) E. FABRY, *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans les cas très généraux* (*Ann. Sci. de l'École Normale Sup.*, t. 13, 1896, p. 375).

fonctions de la famille. $g(s)$ est holomorphe dans le domaine $\mathcal{D}$ et satisfait aux conditions a et b du théorème IV. En particulier, pour $\mathcal{R}(s)>0$, $f(s)$ possède le premier développement (39)

$$f(s)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s},$$

où $a_m=O(1)$, $0<h\leq\mu_m\uparrow\infty$, $h\leq\mu_{m+1}-\mu_m\leq H$ pour $m=1,2,\ldots$ et où l'abscisse de convergence de cette série est égale à zéro. De plus, les a_m satisfont à la première relation (40'). C'est-à-dire, il existe une suite partielle $\{n'_k\}$ de la suite $\{n_k\}$ telle que l'on ait

$$\lim_{k=\infty}\frac{d_{n'_k+m}}{d_{n'_k}}=a_m \qquad \text{pour} \quad m=1,2,\ldots.$$

Or, en tenant compte de cette relation, de α, de a et de b, on arrive aisément à démontrer que tous les coefficients $\{a_m\}(m=1,2,\ldots)$ se trouvent dans un angle $|\arg z-\arg z_0|\leq\gamma<\frac{\pi}{2}$. Donc, d'après le théorème de Vivanti-Dienes, (généralisé pour les séries de Dirichlet par Landau et Fekete), le point $s=0$ est un point singulier pour $g(s)$. Ceci nous mène à une contradiction et démontre le théorème.

Remarquons que dans la démonstration précédente nous nous sommes servis du théorème de Vivanti-Dienes. Ce dernier théorème lui-même peut être démontré facilement en utilisant notre théorème IV. Mais nous n'insistons pas ici sur cette démonstration.

Le théorème suivant est un corollaire du théorème XI.

THÉORÈME XII. — *Soit* $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Supposons qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs* $n_k\uparrow\infty$ *telle que* $\lim_{k=\infty}(n_{k+1}-n_k)=\infty$ *et qui satisfasse à la condition suivante :*

Il y a un angle $|\arg z|\leq\gamma$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$, *et une suite de nombres complexes* $\{e^{-i\alpha_k}\}$, $-\infty<\alpha_k<\infty$, *telle que les nombres* $d_n e^{-i\alpha_k}$ *pour* $n_k\leq n<n_{k+1}(k=1,2,\ldots)$ *soient tous compris dans cet angle. Le point* $s=0$ *est alors un point singulier de* $f(s)$.

Remarquons que le dernier théorème admet comme cas particuliers le théorème de Vivanti-Dienes et un théorème de Fabry, généralisé pour les séries de Dirichlet (1), dont voici l'énoncé :

THÉORÈME F. — *Soit* $f(s)=\sum_{0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Posons* $d_n=|d_n|e^{i\varphi_n}$. *Si* $\lim_{n=\infty}\frac{e^{i\varphi_n}}{e^{i\varphi_{n-1}}}=1$, *le point* $s=0$ *est un point singulier de* $f(s)$.

CHAPITRE III.

Généralisation d'un théorème de M. G. Pólya pour une classe de séries de Dirichlet (1). Largeur des « lacunes » et « densité » des points singuliers sur l'axe imaginaire des séries de Dirichlet (1).

1. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite croissante de nombres non négatifs tels que $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geq h > 0$. Désignons par $N(x)$ le nombre des λ_n satisfaisant à $\lambda_n < x$. D'après M. G. Pólya (1) les deux limites suivantes existent :

$$\lim_{\xi \to 1-0} \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{N(x)-N(x\xi)}{x(1-\xi)} = D^+ \quad \text{et} \quad \lim_{\xi \to 1-0} \underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{N(x)-N(x\xi)}{x(1-\xi)} = D^-.$$

Posons aussi

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{N(x)}{x} = \overline{D}, \qquad \underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{N(x)}{x} = \underline{D}.$$

On appelle D^+ la densité maximum de la suite $\{\lambda_n\}$, D^- la densité minimum, $\overline{D}$ la densité supérieure et $\underline{D}$ la densité inférieure de la suite $\{\lambda_n\}$.

Nous allons maintenant introduire la notion de la densité arithmétique minimum d'ensemble de nombres positifs.

Définition D. — *Soit $E\{y\}$ un ensemble de nombres positifs y. Désignons par $n(x, R)$ $(x>0,\ R>0)$, le nombre des nombres positifs y appartenant à E et satisfaisant à l'inégalité $x \leq y < x+R$. [$n(x, R)$ peut être égal à ∞]. Nous définissons la densité arithmétique minimum $\underline{\underline{D}}$ de $E\{y\}$ par la relation*

$$\underline{\underline{D}} = \lim_{R \to \infty} \underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{n(x, R)}{R}.$$

On démontre aisément que l'on a aussi $\underline{\underline{D}} = \underline{\lim} \frac{n(x, R)}{R}$ quand x et R tendent vers l'infini de toutes les manières possibles. En prenant $E\{y\} = \{\lambda_n\}$, où $\{\lambda_n\}$ est la suite considérée plus haut, on trouve que les différentes densités sont liées entre elles par l'inégalité

$$\underline{\underline{D}} \leq D^- \leq \underline{D} \leq \overline{D} \leq D^+ \leq \frac{1}{h}. \tag{93}$$

2. Nous nous servirons du lemme suivant que l'on démontre facilement.

Lemme IX. — *Soit $E\{y\}$ un ensemble de nombres positifs dont la densité arithmétique minimum $\underline{\underline{D}}$ est finie. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe deux suites de nombres positifs $\{x_i\}$ et $\{R_i\}$ telles que $\lim_{i=\infty} x_i = \infty$ et $\lim_{i=\infty} R_i = \infty$ et pour lesquelles on a*

$$\frac{n(x_i, R)}{R} < \underline{\underline{D}} + \varepsilon \quad \text{pour} \quad 0 < R \leq R_i \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{94}$$

où $n(x, R)$ est la fonction introduite dans la définition D.

---

(1) G. Pólya, *Math. Zeitschrift*, Bd 29, 1929, p. 559.

3. Citons deux théorèmes dus respectivement à M. G. Pólya et à M. S. Mandelbrojt, où interviennent les notions de densité maximum et de densité supérieure. Commençons par le théorème de M. Pólya (1).

THÉORÈME P. — *Soit* $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *une série de Dirichlet telle que* $0 \leq \lambda_n \uparrow \infty$, $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geq h > 0$ *et dont l'abscisse de convergence est égale à zéro. Soit* D^+ *la densité maximum de la suite* $\{\lambda_n\}$. *Dans ce cas, chaque segment de l'axe imaginaire de longueur supérieure à* $2\pi D^+$ *contient au moins un point singulier de* $f(s)$.

Voici le théorème de M. Mandelbrojt (2).

THÉORÈME M. — *Soit* $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet du théorème précédent. Désignons par* $\overline{D}$ *la densité supérieure de la suite* $\{\lambda_n\}$. *Soit* $\varepsilon > 0$ *un nombre positif arbitraire mais fixe. Il existe une fonction non positive* $A(x, y)$ *définie et continue pour* $x > 0$, $y \geq 0$, *avec* $A(x, 0)=0$ *telle que* $f(s)$ *possède un point singulier dans chaque demi-bande* $|t-t_0| < \pi(\overline{D}+\varepsilon)$, $\sigma \geq A(h, \overline{D})$.

D'après l'inégalité (93), on a toujours $\overline{D} \leq D^+$. Or, dans le cas où $\overline{D} = D^+$ le théorème P admet le théorème M comme cas particulier. En effet, on voit aisément que le théorème M est toujours satisfait. Si $\overline{D} < D^+$, il n'en est pas de même. La question se pose à savoir si l'on peut toujours remplacer la densité maximum D^+ dans le théorème P par la densité supérieure $\overline{D}$.

Le théorème suivant donne une réponse partielle à cette question. A l'aide de notre théorème IV et du théorème M, nous démontrons que, dans le cas où la suite des coefficients $\{d_n\}$ est une suite quasi-régulière, on peut remplacer D^+ dans le théorème P, même par la plus petite densité, la densité arithmétique minimum $\underline{D}$ de la suite $\{\lambda_n\}$.

4. THÉORÈME XIII. — *Soit* $f(s)=\sum_{0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1) *dont la suite de coefficients* $\{d_n\}$ *est une suite quasi-régulière* (Def. C, a', § 7, Chap. I). *Désignons par* $\underline{D}$ *la densité arithmétique minimum de la suite* $\{\lambda_n\}$. *Dans ce cas, chaque segment de l'axe imaginaire de longueur supérieure à* $2\pi\underline{D}$ *contient au moins un point singulier de* $f(s)$.

Démonstration. — Supposons, par impossible, qu'il existe un segment I de l'axe imaginaire de longueur supérieure à $2\pi\underline{D}$ dont tous les points soient des points réguliers de $f(s)$. On peut supposer, sans restreindre la généralité, que I

(1) G. PÓLYA, *Ueber die Existenz unendlich vieler singularer Punkte* (*Berl. Sitz.*, 1923).
(2) S. MANDELBROJT, *Dirichlet Series* (*The Rice Institute Pamphlet*, 31, 1944, p. 229).

est le segment $|t| < \pi(\underline{D} + \delta)$ où $\delta > 0$. Désignons par T_0 le domaine composé des deux demi-plans $\mathcal{R}(s) > 0$, $\mathcal{R}(s) < 0$ et du segment I. Puisque la suite de coefficients $\{d_n\}$ est une suite quasi-régulière, il existe (Déf. C) une suite croissante d'indices principaux $\{n_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ telle que $n_{i+1} - n_i = O(1)$ $(i \to \infty)$. Soit ε un nombre positif où $0 < \varepsilon < \delta$. D'après le lemme IX, il existe deux suites de nombres positifs $\{x_k\}$ et $\{R_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, satisfaisant à $\lim_{k=\infty} x_k = \infty$, $\lim_{k=\infty} R_k = \infty$, et à l'inégalité

$$\frac{n(x_k, R)}{R} < \underline{D} + \varepsilon \qquad \text{pour} \quad 0 < R \leq R_k \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{94}$$

où, comme plus haut, on désigne par $n(x, R)$ $(x > 0, R > 0)$ le nombre de λ_n satisfaisant à $x \leq \lambda_n < x + R$. Soit $\bar{n}_k$ le plus grand n_i tel que $\lambda_{n_i} \leq x_k$. On a

$$0 \leq x_k - \lambda_{\bar{n}_k} = O(1) \qquad (k \to \infty). \tag{95}$$

Posons

$$g_{\bar{n}_k}(s) = \frac{f(s) - f_{\bar{n}_k}(s)}{d_{\bar{n}_k} e^{-\lambda_{\bar{n}_k} s}}, \quad \text{où} \quad f_n(s) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu e^{-\lambda_\nu s}$$

et appliquons le théorème IV à la famille $\{g_{\bar{n}_k}(s)\}$, qui est normale dans tout domaine simplement connexe $\mathcal{D}$ contenant le demi-plan $\mathcal{R}(s) > 0$ et où $f(s)$ est holomorphe. Soit $g(s)$ une fonction limite quelconque d'une suite partielle de fonctions de la famille dans $\mathcal{D}$. D'après le théorème IV, $g(s) + 1$ est une fonction holomorphe dans le domaine T_0 et y possède les développements suivants :

$$\begin{cases} g(s) + 1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s} & \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) > 0, \\ g(s) + 1 = -\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} e^{\mu_{-m} s} & \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) < 0, \end{cases} \tag{39}$$

où $|a_m| = O(1)$ pour $|m| \to \infty$, $\mu_{-1} \geq h > 0$, $h \leq \mu_{-(m+1)} - \mu_{-m} \leq H$ $(m = 1, 2, \ldots)$. De plus, d'après le théorème IV, il existe une suite partielle $\{n'_k\}$ de $\{n_k\}$ telle que l'on ait

$$\mu_m = \lim_{k=\infty} (\lambda_{n'_k + m} - \lambda_{n'_k}) \qquad (m = \pm 1, 2, \ldots). \tag{40}$$

Posons $N_0(x) = \sum_{0 < \mu_m < x} 1$, avec $\mu_0 = 0$; $x > 0$ étant fixe, on obtient aisément d'après (94), (95) et (40) l'inégalité

$$N_0(x) < n(x'_k, x + A) < (\underline{D} + \varepsilon)(x + A), \qquad (k \geq k_0),$$

où $\{x'_k\}$ est une suite partielle de $\{x_k\}$, A une constante positive qui ne dépend

pas de x et de k, $k_0 = k(x)$ un entier positif dépendant de x. La dernière inégalité nous donne

$$\overline{D}_{\mu} = \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{N_{\mu}(x)}{x} \leq \underline{D} + \varepsilon,$$

où $\overline{D}_{\mu}$ est la densité supérieure de la suite $\{\mu_m\}$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Appliquons le théorème M à la fonction $g(s)+1$. Mais, la conclusion du théorème M n'est pas satisfaite, $g(s)+1$ étant holomorphe dans la bande $|t| < \underline{D} + \delta$, où $\delta > \varepsilon$. Cela mène à une contradiction et démontre le théorème.

5. M. Mandelbrojt a énoncé le théorème suivant (1) :

THÉORÈME. — *Soit* $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ *une série de Taylor dont le rayon du cercle de convergence vérifie* $0 < R < \infty$. *Supposons que les seules singularités de* $f(z)$ *sur le cercle de convergence soient des pôles. Posons* $l = \overline{\lim_{k=\infty}} (n_{k+1} - n_k)$. *Il existe alors au moins* l *pôles sur le cercle de convergence.*

Ce théorème a été généralisé par plusieurs auteurs et notamment par M. Jungen (2), qui a obtenu le même résultat en supposant seulement que les singulatités sur le cercle de convergence sont du type algébrico-logarithmique (ces points singuliers doivent satisfaire à une condition supplémentaire). Or, le théorème de M. Mandelbrojt, de même que le théorème de M. Jungen et d'autres théorèmes, peut être généralisé par les séries de Dirichlet (1) (où le nombre de points singuliers sur le cercle de convergence est remplacé par la densité arithmétique minimum des points singuliers sur une demi-droite de convergence quelconque). Nous publierons ces résultats prochainement. Nous nous bornons ici à démontrer un théorème général qui a des aspects communs avec le théorème de M. Mandelbrojt cité plus haut (3). Dans la démonstration de ce théorème, nous utilisons le lemme suivant qu'on tire aisément d'une égalité connue de Carleman (généralisée pour les fonctions méromorphes).

LEMME C. — *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe dans le domaine fermé* $\overline{\Delta}$ *défini par* $|z| \geq \rho > 0$, $\mathcal{I}(z) \geq 0$. *Désignons par* $\rho_\nu e^{i\varphi_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *les pôles de* $f(z)$ *dans* $\overline{\Delta}$ *arrangés de manière que* $\rho_\nu \leq \rho_{\nu+1} \leq \ldots$; $\rho_\nu e^{i\varphi_\nu}$ *figure dans*

(1) S. MANDELBROJT, *Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 40, 1923, p. 420).

(2) R. JUNGEN, *Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébrico-logarithmiques sur leur cercle de convergence.* (*Commen. Math. Helvetici*, t. 3, 1931, p. 287).

(3) En vérité, les généralisations des théorèmes de Mandelbrojt et Jungen sont des cas particuliers du théorème XIV'. Il résulte du fait que dans le cas où la série (1) ne possède que des singularités algébrico-logarithmiques sur l'axe imaginaire, la suite des coefficients est quasi-régulière.

la suite un nombre de fois égal à l'ordre de multiplicité de ce pôle. Pour $R > \rho$, *on a*

$$\sum_{\rho_\nu < R} \left(\frac{1}{\rho_\nu} - \frac{\rho_\nu}{R^2}\right) \sin \varphi_\nu \geq -\frac{1}{2\pi} \int_\rho^R \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2}\right) \log |f(x) f(-x)|\, dx - \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi \log |f(Re^{i\theta})| \sin \theta\, d\theta - A,$$

où A *est une constante positive qui ne dépend pas de* R.

6. Théorème XIV. — *Soit* $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1) *et soit* $\{n_k\}$ *une suite infinie d'indices principaux. Posons* $l(x) = \overline{\lim_{n=\infty}} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ *où* n *prend toutes les valeurs entières telles que* $|n - n_k| \leq x$ $(k = 1, 2, \ldots)$; $l(x)$ *est une fonction croissante satisfaisant à* $l(x) \leq H$ [*où* H *est la constante positive dont il a été question dans* (1)]. *Soit* $l = \lim_{x=\infty} l(x)$. *Désignons par* $\underline{\underline{D}}(t_0, \infty)$ *et* $\underline{\underline{D}}(t_0, -\infty)$ *la densité arithmétique minimum de l'ensemble des points singuliers de* $f(s)$ *sur les demi-axes imaginaires* $t_0 \leq t < \infty$ *et* $-\infty < t \leq t_0$ *respectivement* (Déf. D, § 1, Chap. III), *on a*

$$(96) \quad \underline{\underline{D}}(t_0, \infty) \geq \frac{l}{2\pi} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{D}}(t_0, -\infty) \geq \frac{l}{2\pi} \quad \text{pour chaque} \quad -\infty < t_0 < \infty.$$

Remarquons que si l'on désigne par $n(x, R)$ $(-\infty < x < \infty, R > 0)$ le nombre des points singuliers de $f(s)$ sur le segment de l'axe imaginaire $x \leq t < x + R$; on voit aisément (d'après la définition D) que l'énoncé du théorème peut être mis sous la forme équivalente suivante : *Étant donné* $\varepsilon > 0$, *il existe un nombre positif* $R_0 = R_0(\varepsilon)$ *tel que l'on ait*

$$n(x, R) \geq \frac{l - \varepsilon}{2\pi} R \quad \text{pour} \quad -\infty < x < \infty, \quad R \geq R_0.$$

Démonstration. — Dans le cas où l'axe imaginaire est une coupure, la démonstration est évidente. Supposons donc que l'axe imaginaire ne soit pas une coupure et désignons par T_0 le domaine composé des deux demi-plans $\mathcal{R}(s) > 0$, $\mathcal{R}(s) < 0$ et de tous les points réguliers de $f(s)$ sur l'axe imaginaire. Supposons, par impossible, que le théorème ne soit pas vrai. Il existe alors un nombre t_0, $-\infty < t_0 < \infty$, pour lequel l'une des inégalités (96) n'est pas vérifiée. Pour fixer les idées, supposons que l'on ait

$$\underline{\underline{D}}^0 = \underline{\underline{D}}(t_0, \infty) < \frac{l}{2\pi}.$$

Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $4\varepsilon < l - 2\pi \underline{\underline{D}}^0$. D'après le lemme IX il existe deux suites $\{x_j\}$, $\{R_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ où $t_0 < x_j \to \infty$, $0 < R_j \to \infty$ et pour lesquelles on a

$$(97) \quad \frac{n(x_j, R)}{R} < \frac{l - 3\varepsilon}{2\pi} = \underline{\underline{D}}^0 + \varepsilon' \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, 0 < R \leq R_j.$$

D'après la définition de l il existe $\xi_0 > 0$ tel que $l(x) > l - \varepsilon$ pour $x \geq \xi_0$.

La définition de $l(x)$ nous permet de voir aisément qu'on peut extraire de la suite d'indices principaux $\{n_k\}$ une suite partielle $\{\overline{n}_k\}$ satisfaisant à la propriété suivante :

Il existe une suite d'entiers positifs $\{p_k\}$ avec $|p_k - \overline{n}_k| \leq \xi_0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ et telle que

$$\overline{\lim_{k=\infty}} (\lambda_{p_k+1} - \lambda_{p_k}) \geq l - 2\varepsilon, \tag{98}$$

et de plus, $p_k - \overline{n}_k$ est ou non négatif ou non positif pour $k = 1, 2, \ldots$.

Pour fixer les idées, supposons que $p_k - \overline{n}_k$ soit non négatif. Posons

$$g_{\overline{n}_k}(s) = \frac{f(s) - f_{\overline{n}_k}(s)}{d_{\overline{n}_k} e^{-\lambda_{\overline{n}_k} s}}, \qquad \text{où} \quad f_n(s) = \sum_0^n d_n e^{-\lambda_n s}$$

et appliquons le théorème IV à la famille $\{g_{\overline{n}_k}(s)\}$ qui est normale dans tout domaine simplement connnexe $\mathcal{D}$ contenant le demi-plan $\mathcal{R}(s) > 0$ et où $f(s)$ est holomorphe. Soit $g(s)$ une fonction limite quelconque d'une suite partielle de fonctions de la famille. D'après le théorème IV, la fonction $g(s)$ est uniforme et holomorphe dans le domaine T_0 et y possède les développements suivants :

$$g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s} \quad \text{pour } \mathcal{R}(s) > \rho \quad \text{et} \quad g(s) = -1 - \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} e^{\mu_{-m} s} \quad \text{pour } \mathcal{R}(s) < 0, \tag{39}$$

où $\mu_{\pm 1} \geq h > 0$, $h \leq \mu_{\pm(m+1)} - \mu_{\pm m} \leq H$ pour $m = 1, 2, \ldots$ et $|a_m| = O(1)$ pour $|m| \to \infty$. De plus, il existe une suite partielle $\{n'_k\}$ de $\{\overline{n}_k\}$ pour laquelle on a

$$\mu_m = \lim_{k=\infty} (\lambda_{n'_k+m} - \lambda_{n'_k}) \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{40}$$

On tire de la définition de $g(s)$, de (98) et de (40), qu'il existe un entier non négatif m_0 tel que $\mu_{m_0+1} - \mu_{m_0} \geq l - 2\varepsilon$ (on pose $\mu_0 = 0$). Sans diminuer la généralité on peut supposer que $m_0 = 0$, et que, par conséquent,

$$\mu_1 \geq l - 2\varepsilon. \tag{99}$$

[Car, si ce n'est pas le cas, soit m_1 le plus grand entier positif tel que $m_1 \leq m_0$ et $a_{m_1} \neq 0$. Si l'on pose

$$g^*(s) = \frac{g(s) - \sum_{m=1}^{m_1} a_m e^{-\mu_m s}}{a_{m_1} e^{-\mu_{m_1} s}},$$

il est évident que $g^*(s)$ possède des développements analogues à (40); pour $\mathcal{R}(s) > 0$ on peut écrire $g^*(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a^*_m e^{\mu^*_m s}$ où $\mu^*_1 \geq l - 2\varepsilon$. De plus, $g(s)$ et

$g^*(s)$ possèdent les mêmes singularités. Nous pouvons remplaçer dans notre raisonnement la fonction $g(s)$ par $g^*(s)$ qui vérifie la condition (99)].

D'après le théorème IV, les seuls points singuliers de $g(s)$ sur l'axe imaginaire sont des points singuliers de $f(s)$. Soient $\{x_j\}$, $\{R_j\}$ $(j=1, 2, \ldots)$ les deux suites dont il a été question dans (97). D'après (97), tous les points singuliers de $f(s)$ sur les segments de l'axe imaginaire I_j définis par $x_j < t < x_j + R_j$ $(j=1, 2, \ldots)$ sont isolés sur l'axe imaginaire. En utilisant le théorème IV *bis*, on trouve que les seuls points singuliers $i\tau$ de $g(x)$ sur les segments I_j $(j=1, 2, \ldots)$ sont des pôles simples et que $i\tau$ est aussi un point singulier de $f(s)$. Posons

$$G_j(s) = g(s + ix_j) \qquad (j=1, 2, \ldots). \tag{100}$$

Soient $i\tau_1^{(j)}, i\tau_2^{(j)}, \ldots, i\tau_{m_j}^{(j)}$ les pôles simples de $G_j(s)$ sur le segment de l'axe imaginaire $0 < t < R_j$, rangés par ordre de valeur absolue. D'après (97) et (100), pour chaque $R > 0$, le nombre des pôles de $G_j(s)$, sur le segment de l'axe imaginaire $0 < t < R$, pour $j \geq j_0(R)$, ne dépasse pas $\frac{l-3\varepsilon}{2\pi} R$. En tenant compte de cette remarque, on conclut qu'on peut extraire (par un procédé diagonal) une suite partielle de fonctions $\{G_{j_k}(s)\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ pour laquelle on a $\lim_{k=\infty} \tau_\nu^{(j_k)} = \tau_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots)$, où $0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots < \infty$ [On obtient $\tau_1 > 0$ d'après (97) et $\tau_\nu < \infty$ d'après $\tau_\nu^{(j)} \leq \frac{2\pi}{h}\nu$]. Désignons par $\mathcal{B}$ le domaine composé des deux demi-plans $\mathcal{R}(s) > 0$, $\mathcal{R}(s) < 0$ et du demi-axe imaginaire $t > 0$, excepté les points $i\tau_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots)$. Soit $\bar{\Delta}$ un domaine fermé et borné quelconque contenu dans $\mathcal{B}$. En utilisant le lemme V (Chap. II, § 2), on voit aisément que la famille $\{G_{j_k}(s)\}$ est holomorphe et normale dans $\bar{\Delta}$ pour $k \geq k_0 = k_0(\bar{\Delta})$. Soit $G(s)$ une fonction limite quelconque (dans $\mathcal{B}$) d'une suite partielle des fonctions de la famille. D'après ce qui précède, $G(s)$ est une fonction holomorphe et uniforme dans $\mathcal{B}$ et y possède les développements suivants :

$$G(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e^{-\mu_m s} \quad \text{pour } \mathcal{R}(s) > 0, \qquad G(s) = -1 - \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} e^{\mu_{-m} s} \quad \text{pour } \mathcal{R}(s) < 0, \tag{101}$$

$\alpha_m = |a_m|$ pour $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, les suites $\{\mu_m\}$, $\{\mu_{-m}\}$, $\{a_m\}$ et $\{a_{-m}\}$ sont celles dont il a été question dans (39). Les seuls points singuliers possibles de $G(s)$ dans le demi-plan $\mathcal{I}(s) > 0$ sont les points $i\tau_\nu$ qui ne peuvent être que des points singuliers isolés non critiques. En appliquant une fois de plus le lemme V, on conclut que les seuls points singuliers de $G(s)$ dans le demi-plan $\mathcal{I}(s) > 0$ sont des pôles simples de la forme $i\tau_\nu$. Soient $i\rho_1, i\rho_2, \ldots, i\rho_\nu, \ldots$ ces pôles rangés de manière que $0 < \rho_1 < \rho_2 < \ldots$. Désignons par $N(R)$, $R > 0$, le nombre de pôles $i\rho_\nu$ satisfaisant à $0 < \rho_\nu \leq R$. D'après ce qui précède chacun

de ces pôles est un point $\pm\tau_\nu$. La relation (97) et la définition de τ_ν nous mènent aisément à l'inégalité

$$N(R)\leq\frac{l-3\varepsilon}{2\pi}R. \tag{102}$$

Choisissons un nombre positif b tel que $0<b<\frac{\pi}{l-3\varepsilon}$. Il est évident d'après (102) qu'il existe une suite croissante $\{R_k\}$ $(k=1,2,\ldots)$, $1<R_k\uparrow\infty$, telle que tous les segments de l'axe imaginaire $|t-R_k|\leq b$ $(k=1,2,\ldots)$, ne contiennent pas de points singuliers de $G(s)$.

Appliquons maintenant le lemme C du paragraphe précédent à la fonction $G(s)$, où l'on pose $\rho=1$, $R=R_k$ $(k=1,2,\ldots)$. Tous les pôles de $G(s)$ dans le demi-plan $\mathcal{J}(s)>0$ sont simples et situés sur l'axe imaginaire, on peut écrire

$$\sum_{1\leq\rho_\nu<R_k}\left(\frac{1}{\rho_\nu}-\frac{\rho_\nu}{R_k^2}\right)\geq-\frac{1}{2\pi}\int_1^{R_k}\left(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{1}{R_k^2}\right)[\log|G(\sigma)|+\log|G(-\sigma)|]\,d\sigma \tag{103}$$
$$-\frac{1}{\pi R_k}\int_0^{\pi}\log|G(R_ke^{i\vartheta})|\sin\vartheta\,d\vartheta-A.$$

En tenant compte de (102), on trouve

$$\sum_{1\leq\rho_\nu<R_k}\left(\frac{1}{\rho_\nu}-\frac{\rho_\nu}{R_k^2}\right)=\int_1^{R_k}\left(\frac{1}{u}-\frac{u}{R_k^2}\right)dN(u)=N(1)\left(\frac{1}{R_k^2}-1\right) \tag{104}$$
$$+\int_1^{R_k}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{R_k^2}\right)N(u)\,du\leq\frac{l-3\varepsilon}{2\pi}(\log R_k+1).$$

D'après (101), on a

$$|G(\sigma)|\leq[|a_1|+o(1)]e^{-\mu_1\sigma}\quad\text{pour }\sigma\to\infty\qquad\text{et}\qquad|G(-\sigma)|\leq1+o(1)\quad\text{pour }\sigma\to\infty.$$

De (99) on tire

$$\log|G(\sigma)|+\log|G(-\sigma)|\leq-\mu_1\sigma+O(1)\leq-(l-2\varepsilon)\sigma+O(1)\,(\sigma\to\infty),$$

et donc

$$-\frac{1}{2\pi}\int_1^{R_k}\left(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{1}{R_k^2}\right)[\log|G(\sigma)|+\log|G(-\sigma)|]\,d\sigma\geq\frac{l-2\varepsilon}{2\pi}\log R_k-O(1) \tag{105}$$
$$(k\to\infty).$$

D'après le lemme V et la manière dont on a choisi la suite $\{R_k\}$, on trouve que $\max_{0\leq\vartheta\leq\pi}|G(R_ke^{i\vartheta})|=O(1)$ pour $k\to\infty$. Ceci nous donne

$$-\frac{1}{\pi R_k}\int_0^{\pi}\log|G(R_ke^{i\vartheta})|\sin\vartheta\,d\vartheta\geq-o(1)\qquad(k\to\infty). \tag{106}$$

Enfin, des inégalités (103), (104), (105) et (106), nous tirons

$$\frac{l-3\varepsilon}{2\pi}(\log R_k+1)\geq\frac{l-2\varepsilon}{2\pi}\log R_k-A_1\qquad(k=1,2,\ldots).$$

où A_1 est une constante. En divisant la dernière inégalité par $\frac{1}{2\pi}\log R_k$ et en faisant tendre k vers l'infini, on obtient $l-3\varepsilon \geq l-2\varepsilon$. Ce qui nous donne une contradiction et démontre le théorème.

Les deux théorèmes suivants sont des cas particuliers du théorème XIV.

THÉORÈME XIV'. — *Soit* $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1) *dont la suite de coefficients* $\{d_n\}$ *est une suite quasi-régulière* (Déf. C). *Posons* $l=\overline{\lim_{n=\infty}}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$. *Désignons par* $\underline{\underline{D}}(t_0, \infty)$ *et* $\underline{\underline{D}}(t_0, -\infty)$ *la densité arithmétique minimum de l'ensemble de points singuliers de* $f(s)$ *sur le demi-axe imaginaire* $t_0 \leq t < \infty$ *et* $-\infty < t \leq t_0$, *respectivement. On a*

$$\underline{\underline{D}}(t_0, \infty) \geq \frac{l}{2\pi} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{D}}(t_0, -\infty) \geq \frac{l}{2\pi} \quad \text{pour chaque} \quad -\infty < t_0 < \infty.$$

THÉORÈME XIV''. — *Soit* $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Soit* $\{n_k\}$ *une suite croissante d'entiers positifs telle que* $n_{k+1}-n_k = O(1)$ *pour* $k \to \infty$. *Posons* $l=\underline{\lim_{k=\infty}}(\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k})$. *On a*

$$\underline{\underline{D}}(t_0, \infty) \geq \frac{l}{2\pi} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{D}}(t_0, -\infty) \geq \frac{l}{2\pi} \quad \text{pour chaque} \quad -\infty < t_0 < \infty.$$

Remarquons enfin que dans le cas où $f(s)$ est une série de Taylor — D, le nombre l défini dans les trois derniers théorèmes est un entier positif. Quelle que soit l'hypothèse, la conclusion est la même pour les trois cas : $f(s)$ *possède au moins* l *points singuliers sur chaque segment de l'axe imaginaire* $t_0 \leq t < t_0+2\pi$. Remarquons aussi que la démonstration directe du théorème XIV dans ce cas est beaucoup plus simple que la démonstration du théorème général (1).

(1) *Voir* notre Note, *Sur un théorème de M. Mandelbrojt* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1786-1787).

SUR

LES SÉRIES D'INTERPOLATION

PAR M. YVES MARTIN.

INTRODUCTION.

Le sujet de notre travail est l'étude des séries de polynomes d'interpolation de la forme

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \qquad \text{avec} \quad P_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right); \quad P_0(z) = 1.$$

Nous étudierons plus spécialement les deux cas suivants :

A. Les nombres λ_n, réels, positifs, forment une suite croissante avec

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n = +\infty.$$

B. Les nombres λ_n, réels, positifs, forment une suite décroissante avec $\lim_{n=\infty} \lambda_n = 0$, et nous supposons en outre que la série $\sum_{1}^{\infty} \lambda_n$ converge.

Le cas (A) a été étudié avec une grande précision par M. Norlund, dans ses *Leçons sur les séries d'interpolation* [1], dans les deux cas particuliers où $\lambda_n = n$ et où $\lambda_n = n^2$.

Les propriétés valables pour les suites $\{n\}$ ou $\{n^2\}$ s'étendent au cas général (A) et permettent d'établir des différences fondamentales de comportement entre les séries (1) suivant que la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge [cas (A, 1)] ou qu'elle converge [cas (A, 2)].

Une première Partie de notre travail est consacrée à l'étude du domaine de convergence des séries (1). Le comportement de ces séries aux points $z = \lambda_n$

fera généralement exception aux théorèmes que nous énoncerons et qui ne seront valables que pour $z \neq \lambda_n$. Nos résultats sont alors les suivants :

Dans le cas (A, 1), le domaine de convergence de (1) est un demi-plan $\mathcal{R}(z) > \mathcal{S}$, $\mathcal{R}(z)$ = partie réelle de z; $-\infty \leq \mathcal{S} \leq +\infty$.

Dans le cas (A, 2), l'ensemble des points de convergence de (1) est constitué soit par le plan entier, soit par les points $z = \lambda_n$.

La convergence absolue de (1) a lieu également dans un demi-plan [cas (A, 1)] ou, soit dans le plan tout entier, soit seulement aux points $z = \lambda_n$ [cas (A, 2)].

Nous donnons ensuite, dans le cas (A, 1), des formules permettant de déterminer l'épaisseur maximum de la bande de convergence simple en fonction des densités supérieure et inférieure de la suite $\{\lambda_n\}$. Enfin, dans (A, 1) nous déterminerons les valeurs exactes des abscisses de convergence simple ou absolue en fonction des nombres a_n et λ_n.

Nous abordons alors l'étude des conditions soit nécessaires, soit suffisantes, pour qu'une fonction $F(z)$ holomorphe dans le demi-plan $\mathcal{R}(z) > 0$ soit représentable par une série [A, 1]. Ces conditions portent sur la croissance de $F(z)$ quand $\lim |z| = +\infty$ et ne sont d'ailleurs pas identiques. Elles sont cependant suffisamment voisines pour délimiter d'une façon assez précise la classe des fonctions $F(z)$ representables par une série [A, 1]. Ces conditions permettent en outre d'établir certains théorèmes sur la croissance d'une fonction $F(z)$ holomorphe, dans un angle et prenant, en certains points de la bissectrice de cet angle, les mêmes valeurs qu'un polynome donné à l'avance. Ces théorèmes sont analogues à ceux énoncés par M. V. Bernstein [7] dans le cas particulier où la suite $\{\lambda_n\}$ a une densité D.

Nous passerons ensuite à l'étude des séries [A, 1] à la frontière de leur domaine de convergence. Le comportement de ces séries est alors analogue à celui des séries de Dirichlet (D)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-S(n)z}, \qquad \text{avec } S(0) = 0; \quad S(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\lambda_\nu}.$$

Elles ont les mêmes abscisses de convergence simple ou absolue. On démontre plus :

si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$ converge, [A, 1] et (D) convergent pour les mêmes valeurs de z sur la droite de convergence;

si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$ diverge, il est possible de construire deux séries associées [A, 1] et (D) n'ayant qu'un seul point commun de convergence sur la droite de convergence.

Dans le cas où la suite $\{\lambda_n\}$ a une densité supérieure finie, il est possible de

préciser que les séries [A, 1] et (D) représentent deux fonctions ayant mêmes points singuliers dans la bande $\mathcal{S} - h < \mathcal{R}(z) \leq \mathcal{S}$. L'épaisseur h de cette bande est liée simplement à la densité supérieure de la suite $\{\lambda_n\}$ et la valeur ainsi trouvée pour h ne peut pas être améliorée. Il en résulte des applications multiples à l'étude des points singuliers des fonctions représentées par [A, 1], déduites de théorèmes analogues établis pour les séries de Dirichlet. On peut, en particulier, choisir les coefficients a_n de telle façon que la somme de la série [A, 1] soit holomorphe sur la droite de convergence (théorème d'Aronszajn.).

Enfin l'étude des séries (B) montre qu'elles présentent des analogies profondes avec les séries de Taylor. Nous obtiendrons ainsi, soit par des méthodes directes, soit indirectement, des théorèmes d'une part sur la convergence des séries (B) sur le cercle de convergence et d'autre part des théorèmes sur la position des singularités des fonctions représentées par les séries (B) (théorèmes d'Abel et réciproques, de M. Riesz, M. Landau et M. Fejer).

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à M. G. Valiron pour les précieux conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me donner pendant la préparation de ce travail.

Je tiens également à adresser tous mes remerciements à M. Paul Montel qui a bien voulu accepter de faire paraître ce travail aux *Annales de l'École Normale Supérieure*.

PREMIÈRE PARTIE.

ETUDE DES SÉRIES $\sum' a_n P_n(z)$.

CHAPITRE I.

Domaine de convergence.

Dans cette première Partie, nous allons étudier les séries (1) où les a_n sont des coefficients numériques réels ou imaginaires et $P_n(z)$ un polynome de degré n

$$(1)\qquad F(z) = \sum_{n=0}' a_n P_n(z), \qquad \text{avec} \quad P_0(z) = 1 ; \qquad P_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

les nombres λ_ν formant une suite croissante de nombres positifs tendant vers l'infini.

Avant de voir comment on peut calculer les coefficients a_n de la série (1) à partir des valeurs $F(\lambda_\nu)$ de la fonction $F(z)$, nous allons démontrer les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. — *Si* $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ *converge et si la série* (1) *converge pour* $z = z_0 \neq \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, *la série* (1) *converge pour toute valeur de* z.

Posons, en effet, $a_n P_n(z_0) = b_n$ et $\frac{P_n(z)}{P_n(z_0)} = c_n$. On a, en utilisant la transformation d'Abel,

$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu P_\nu(z) = \sum_{\nu=n}^{m-1} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sum_{s=n}^{\nu} b_s + c_m \sum_{\nu=n}^{m} b_\nu.$$

Puisque la série (1) converge pour $z = z_0$, on peut déterminer un nombre n_0 tel que $\left| \sum_n^m b_\nu \right| < \varepsilon$ pour $m > n \geq n_0, (\varepsilon > 0)$.

D'où l'on tire

$$\left| \sum_{\nu=n}^{m} a_\nu P_\nu(z) \right| < \varepsilon \left(\sum_{\nu=n}^{m-1} |c_\nu - c_{\nu+1}| + |c_m| \right). \tag{2}$$

Or, $|c_m|$ est borné puisque le produit infini $\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)$ converge absolument et que z_0 est différent de λ_i. D'autre part,

$$|c_\nu - c_{\nu+1}| = |c_\nu| \left| 1 - \frac{\lambda_{\nu+1} - z}{\lambda_{\nu+1} - z_0} \right| < \frac{2\,|c_\nu|\,|z - z_0|}{\lambda_{\nu+1}}, \tag{2'}$$

dès que $\lambda_{\nu+1} > 2|z_0|$. Le dernier membre de l'inégalité (2') est le terme général d'une série absolument convergente, donc le coefficient de ε dans (2) est borné pour z donné, m et n étant quelconques. La série $\sum_{n=0}^\infty a_n P_n(z)$ converge donc quel que soit z. Il résulte même de la démonstration que la convergence est uniforme dans tout domaine borné du plan. Il est évident d'autre part que la convergence de la série (1) pour $z = \lambda_i$ n'entraîne pas la convergence de la série pour toute valeur de z. Le domaine de convergence est constitué ou bien, par la suite des points $z = \lambda_i$ (cas trivial), ou bien par le plan tout entier, et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que la série $F(0) = \sum_{n=0}^\infty a_n$ converge.

THÉORÈME 2. — *Si* $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ *diverge et si la série* (1) *converge pour* $z = z_0 \neq \lambda_i$, *elle*

converge uniformément pour z appartenant au secteur (S) *défini par* $z = z_0 + re^{i\varphi}$ *avec* $0 \leq r \leq R$, *quel que soit* $R > 0$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$, $(\eta > 0)$.

En utilisant les mêmes notations que pour le théorème 1, il suffit de démontrer que le coefficient de ε dans (2) est uniformément borné, quel que soit z dans le secteur (S).

Soit σ_0 la partie réelle de z_0; S_0, M_0, M et L_n les images des nombres σ_0, z_0, z et λ_n. Pour $n \geq n_1$, on a les inégalités entre angles compris entre zéro et π

$$\widehat{M_0ML_n} > \frac{\pi}{2} + \frac{\eta}{2} \quad \text{et} \quad \widehat{M_0L_nS_0} < \frac{\eta}{2}.$$

Donc, en écrivant que la projection de L_nM_0 sur L_nM est inférieure ou égale à L_nM_0, on obtient

$$|\lambda_n - z_0| \geq |\lambda_n - z| + r\sin\frac{\eta}{2} \quad \text{où} \quad \left|\frac{\lambda_n - z}{\lambda_n - z_0}\right| \leq 1 - \frac{r\sin\eta}{2|\lambda_n - \sigma_0|},$$

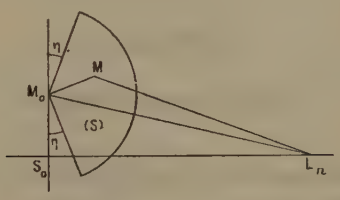


Fig. 1.

on a donc, pour $n \geq n_2$, $n_2 \geq n_1$ étant tel que $\lambda_{n_2} - \sigma_0 - \frac{R}{2}\sin\eta > 0$.

$$(3) \qquad |c_\nu - c_{\nu+1}| \leq \prod_{n=1}^{n_2-1}\left|\frac{\lambda_n - z}{\lambda_n - z_0}\right| \prod_{j=n_2}^{\nu}\left(\frac{\lambda_j - \sigma_0 - \frac{r}{2}\sin\eta}{\lambda_j - \sigma_0}\right)\frac{r}{\lambda_{\nu+1} - \sigma_0}.$$

Désignons par d_ν le second produit du second membre de (3). On a évidemment $0 < d_\nu < 1$; d'après l'égalité

$$d_\nu \frac{r}{\lambda_{\nu+1} - \sigma_0} = (d_\nu - d_{\nu+1})\frac{2}{\sin\eta}$$

on obtient

$$|c_\nu - c_{\nu+1}| \leq \frac{2C}{\sin\eta}(d_\nu - d_{\nu+1}).$$

C désignant le maximum du module du polynome $\prod_{i=1}^{n_2-1}\left(\frac{\lambda_i - z}{\lambda_i - z_0}\right)$ quand z appartient au secteur (S). Donc,

$$(4) \qquad \sum_{\nu=n}^{m-1}|c_\nu - c_{\nu+1}| \leq \frac{2C}{\sin\eta}(d_n - d_m) \leq \frac{2C}{\sin\eta}.$$

L'inégalité (4) entraîne que $|c_m|$ est borné puisqu'il en est ainsi pour $|c_{n_i}|$, donc aussi le coefficient de ε dans (2). Le théorème 2 est démontré.

De ce théorème, on déduit que la série (1) converge pour $\sigma = \mathcal{R}(z) > \sigma_0 = \mathcal{R}(z_0)$ et que, par conséquent, il existe un domaine de convergence constitué par un demi-plan limité à gauche par une droite $\mathcal{R}(z) = \mathcal{S}$. Cette droite est appelée la droite de convergence de la série (1) et $\mathcal{S}$ l'abscisse de convergence. La convergence étant uniforme dans tout domaine fermé, borné, intérieur au demi-plan $\sigma > \mathcal{S}$, la série (1) y représente une fonction holomorphe $F(z)$.

Si $\mathcal{S} = -\infty$, $F(z)$ est une fonction entière; si la série (1) ne converge pour aucune valeur de z autre que λ_i, nous dirons que $\mathcal{S} = +\infty$.

Le théorème 2 nous indique plus encore; si la série (1) converge pour $z_0 = \mathcal{S} + i\tau$, $\mathcal{S}$ étant l'abscisse de convergence, la fonction $F(z)$ est continue au point z_0 quand z tend vers z_0 à l'intérieur du secteur (S). Ce théorème est en défaut, si $z_0 = \lambda_i$ comme nous le montrerons par des exemples.

CHAPITRE II.

Calcul des coefficients.

Soit $F(z)$ la somme de la série d'interpolation (1). Comme cette série n'a qu'un nombre fini de termes pour $z = \lambda_i$, il est facile de calculer ses coefficients en fonction des valeurs de la fonction $F(z)$ pour $z = \lambda_i$. On a, en effet,

$$(5)\qquad \begin{cases} F(\lambda_1) = a_0, \\ F(\lambda_2) = a_0 + a_1\left(1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F(\lambda_n) = a_0 + a_1\left(1 - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) + \dots + a_{n-1}P_{n-1}(\lambda_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Système qui admet une seule solution $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$, les a_n se déterminant de proche en proche sans impossibilité, ni indétermination, puisque dans la $n^{\text{ième}}$ équation le coefficient de a_{n-1} n'est pas nul, les λ_n étant supposés tous différents les uns des autres. Ce calcul est d'ailleurs à la base de la théorie des différences divisées, théorie exposée dans le premier Chapitre du livre de M. Norlund [1]. On pourrait ainsi croire que la représentation d'une fonction $F(z)$ par une série d'interpolation, lorsqu'elle est possible, est unique. C'est effectivement le cas lorsque $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ converge ou, si $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ diverge, lorsque $\mathcal{S} < \lambda_1$. Mais lorsque $\mathcal{S}$ est supérieur ou égal à λ_1, la série (1) qui converge encore pour $z = \lambda_i$ ($\lambda_i \leq \mathcal{S}$) n'y représente plus forcément $F(z)$; les valeurs $F(\lambda_i)$

peuvent alors être prises arbitrairement, et l'on voit que la série (1) dépend alors de p constantes arbitraires, p étant le nombre des λ_i inférieurs ou égaux à S. En effet, désignons par A_i les valeurs arbitraires $F(\lambda_i)$; les coefficients a_n dépendent linéairement des A_i. Nous allons montrer que les coefficients de A_i sont des séries admettant pour abscisses de convergence respectivement les nombres λ_i.

Soit $O_p(z)$ la série coefficient de A_p. Elle s'obtient en faisant $F(\lambda_i)=0$ si $i\neq p$ et $F(\lambda_p)=1$. Un calcul facile montre qu'on a alors

$$a_n=0 \quad (0\leq n\leq p-2), \qquad a_n=\frac{1}{\lambda_{n+1}P'_{n+1}(\lambda_p)} \quad (n\geq p-1).$$

Nous allons montrer que cette série $O_p(z)$ converge pour $\sigma>\lambda_p$ et y représente zéro, tandis qu'elle est égale à 1 pour $z=\lambda_p$. En effet, le terme général de $O_p(z)$ est égal à

$$a_nP_n(z)=\frac{P_n(z)}{\lambda_{n+1}P'_{n+1}(\lambda_p)} \qquad (n\geq p-1).$$

D'autre part

$$\sum_{n=p-1}^{q} a_nP_n(z)=\frac{P_{q+1}(z)}{(\lambda_p-z)P'_{q+1}(\lambda_p)}$$

et il nous suffit de montrer que $\frac{P_n(z)}{P'_n(\lambda_p)}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, z étant fixé, et tel que

$$\sigma=\mathcal{R}(z)>\lambda_p.$$

Il en sera alors de même de $a_nP_n(z)$. Cela résulterait aussi de ce que

$$\lim_{n=\infty}\frac{P'_{n+1}(\lambda_p)}{P'_n(\lambda_p)}=1.$$

Négligeons le quotient des $(p-1)$ premiers termes du numérateur par ceux du dénominateur, ce quotient restant borné quel que soit z dans un domaine borné. Il vient

$$(z-\lambda_p)\prod_{j=p+1}^{n}\left(\frac{\lambda_j-z}{\lambda_j-\lambda_p}\right),$$

expression qui tend vers zéro comme cela résulte du comportement asymptotique de $P_n(z)$ pour z fixe et n tendant vers l'infini (*voir* Chapitre III).

Ainsi, les séries $O_p(z)$ qui convergent pour $\sigma>\lambda_p$ et aussi pour $z=\lambda_i$ ont pour somme zéro pour $\sigma>\lambda_p$ et $z=\lambda_j$ $(j\leq p-1)$ et 1 pour $z=\lambda_p$.

On obtient ainsi des séries dont la somme n'est pas continue dans le secteur (S) de sommet λ_p. Ces séries ne satisfont pas au théorème 2 d'Abel. Elles constituent l'exception que nous avions signalée à la fin du paragraphe précédent.

Il est évident que, réciproquement, si l'on impose à une fonction $F(z)$ d'être nulle pour $z = \lambda_n (n \geq p+1)$ sa série d'interpolation, qui ne représente peut-être pas $F(z)$, est de la forme $\sum_{j=1}^{p} A_j O_j(z)$ et représente zéro pour $\sigma > \lambda_r$, $O_r(z)$ étant la fonction d'ordre r le plus élevé dont le coefficient n'est pas nul.

Une fonction représentable par une série (1) peut donc avoir une infinité de représentations, les séries obtenues différant entre elles par des développements de o. On peut ainsi agrandir parfois le domaine de convergence de la série (1) en y ajoutant un développement de o convenable, à condition que $F(z)$ soit holomorphe dans un demi-plan plus grand que le domaine de convergence de la série initiale, et que l'abscisse de convergence initiale soit un des nombres λ_i.

On peut, par exemple, représenter la fonction $F(z) = \frac{1}{z - z_0}$, z_0 étant un nombre quelconque réel ou complexe. Le calcul des coefficients peut se faire par la méthode des différences divisées, mais il resterait à montrer que la série obtenue représente bien $F(z)$. Nous opérerons plus rapidement de la façon suivante :

Soit

$$\frac{1}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z).$$

En multipliant les deux membres par $z - z_0$, on obtient l'égalité

$$-1 + (z - z_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) = 0,$$

valable pour $z \neq z_0$ et en particulier pour $\sigma > \sigma_0$ et où le premier membre est une série d'interpolation aux points z_0 et λ_i.

L'introduction du nombre z_0 ne modifie pas le résultat trouvé plus haut pour les développements $O_p(z)$ et l'on obtient ainsi l'égalité, valable pour $\sigma > \sigma_0$

$$(6) \qquad \frac{1}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \qquad a_n = \frac{1}{\lambda_{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} \left(1 - \frac{z_0}{\lambda_j}\right)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

La fonction qui admet le point z_0 pour pôle simple ne peut être représentée par la série (1) dans un domaine plus grand. A ce développement, on peut ajouter des développements de o d'abscisse de convergence inférieure à σ_0 sans rien changer aux résultats obtenus pour $\sigma > \sigma_0$.

Lorsque $z_0 = \lambda_p$ le développement précédent n'a plus de sens; il suffit alors de remplacer le développement (6) par celui de $\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{\lambda_p - z_0} O_p(z)$ et de faire tendre z_0 vers λ_p.

En désignant par $S_n(z)$ le produit $\prod_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n+1}\left(1-\frac{z}{\lambda_i}\right)$ on obtient

$$(7)\qquad \begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\lambda_{n+1}\prod\limits_{i=1}\left(1-\dfrac{\lambda_p}{\lambda_i}\right)} & (0\leq n\leq p-2),\\ a_n=\dfrac{\lambda_p S_n'(\lambda_p)}{\lambda_{n+1}S_n^2(\lambda_p)} & (n\geq p-1); \end{cases}$$

$$(7')\qquad \frac{1}{z-\lambda_p}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n P_n(z).$$

L'égalité (7') étant valable pour $z=\lambda_i$ $(i\leq p-1)$ et $\sigma>\lambda_p$.

En dérivant l'égalité (6) par rapport à z_0 on obtient des formules permettant de représenter par sa série d'interpolation un élément simple quelconque $\frac{1}{(z-z_0)^p}$, le domaine de validité de la représentation étant le demi-plan $\sigma>\sigma_0$. Une fonction rationnelle z est donc représentable par sa série d'interpolation pour toute valeur de z telle que $\sigma>\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ étant la plus grande des abscisses des pôles de la fonction. Ce résultat n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de théorèmes que nous démontrerons au Chapitre VI.

CHAPITRE III.

Convergence absolue.

C'est un fait bien connu (Norlund [1], p. 108) que les séries d'interpolation peuvent converger dans un domaine à deux dimensions, sans y converger absolument, ce qui ne se présente pas pour les séries de Taylor (séries d'interpolation pour lesquelles $\lambda_i=0$). Pour mettre ces faits en évidence dans le cas général nous allons établir quelques théorèmes analogues à ceux démontrés par Bendixson [2] dans le cas où $\lambda_n=n$. Et d'abord, nous étudierons le comportement asymptotique du polynome $P_n(z)$, pour z fixe et n tendant vers l'infini.

Comportement de $|P_n(z)|$ *quand* $n\to\infty$. — Supposons que z reste dans un domaine (D) fermé et borné, laissant à l'extérieur les points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, naturellement en nombre fini. On pourra prendre, par exemple, pour (D) l'intérieur du cercle $|z|\leq R$ privé des cercles $|z-\lambda_i|\leq\rho_i$ centrés aux points λ_i tels que $\lambda_i\leq R$. Déterminons un nombre n_0 tel que, ε étant un nombre positif donné à l'avance, on ait les inégalités $\lambda_n\geq 2R$ et $\lambda_n\geq\frac{2R^2}{\varepsilon}$ pour $n\geq n_0$. Alors

$$\left|\log\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)+\frac{z}{\lambda_n}\right|\leq\left|\frac{z^2}{2\lambda_n^2}\right|\left(1+\left|\frac{z}{\lambda_n}\right|+\ldots\right)\leq\left|\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2\lambda_n}.$$

On a donc

$$e^{(-\sigma-\varepsilon)\left(\frac{1}{\lambda_{n_0}}+\frac{1}{\lambda_{n_0+1}}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n}\right)}<\left|\frac{P_n(z)}{P_{n_0-1}(z)}\right|<e^{(-\sigma+\varepsilon)\left(\frac{1}{\lambda_{n_0}}+\frac{1}{\lambda_{n_0+1}}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n}\right)}.$$

Or, quand z reste dans (D), la quantité

$$|P_{n_0-1}(z)|\,e^{(\sigma\pm\varepsilon)\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_{n_0-1}}\right)}$$

reste comprise entre deux nombres positifs M_1 et M_2, qui ne dépendent que de (D), de ε et naturellement de la suite $\{\lambda_n\}$. On a donc, dans (D),

$$(8)\qquad \begin{cases} M_1 e^{-[\sigma-\varepsilon]S(n)}<|P_n(z)|<M_2 e^{[-\sigma+\varepsilon]S(n)}, \\ S(n)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\lambda_\nu} \qquad (n\geq 1). \end{cases}$$

En particulier $P_n(z)$ tend vers l'infini avec n pour $\sigma<0$ et vers zéro pour $\sigma>0$.

Dans le cas où la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}$ converge, on peut améliorer l'inégalité (8) en faisant $\varepsilon=0$ comme on le voit facilement en modifiant légèrement notre démonstration. Nous allons donner à l'inégalité (8) une autre forme qui nous sera plus commode par la suite.

Soit $\lambda(x)$ une fonction de x définie pour $x\geq 1$ continue croissante et telle que $\lambda(n)=\lambda_n$; posons

$$I(x)=\int_1^x\frac{dx}{\lambda(x)}.$$

On a, puisque les nombres $\frac{1}{\lambda_n}$ forment une suite décroissante de nombres positifs,

$$I(n)\leq S(n)\leq I(n)+\frac{1}{\lambda_1}.$$

Si bien que dans (8) on peut remplacer $S(n)$ par $I(n)$ en modifiant éventuellement les constantes M_1 et M_2. En définitive, on a pour z dans (D)

$$(9)\qquad \frac{1}{M}e^{-\sigma-\varepsilon|I(n)|}<|P_n(z)|<M e^{[-\sigma+\varepsilon]|I(n)|}.$$

M constante >1, ne dépendant que de (D) et de ε. Dans (9) il est possible de faire $\varepsilon=0$ si $\sum\frac{1}{\lambda_n^2}$ converge. Le comportement asymptotique de $P_n(z)$ montre d'abord que le rapport $\left|\frac{P_n(z)}{P_n(z_0)}\right|$ est borné supérieurement lorsque $\sigma>\sigma_0$. Donc si une série (1) converge absolument pour $z=z_0\neq\lambda_i$, elle converge absolument pour toute valeur de z telle que $\sigma>\sigma_0$.

Le domaine de convergence absolue est donc un demi-plan $\sigma > \mathcal{S}_a$. Dans le cas où la série (1) converge absolument en un point de la droite $\sigma = \mathcal{S}_a$ et où $\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$ converge, il y a convergence absolue sur toute la droite $\sigma = \mathcal{S}_a$. Il peut donc se faire, dans certains cas, que la série (1) converge simplement pour $\mathcal{S} < \sigma < \mathcal{S}_a$. Nous montrerons alors :

THÉORÈME. — *La bande de convergence simple de la série* (1) *a une largeur maximum* δ, *égale à l'exposant de convergence de la suite* $e^{-\mathrm{I}(n)}$ *et qui satisfait à la double inégalité*

$$\frac{1}{D_s} \leq \delta \leq \frac{1}{D_i}, \tag{10}$$

D_i *et* D_s *étant les densités inférieure et supérieure de la suite* $\{\lambda_n\}$.

On sait que l'on définit ces densités par

$$D_i = \varliminf_{n=\infty} \frac{n}{\lambda_n} \quad \text{et} \quad D_s = \varlimsup_{n=\infty} \frac{n}{\lambda_n}.$$

En effet, si la série (1) converge pour z_0 et si δ est l'exposant de convergence de la suite $e^{-\mathrm{I}(n)}$, on a

$$|a_n \mathrm{P}_n(z_0)| < \mathrm{C}, \qquad \text{donc pour} \quad z = z_0 - \delta + 3\varepsilon \qquad (\varepsilon > 0),$$
$$|a_n \mathrm{P}_n(z)| < \mathrm{CM}^2 e^{-(\delta+\varepsilon)\mathrm{I}(n)},$$

terme général d'une série convergente, M étant la constante de l'inégalité (9) correspondant à ε.

D'autre part, la suite $\{\lambda_n\}$ étant fixée, il est possible de choisir les coefficients a_n tels que la série converge pour $z = z_0$ et ne converge pas absolument pour $z = z_0 + \delta - 4\varepsilon$ quel que soit $\varepsilon > 0$. Il suffit pour cela de prendre

$$a_n \mathrm{P}_n(z_0) = (-1)^n e^{-\varepsilon \mathrm{I}(n)}.$$

La série (1) converge pour $z = z_0$ puisque c'est une série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers zéro en décroissant. Or,

$$|a_n \mathrm{P}_n(z)| > \frac{1}{\mathrm{M}^2} e^{(-\delta+\varepsilon)\mathrm{I}(n)},$$

terme général d'une série divergente, d'après la définition de δ.

La première partie du théorème est démontrée. Il reste à prouver les inégalités (10).

Supposons d'abord que D_i et D_s ne soient ni nuls ni infinis. Il existe un nombre n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $\frac{n}{\lambda_n} < D_s + \varepsilon$. On en tire immédiatement

$$\mathrm{I}(n) > (\mathrm{D}_s + \varepsilon) \log n + \mathrm{K},$$

K étant indépendant de n. L'exposant de convergence de la suite $e^{-\mathrm{I}(n)}$ est donc

supérieur ou égal à $\frac{1}{D_s+\varepsilon}$. D'où résulte la première inégalité. Pour démontrer la seconde, il suffit de remarquer qu'à partir d'un certain rang, on a, pour $0<\varepsilon<D_i$, $\frac{n}{\lambda_n}>D_i-\varepsilon$.

Dans le cas où la suite $\{\lambda_n\}$ est mesurable, c'est-à-dire lorsque $\frac{n}{\lambda_n}$ a une limite D quand $n\to\infty$, les inégalités (10) nous donnent la valeur exacte de δ. Il en est de même si l'on a $D_i=\infty$ (auquel cas $\delta=0$) ou $D_s=0$ (auquel cas $\delta=\infty$); ainsi, si $\lambda_n=An$, $\delta=A$; si $\lambda_n=n^\alpha(0<\alpha<1)$, $\delta=0$, il ne peut pas y avoir de bande de convergence simple. Si $\lambda_n=(n+1)\log(n+1)$, $D=0$, $\delta=\infty$. Il existe effectivement des séries qui convergent dans tout le plan et ne convergent absolument nulle part (sauf pour $z=\lambda_i$). Prenons par exemple,

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\qquad(0<\alpha<1).$$

Pour $z=\sigma$ réel quelconque, $P_n(z)$ est réel et garde un signe constant à partir d'un certain rang puisque $1-\frac{\sigma}{\lambda_n}$ est positif pour $\lambda_n>\sigma$,

$$I(n)=\log\left[\frac{\log(n+1)}{\log 2}\right]$$

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\log(n+1)}{\log 2}\right]^{-\sigma}<|P_n(z)|<M\left[\frac{\log(n+1)}{\log 2}\right]^{-\sigma}.$$

La série (1) alternée converge quel que soit σ puisqué la valeur absolue du terme général tend vers zéro en décroissant; d'autre part la série (1) ne peut converger absolument nulle part (sauf pour $z=\lambda_i$) puisque son terme général est en valeur absolue supérieur à $\frac{K_1}{n^\alpha\log^\sigma(n+1)}$ terme général d'une série divergente.

Par contre, si l'on prend la même suite $\{\lambda_n\}$ mais $a_n=\frac{1}{(n+2)\log(n+2)}$, la série (1) qu'on obtient admet pour domaine de convergence simple et absolue le demi-plan $\sigma>0$, le terme général pour $z=\sigma$ étant de signe constant à partir d'un certain rang et de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n\log^{1+\sigma}n}$ $(n\geq 2)$.

Nous allons montrer maintenant que les inégalités (10) ne peuvent pas être améliorées. D'après sa définition, $I(x)$ est une fonction croissante dont la dérivée positive continue tend vers zéro en décroissant. De plus, $\lambda_n=I'(n)$.

Nous ferons la démonstration dans le cas qui présente le plus de difficultés où

$$D_i=0,\qquad D_s=\infty \tag{11}$$

et construirons une fonction satisfaisant à

$$\begin{cases}\varliminf\limits_{n=\infty} nI'(n)=0,\\ \varlimsup\limits_{n=\infty} nI'(n)=\infty,\end{cases}\tag{12}$$

et à l'une des trois conditions

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\mathrm{I}(n)} = \delta \qquad (\delta > 0), \tag{13}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\mathrm{I}(n)} = 0, \tag{13'}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\mathrm{I}(n)} = \infty. \tag{13''}$$

Pour cela, dessinons deux axes de coordonnées Ox et Oy rectangulaires et marquons sur Ox les points A_p d'abscisse $a_p = p^{p^2}$, et B_p d'abscisse $b_p = pa_p$ (p entier ≥ 3). Les segments A_pB_p ne se recouvrent pas; soit (C) la courbe d'équation $y = \log x$. Marquons sur (C) les points M_p d'abscisse a_p et N_p d'abscisse b_p. Définissons les points M'_p et N'_p d'abscisse respectivement

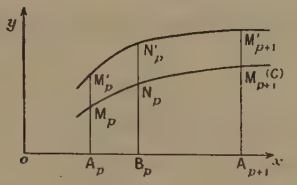


Fig. 2.

égale à a_p et b_p situés sur la courbe (Γ) d'équation $Y = Y(x)$, leurs ordonnées étant définies de proche en proche par

$$\begin{aligned}
Y(a_3) &= \log a_3, \\
Y(b_3) - Y(a_3) &= \frac{2}{\log 3}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
Y(a_p) - Y(b_{p-1}) &= \log a_p - \log b_{p-1} \\
Y(b_p) - Y(a_p) &= \frac{p-1}{\log p} \qquad (p \geq 4).
\end{aligned}$$

Joignons les points $M'_pN'_p$ par des arcs de paraboles d'axe parallèle à Oy, ayant des tangentes en M'_p et N'_p de pente respectivement égale à $\frac{3}{2a_p \log p}$ et $\frac{1}{2a_p \log p}$, ce qui est possible puisque la pente de la corde $M'_pN'_p$ est précisément moyenne arithmétique des pentes des tangentes en M'_p et N'_p. Joignons N'_p à M'_{p+1} par la courbe déduite de l'arc correspond de (C) par la translation $\overrightarrow{N_pN'_p}$. Enfin, dans le voisinage de chaque point anguleux de la courbe ainsi obtenue, remplaçons la courbe par une courbe voisine de façon à ce que la pente de la tangente à la courbe (Γ) ainsi modifiée soit fonction continue de x et tende vers zéro en décroissant quand x tend vers l'infini.

Soit $J(x)$ la fonction ainsi représentée. Il est possible de faire les raccords de telle façon que

$$J'(a_p) < \frac{2}{a_p \log p}, \qquad J'(b_p) > \frac{1}{4 a_p \log p} - \frac{p}{4 b_p \log p}$$

et l'on a

$$\lim_{p=\infty} a_p J'(a_p) = 0, \qquad \lim_{p=\infty} b_p J'(b_p) = +\infty,$$

de plus, on a, pour $a_p \leq x \leq b_p$,

$$J(x) - \log x \leq \sum_{n=3}^{p} \left(\frac{n-1}{\log n} - \log n \right) \leq (p-1)(p-3)$$

et, pour $b_p \leq x \leq a_{p+1}$,

$$\frac{J(x) - \log x}{\log x} \leq \frac{J(b_p) - \log b_p}{\log b_p} \leq \frac{(p-1)(p-3)}{(p^2+1)\log p}.$$

En vérifiant, par un calcul facile, que pour x assez grand on a $J(x) > \log x$, on obtient

$$\lim_{x=\infty} \frac{J(x)}{\log x} = 1.$$

La fonction $I_1(x) = \frac{J(x)}{\delta}$ vérifie (12) et (13);

La fonction $I_2(x) = J(x) \log_3(Ax)$ vérifie (12) et (13');

La fonction $I_3(x) = \frac{J(x)}{\log_3(Ax)}$ vérifie (12) et (13'');

A étant choisi suffisamment grand pour que les conditions imposées aux fonctions $I_2(x)$ et $I_3(x)$ soient vérifiées pour $x \geq 1$.

A partir des fonctions $I_1(x)$, $I_2(x)$ et $I_3(x)$, il est facile de construire des séries (1) telles que $D_i = 0$; $D_s = +\infty$ et dont l'épaisseur de la bande de convergence simple soit respectivement égale à δ, zéro et $+\infty$, puisque pour les suites $\{\lambda_n\}$ correspondantes, les fonctions $I(x)$ se comportent, quand n tend vers l'infini respectivement comme

$$\frac{\log x}{\delta}, \quad \log x \log_3(Ax), \quad \frac{\log x}{\log_3(Ax)}.$$

CHAPITRE IV.

Détermination des abscisses de convergence simple et absolue à partir des coefficients.

Théorème. — *En utilisant les notations du Chapitre III et en posant*

$$\alpha = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \left| \sum_{0}^{n} a_\nu \right|}{l(n)} \qquad (0 \leq \alpha \leq +\infty)$$

et lorsque $\sum_{0}^{\infty} a_\nu$ *converge*

$$\beta = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \left| \sum_{n}^{\infty} a_\nu \right|}{\mathrm{I}(n)} \qquad (-\infty \leq \beta \leq 0)$$

et en désignant par $\mathcal{S}$ *l'abscisse de convergence simple de la série, on a les égalités*

$$\mathcal{S} = \alpha \quad \text{si} \quad \mathcal{S} < 0,$$

$$\mathcal{S} = \beta \quad \text{si} \quad \sum_{0}^{\infty} a_\nu \text{ converge.}$$

Pour démontrer ce théorème, nous étudierons d'abord le comportement de l'expression

$$\mathrm{S}(n, m) = \sum_{\nu=n}^{m-1} \frac{e^{k\mathrm{I}(\nu)}}{\lambda(\nu)} \qquad (k \text{ nombre réel quelconque}).$$

Lorsque k est négatif, les termes de cette somme vont en décroissant et l'on a immédiatement

$$\frac{1}{k}\left[e^{k\mathrm{I}(m)} - e^{k\mathrm{I}(n)}\right] \leq \mathrm{S}(n, m) \leq \frac{1}{k}\left[e^{k\mathrm{I}(m-1)} - e^{k\mathrm{I}(n-1)}\right].$$

Pour $k = 0$ on a visiblement

$$\mathrm{I}(m) - \mathrm{I}(n) \leq \mathrm{S}(n, m) \leq \mathrm{I}(m-1) - \mathrm{I}(n-1).$$

Mais, si k est positif, il n'est pas sûr que la fonction $\frac{e^{k\mathrm{I}(x)}}{\lambda(x)}$ soit croissante, ou décroissante, pour $x \geq x_0$. Nous opérerons alors de la façon suivante :

La fonction $y(x) = \frac{e^{k\mathrm{I}(x)}}{\lambda(x)}$ définie pour $x \geq 1$ admettra une dérivée $y'(x)$ si la fonction croissante $\lambda(x)$ interpolant les λ_n est elle-même pourvue d'une dérivée positive $\lambda'(x)$. On a alors

$$\frac{y'}{y} = \frac{k - \lambda'(x)}{\lambda(x)},$$

$\frac{y'}{y}$ est donc borné supérieurement par la quantité $\frac{k}{\lambda(x)}$ qui tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$. En intégrant l'inégalité

$$\frac{y'}{y} \leq \frac{k}{\lambda(x)} + \varepsilon_1,$$

valable pour $x \geq x_0$, ε_1 arbitrairement petit, on obtient

$$\frac{y(x_2)}{y(x_1)} \leq e^{\varepsilon_1(x_2 - x_1)} \qquad \text{valable pour} \quad x_2 \geq x_1 \geq x_0.$$

Soit, alors $y(p)$ la valeur prise par la fonction $y(x)$ pour $x = p$ entier, supérieur à x_0; traçons les arcs de courbe $\mathfrak{A}_p$ définis par

$$Y_p(x) = y(p)\, e^{\varepsilon_1 (x-p)} \qquad (|x-p| \leq 1).$$

Dans l'intervalle $p \leq x \leq p+1$, on a

$$Y_p(x) \leq y(x) \leq Y_{p+1}(x) \tag{14}$$

et

$$\frac{Y_{p+1}(x)}{Y_p(x)} = \frac{y(p+1)}{y(p)}\, e^{-\varepsilon_1} \leq 1,$$

indépendant de x, ce qui précise la position relative des arcs $\mathfrak{A}_p$.

De (14) on déduit immédiatement l'inégalité

$$\frac{e^{-\varepsilon_1}}{k}\left[e^{k(n)} - e^{k(n)}\right] \leq S(n, m) \leq \frac{e^{\varepsilon_1}}{k}\left[e^{k(m-1)} - e^{k(n-1)}\right] \tag{15}$$

qui va nous être utile par la suite.

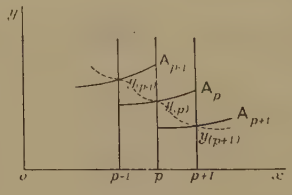


Fig. 3.

Dans une première partie, nous allons démontrer que si la série (1) converge pour $z = \sigma + i\tau \neq \lambda_i$ on a $\alpha \leq \sigma$ si $\sigma \geq 0$, et $\beta \leq \sigma$ si $\sigma < 0$. Dans une seconde partie, nous montrerons que, réciproquement, la série (1) converge pour $\sigma > \alpha$ ou $\sigma > \beta$, ce qui prouvera le théorème.

1° Nous supposons que la série (1) converge pour

$$z = \sigma + i\tau \neq \lambda_i \qquad (\sigma \geq 0).$$

Posons $a_n P_n(z) = b_n$ et appliquons la transformation d'Abel à

$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu + \sum_{s=n}^{m-1} \left(\frac{1}{P_{s+1}} - \frac{1}{P_s}\right) \sum_{\nu=s+1}^{\infty} b_\nu - \frac{1}{P_m} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} b_\nu. \tag{16}$$

Or,

$$\frac{1}{P_{s+1}} - \frac{1}{P_s} = \frac{1}{P_s} \times \frac{z}{\lambda_{s+1} - z}.$$

Nous savons d'autre part que pour z fixé, on a

$$\left|\frac{1}{P_s(z)}\right| < M\, e^{\sigma + \varepsilon_1 |s|}.$$

Choisissons n_0 tel que pour $m \geq n \geq n_0$, on ait

$$\left| \sum_{n}^{m} b_\nu \right| < \eta \qquad \text{et} \qquad \frac{\sigma+\varepsilon}{\lambda(n)} \leq \varepsilon_1.$$

On a alors

$$\left| \sum_{n}^{m} a_\nu \right| < \eta \left[\mathrm{M}\, e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(n)} + \mathrm{M}_1 \sum_{s=n}^{m-1} \frac{e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(s)}}{\lambda(s)} + \mathrm{M}\, e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(m)} \right],$$

où M et M_1 sont indépendants de η.

Faisons $n = n_0$; le premier terme du crochet est fixe, le second est majoré par $\frac{e^{\varepsilon_1}}{\sigma+\varepsilon}\, e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(m)}$ donc,

$$\left| \sum_{n_0}^{m} a_\nu \right| < \mathrm{M}_2 \eta\, e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(m)},$$

ou enfin,

$$\lim_{m=\infty} \frac{\sum_{0}^{m} a_\nu}{e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(m)}} = 0. \tag{17}$$

Dans le cas où $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$ converge, on peut remplacer (17) par

$$\begin{cases} \lim\limits_{m=\infty} \dfrac{\sum_{0}^{m} a_\nu}{e^{\sigma \mathrm{I}(m)}} = 0 & (\sigma > 0), \\ \lim\limits_{m=\infty} \dfrac{\sum_{0}^{m} a_\nu}{\mathrm{I}(m)} = 0 & (\sigma = 0), \end{cases} \tag{17'}$$

Supposons maintenant que la série (1) converge pour $z = \sigma + i\tau (\sigma < 0)$ et soit ε tel que $0 < \varepsilon < -\sigma$. La série $\sum_{1}^{\infty} a_\nu$ est alors convergente; on peut faire tendre m vers l'infini dans (16) et pour $n \geq n_0$ on a

$$\left| \sum_{n}^{\infty} a_\nu \right| < \eta \left[\mathrm{M}\, e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(n)} - \frac{\mathrm{M}_1}{\sigma+\varepsilon} e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(n-1)} \right],$$

d'où l'on tire

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{n}^{\infty} a_\nu}{e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(n)}} = 0.$$

Si $\mathcal{S}$ désigne l'abscisse de convergence de la série (1), on a donc

$$\alpha \leq \mathcal{S} \quad \text{si } \mathcal{S} \geq 0, \qquad \beta \leq \mathcal{S} \quad \text{si } \mathcal{S} < 0. \tag{18}$$

2° Réciproquement, supposons α fini, positif ou nul, on a alors

$$\sum_{s=n}^{m} a_s P_s(z) = \sum_{s=n}^{m-1} (P_s - P_{s-1}) \sum_{0}^{s} a_\nu - P_n \sum_{0}^{n-1} a_\nu + P_m \sum_{0}^{m} a_\nu.$$

Or,

$$|P_s(z)| < M e^{-\sigma+\varepsilon)\lambda(s)},$$

$$|P_s - P_{s-1}| = |P_s| \frac{|z|}{\lambda_{s-1}} < M_1 \frac{e^{(-\sigma+\varepsilon)\lambda(s)}}{\lambda(s)}.$$

Par hypothèse, on a

$$\left| \sum_{n}^{s} a_\nu \right| < C e^{(\alpha-\varepsilon)\lambda(s)} \qquad (\varepsilon > 0),$$

donc,

$$\left| \sum_{n}^{m} a_s P_s \right| < C M_1 \sum_{n}^{m} \frac{e^{(\alpha-2\varepsilon-\sigma)\lambda(s)}}{\lambda(s)} + MC[e^{(\alpha+2\varepsilon-\sigma)\lambda(m)} + e^{(\alpha-2\varepsilon-\sigma)\lambda(n)}].$$

Ce qui prouve que la série (1) converge pour $\sigma = \alpha + 3\varepsilon$.

D'autre part, si $\sum_{0}^{\infty} a_\nu$ converge et si β est fini négatif, la série (1) converge pour $\sigma > \beta$. En effet, on a

$$\sum_{s=n}^{m} a_s P_s = \sum_{n+1}^{m} (P_s - P_{s-1}) \sum_{s}^{\infty} a_\nu + P_n \sum_{n}^{\infty} a_\nu - P_m \sum_{m+1}^{\infty} a_\nu.$$

Or,

$$|P_s - P_{s-1}| < M_1 \frac{e^{(-\sigma+\varepsilon)\lambda(s)}}{\lambda(s)}$$

et

$$\left| \sum_{s}^{\infty} a_\nu \right| < C e^{(\beta-\varepsilon)\lambda(s)} \qquad (\varepsilon > 0),$$

d'où

$$\left| \sum_{n}^{m} a_s P_s \right| < C M_1 \sum_{n+1}^{m} \frac{e^{(\beta+2\varepsilon-\sigma)\lambda(s)}}{\lambda(s)} + MC e^{(\beta+2\varepsilon-\sigma)\lambda(n)} + MC e^{(\beta+2\varepsilon-\sigma)\lambda(m)},$$

expression qui tend vers o pour $\sigma = \beta + 3\varepsilon$ quand n tend vers l'infini. On en déduit (19) $\mathcal{S} \leq \beta$. En comparant (18) et (19) on obtient le théorème annoncé.

Abscisse de convergence absolue. — Pour déterminer l'abscisse $\mathcal{S}_a$ de convergence absolue de la série (1), il suffit de remarquer que pour n assez grand et z réel, $P_n(z)$ est réel et a un signe bien déterminé. Il en résulte que $\mathcal{S}_a$ est l'abscisse de convergence de la série $\sum_{0}^{\infty} |a_n| P_n(z)$. Donc, en posant

$$\alpha' = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \sum_{0}^{n} |a_\nu|}{\lambda(n)} \qquad (0 \leq \alpha' \leq +\infty),$$

et lorsque $\sum_{0}^{\infty} |a_\nu|$ converge

$$\beta' = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \sum_{\nu}^{\infty} |a_\nu|}{\mathrm{I}(n)} \qquad (-\infty \leq \beta' \leq 0).$$

On a

$$\mathcal{S}_a = \alpha' \quad \text{si} \quad \mathcal{S}_a \geq 0$$

et

$$\mathcal{S}_a = \beta' \quad \text{si} \quad \sum_{1}^{\infty} |a_\nu| \text{ converge.}$$

CHAPITRE V.

Conditions nécessaires de représentation.

Soit une série (1) qui converge pour $\mathcal{R}(z) = \sigma > \mathcal{S}$. La convergence de la série étant uniforme dans tout domaine fermé, borné, complètement intérieur au demi-plan de convergence $\sigma > \mathcal{S}$, la série (1) représente une fonction $\mathrm{F}(z)$ holomorphe pour $\sigma > \mathcal{S}$. Nous allons voir en outre que la croissance de $\mathrm{F}(z)$, quand z tend vers l'infini dans le domaine de convergence est limitée par la donnée de la suite $\{\lambda_n\}$ et de l'abscisse de convergence. Dans le Chapitre suivant, nous donnerons des conditions suffisantes pour qu'une fonction $\mathrm{F}(z)$ soit représentée par sa série d'interpolation. Les conditions nécessaires et suffisantes que nous donnerons ne sont pas absolument identiques, mais s'écartent peu les unes des autres, si bien que l'on délimite ainsi avec une assez grande précision l'ensemble des fonctions $\mathrm{F}(z)$ représentables par les séries (1). Dans cette étude, nous introduirons une fonction $\Phi(r, \theta)$ définie pour $r > 0$ et $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, que nous appellerons la fonction indicatrice de la suite $\{\lambda_n\}$ et qui jouera un grand rôle dans les inégalités que nous établirons.

Étude du maximum de $|\mathrm{P}_n(z)|$ *pour* z *fixe,* n *variable.* — Supposons la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu}$ divergente. Nous désignerons par $\lambda(x)$ une fonction définie pour $x \geq 1$, admettant une dérivée positive, continue, telle que $\lambda(n) = \lambda_n$. Nous désignerons par $x(\lambda)$ la fonction inverse de la précédente, définie pour $\lambda \geq \lambda_1$. Soit enfin

$$\mathrm{I}(x) = \int_{1}^{x} \frac{dx}{\lambda(x)}.$$

Les résultats que l'on obtient sont très différents suivant que $\mathcal{R}(z) = \sigma$ est soit négative ou nulle, soit positive. En effet, si l'on a $\sigma \leq 0$, chaque facteur

de $P_n(z)$ a un module supérieur à 1. Si $\sigma<0$, $|P_n(z)|$ tend vers l'infini, puisque, dans ces conditions, on a l'inégalité $\left|1-\frac{z}{\lambda_n}\right|\geq 1-\frac{\sigma}{\lambda_n}$ $(\sigma<0)$ et que la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ est supposée divergente.

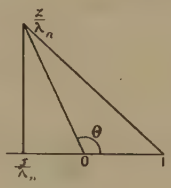


Fig. 4.

Lorsque $\sigma=0$ le module de $P_n(z)$ est une fonction croissante de n qui a une limite finie ou infinie quand n tend vers l'infini, suivant que la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n^2}$ converge ou non. En effet, dans ces conditions, on a

$$|P_n(z)|^2=\prod_1^n\left(1+\frac{|z|^2}{\lambda_\nu^2}\right).$$

Considérons, enfin, le cas où σ est positif et posons

$$z=re^{i\theta}=\sigma+i\tau \qquad \left(r>0,\ |\theta|<\frac{\pi}{2}\right).$$

Les nombres $\frac{z}{\lambda_n}$ ont pour argument θ et pour module $\frac{r}{\lambda_n}$ avec

$$\lim_{n=\infty}\frac{r}{\lambda_n}=0.$$

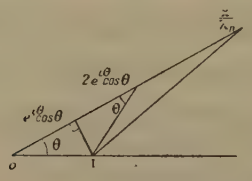


Fig. 5.

Tant que $\frac{r}{\lambda_n}\geq 2\cos\theta$ on a $\left|1-\frac{z}{\lambda_n}\right|\geq 1$, mais pour $\frac{r}{\lambda_n}<2\cos\theta$ on a $\left|1-\frac{z}{\lambda_n}\right|<1$. Le module de $P_n(z)$ est donc maximum pour l'indice n tel que

$$\frac{r}{\lambda_n}\leq 2\cos\theta, \qquad \frac{r}{\lambda_{n+1}}>2\cos\theta.$$

En utilisant la fonction continue $\lambda(x)$ définie plus haut, on voit que la

fonction continue $\log\left|1-\frac{z}{\lambda(x)}\right|$ s'annule pour une certaine valeur ξ' de x définie par $\lambda(\xi')=\frac{r}{2\cos\theta}$. Soit ξ l'entier inférieur ou égal à ξ'. La valeur exacte de ξ' dépend du choix de la fonction d'interpolation $\lambda(x)$, mais ce choix ne peut faire varier ξ' que dans l'intervalle $\xi\leq\xi'<\xi+1$ puisque pour toutes les fonctions $\lambda(x)$ possibles, les valeurs $\lambda(\xi)$ et $\lambda(\xi+1)$ sont imposées, et que, par hypothèse, $\lambda(\xi)\leq\frac{r}{2\cos\theta}$ et $\lambda(\xi+1)>\frac{r}{2\cos\theta}$.

Suivant que θ est nul ou non, la fonction $y(x)=\log\left|1-\frac{z}{\lambda(x)}\right|$ est représentée par l'un ou l'autre des deux graphiques suivants :

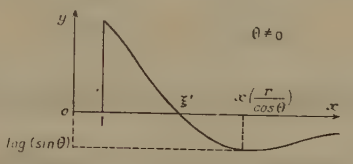


Fig. 6.

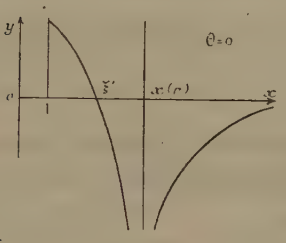


Fig. 7.

Dans le premier cas, $y(x)$ décroît pour $1\leq x\leq x\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)$, passe par un minimum égal à $\log|\sin\theta|$ pour $x=x\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)$, puis tend vers zéro en croissant quand x tend vers l'infini.

Dans le second cas, $y(x)$ décroît pour $1\leq x<x\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)$, n'est pas définie pour $x=x\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)$ et croît dans l'intervalle $x>x\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)$ avec $\lim_{x=\infty}y(x)=0$.

Soit $P_\xi(z)$ le polynome d'indice ξ ayant, pour z donné, le plus grand module. On a, en supposant $\xi>1$, c'est-à-dire $r>2\lambda_1\cos\theta$,

$$\log|P_\xi(z)|=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\xi}\log\left(1-\frac{2\sigma}{\lambda_\nu}+\frac{r^2}{\lambda_\nu^2}\right),$$

d'où l'on tire la double inégalité suivante, la fonction $y(x)$ étant décroissante dans l'intervalle $1\leq x\leq\xi'$

$$0\leq\log|P_\xi(z)|-\frac{1}{2}\int_1^{\xi}\log\left(1-\frac{2\sigma}{\lambda(x)}+\frac{r^2}{\lambda^2(x)}\right)dx\leq\log\left|1-\frac{z}{\lambda_1}\right|.$$

En intégrant par parties et en remarquant que par définition $\gamma(\xi')=0$, on obtient une nouvelle expression de cette intégrale où l'on peut prendre $u=\frac{\lambda(x)}{r}$ pour nouvelle variable, ce que conduit aux importantes inégalités

$$-\log\left|1-\frac{z}{\lambda_1}\right|\leq\log|P_\xi(z)|-\Phi(r,\theta)\leq 0, \tag{20}$$

avec

$$\Phi(r,\theta)=\int_{\frac{\lambda_1}{r}}^{\frac{1}{2\cos\theta}}\frac{(1-u\cos\theta)\,x(ru)\,du}{u(u^2-2u\cos\theta+1)},$$

valables pour

$$r\geq 2\lambda_1\cos\theta,\qquad|\theta|<\frac{\pi}{2}.$$

Nous allons calculer effectivement les fonctions $\Phi(r,\theta)$ correspondant à quelques suites $\{\lambda_n\}$.

Si $\lambda_n=n^p\,(0<p\leq 1)$ on peut prendre $\lambda(x)$ égale à x^p et l'on a

$$\Phi(r,\theta)=r^{\frac{1}{p}}\int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{2\cos\theta}}\frac{u^{\frac{1}{p}-1}(1-u\cos\theta)\,du}{u^2-2u\cos\theta+1},$$

expression que l'on peut calculer lorsque p est rationnel. Le calcul pour p irrationnel s'obtiendrait alors par passage à la limite.

Exemple. — 1° $\lambda_n=n$.

$$\Phi(r,\theta)=r[\cos\theta\log(2\cos\theta)+\theta\sin\theta]-\varepsilon(r,\theta),\qquad 0\leq\varepsilon(r,\theta)\leq\tfrac{1}{4}\quad\text{pour}\quad r\geq 2.$$

M. Norlund [1] pour la même distribution $\{\lambda_n\}$ et en utilisant une méthode différente basée sur l'étude de la fonction eulérienne $\Gamma(z)$ a donné une majoration de $\log|P_\xi(z)|$ un peu plus précise puisqu'on l'obtient en remplaçant $\varepsilon(r,\theta)$ par $\frac{1}{2}\log r$. Notre méthode a cependant l'avantage de permettre de ramener la détermination de l'indicatrice $\Phi(r,\theta)$ dans les cas les plus généraux au calcul d'une seule intégrale, la différence entre la borne inférieure de $\log|P_\xi(z)|$ et la borne supérieure trouvées n'étant que de l'ordre de $\log\left|1-\frac{z}{\lambda_1}\right|$.

2° $\lambda_n=\sqrt{n}$.

$$\Phi(r,\theta)=r^2\left[\cos 2\theta\log(2\cos\theta)+\theta\sin 2\theta-\frac{1}{2}\right]-\varepsilon(r,\theta),$$
$$0\leq\varepsilon(r,\theta)\leq 2\qquad\text{pour}\quad r\geq 2.$$

Remarquons que lorsque $\lambda_n=n$ la quantité $\Phi(r,\theta)$ reste bornée quand, r restant constant, θ tend vers $\pm\frac{\pi}{2}$; alors qu'il n'en est plus de même dans

le second exemple. Nous verrons plus loin de ce phénomène est lié à la nature de la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n^2}$.

Enfin, nos méthodes restent valables dans le cas où la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ converge, à condition, lorsque $\cos\theta$ est négatif ou nul, de remplacer dans l'expression de $\Phi(r,\theta)$ la limite supérieure d'intégration par $+\infty$. Ainsi lorsqu'on a $\lambda_n = n^2$, on a, pour $\cos\theta \geqq 0$

$$\Phi(r,\theta) = r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2}\log\left(\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2\sin\frac{\theta}{2}\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\right] - \varepsilon(r,\theta),$$
$$0 \leqq \varepsilon(r,\theta) \leqq 8 \quad \text{pour} \quad r \geqq 2,$$

et, pour $\cos\theta \leqq 0$

$$\Phi(r,\theta) = r^{\frac{1}{2}}\pi\sin\left|\frac{\theta}{2}\right| - \varepsilon(r,\theta), \qquad 0 \leqq \varepsilon(r,\theta) \leqq 3 \quad \text{pour} \quad r \geqq 2.$$

Ces fonctions avaient également été calculées par M. Norlund [1] au moyen de la fonction $\Gamma(z)$.

D'une façon générale, dans le cas où $\lambda_n = n^p (p > 0)$ on obtient

$$\Phi(r,\theta) = r^{\frac{1}{p}}\psi_p(\theta) - \varepsilon(r,\theta),$$

avec

si $\cos\theta > 0$,

$$\psi_p(\theta) = \int_0^{\frac{1}{2\cos\theta}} \frac{u^{\frac{1}{p}-1}(1-u\cos\theta)\,du}{u^2-2u\cos\theta+1}, \qquad 0 \leqq \varepsilon(r,\theta) \leqq 4p \quad (r \geqq 2);$$

si $\cos\theta \leqq 0$ *et* $p > 1$

$$\psi_p(\theta) = \int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{p}-1}(1-u\cos\theta)\,du}{u^2-2u\cos\theta+1}, \qquad 0 \leqq \varepsilon(r,\theta) \leqq \frac{3p}{2} \quad (r \geqq 2).$$

En effet, pour $r \geqq 2$ on a

$$0 \leqq \varepsilon(r,\theta) = r^{\frac{1}{p}}\int_0^{\frac{1}{r}} \frac{u^{\frac{1}{p}-1}(1-u\cos\theta)\,du}{u^2-2u\cos\theta+1} \leqq \begin{cases} \frac{3p}{2} & \text{si} \quad \cos\theta \leqq 0 \\ 4p & \text{si} \quad \cos\theta > 0 \end{cases} \qquad (r \geqq 2),$$

puisque dans les conditions indiquées on a

$$0 < 1-u\cos\theta \leqq 1 \quad \text{pour} \quad \cos\theta > 0, \qquad 1 \leqq 1-u\cos\theta \leqq \frac{3}{2} \quad \text{pour} \quad \cos\theta \leqq 0,$$

et d'autre part

$$u^2-2u\cos\theta+1 \geqq \sin^2\theta \geqq \frac{3}{4} \quad \text{si} \quad \cos\theta \leqq \frac{1}{2},$$
$$u^2-2u\cos\theta+1 \geqq \frac{5}{4}-\cos\theta \geqq \frac{1}{4} \quad \text{si} \quad \cos\theta \geqq \frac{1}{2},$$
$$u^2-2u\cos\theta+1 \geqq 1 \quad \text{si} \quad \cos\theta \leqq 0.$$

Enfin, toujours dans le cas où la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ converge, $P_\infty(z)$ définit une fonction entière de z que nous désignerons par $E(z)$ et la même méthode nous montre par un calcul simple que pour $\frac{\pi}{2} \leq |\theta| \leq \pi$ on a

$$-\log\left|1-\frac{z}{\lambda_1}\right| \leq \log|E(z)| - H(r,\theta) \leq 0,$$

avec

$$H(r,\theta) = \int_{\frac{\lambda_1}{r}}^{+\infty} \frac{(1-u\cos\theta)\,\alpha(ru)\,du}{u(u^2-2u\cos\theta+1)}.$$

Pour $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ la fonction $E(z)$ s'annule pour $z=\lambda_i$ et, pour $0<\alpha\leq|\theta|\leq\frac{\pi}{2}$ on a

$$2\log\sin\alpha - \log\left|1-\frac{z}{\lambda_1}\right| \leq \log|E(z)| - H(r,\theta) \leq -2\log\sin\alpha.$$

En particulier, si $\lambda_n = n^p (p>1)$ le terme principal de $H(r,\theta)$ c'est-à-dire $\int_0^\infty \frac{(1-u\cos\theta)(ru)^{\frac{1}{p}}\,du}{u(u^2-2u\cos\theta+1)}$ se calcule par la méthode des résidus et donne

$$\log|E(z)| \sim r^{\frac{1}{p}} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \cos\left(\frac{\pi-\theta}{p}\right), \qquad \alpha \leq \theta \leq 2\pi-\alpha.$$

On en déduit, en particulier, que les fonctions $E(z)$ sont d'ordre $\frac{1}{p}$ et de type $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$, résultat qui est d'ailleurs bien connu.

Étude de la fonction $\Phi(r,\theta)$. — Nous avons défini la fonction indicatrice $\Phi(r,\theta)$ pour $r>r(\theta)$, $r(\theta)$ étant le plus grand des deux nombres 0 et $2\lambda_1\cos\theta$ quand la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ est convergente; on pourra convenir de prendre $\Phi(r,\theta)=0$ pour $0\leq r\leq r(\theta)$ puisque alors $\log|P_m(z)|$ est négatif ou nul quel que soit m. D'après sa construction même, $\Phi(r,\theta)$, fonction continue de r et θ prenant la même valeur pour deux valeurs opposées de $\theta(-\pi\leq\theta\leq\pi)$ est, à θ constant, une fonction croissante de r et, à r constant, une fonction croissante de $|\theta|$.

Quand la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ diverge, la fonction $\Phi(r,\theta)$ n'est définie que pour $|\theta|<\frac{\pi}{2}$ et $r>0$ [on prendra $\Phi(r,\theta)=0$ pour $r\leq 2\lambda_1\cos\theta$]. C'est encore une fonction paire de θ, continue par rapport aux deux variables r et θ.

A θ constant, $\Phi(r,\theta)$ est fonction croissante de r.

A r constant, $\Phi(r,\theta)$ est fonction croissante de $|\theta|$.

Quand, à r constant, θ tend vers $\pm\frac{\pi}{2}$ la fonction $\Phi(r,\theta)$ tend vers une limite finie ou infinie, suivant que la série $\sum^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2}$ converge ou diverge. Cela résulte de l'étude des polynomes $P_n(z)$ pour $|z|=r$ et $\lim\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ ou bien de l'expression même de $\Phi(r,\theta)$, comme nous allons le montrer.

Reprenons l'expression de l'indicatrice

$$\Phi(r,\theta)=\int_{\frac{\lambda_1}{r}}^{\frac{1}{2\cos\theta}}\frac{(1-u\cos\theta)\,x(ru)\,du}{u(u^2-2u\cos\theta+1)},$$

Quand θ tend vers $\pm\frac{\pi}{2}$, l'existence de la limite de $\Phi(r,\theta)$ est liée à l'existence de l'intégrale $\int^{\infty}\frac{x(ru)\,du}{u^3}$ puisque dans l'intervalle d'intégration on a

$$\frac{1}{2u(u^2+1)}\leq\frac{1-u\cos\theta}{u(u^2-2u\cos\theta+1)}\leq\frac{1}{u^3}.$$

Il nous suffit donc de démontrer que, $\lambda(x)$ étant une fonction positive, croissante, de x, et $x(\lambda)$ sa fonction inverse, les quantités $\sum^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2}$ et $\int^{\infty}\frac{x(\lambda)\,d\lambda}{\lambda^3}$ convergent ou divergent simultanément.

Il est bien connu que, dans les conditions énoncées, $\sum^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2}$ et $\int^{\infty}\frac{dx}{\lambda^2(x)}$ convergent ou divergent simultanément. Or

$$\int\frac{dx}{\lambda^2(x)}=\frac{x}{\lambda^2(x)}+2\int\frac{x(\lambda)\,d\lambda}{\lambda^3}.$$

Il suffit donc de montrer que l'existence de $\int^{\infty}\frac{x(\lambda)\,d\lambda}{\lambda^3}$ ou celle de $\int^{\infty}\frac{dx}{\lambda^2(x)}$ entraîne que

$$\lim_{x=\infty}\frac{x}{\lambda^2(x)}=0.$$

Supposons donc que $\int^{\infty}\frac{dx}{\lambda^2(x)}$ converge. On a évidemment $\lim\frac{x}{\lambda^2(x)}=0$; sinon, on aurait, à partir d'un certain nombre, $\frac{x}{\lambda^2}>K$ et l'intégrale $\int^{\infty}\frac{dx}{\lambda^2(x)}$ n'aurait pas de sens. Montrons qu'on ne peut pas avoir $\overline{\lim}\frac{x}{\lambda^2(x)}=3a>0$. En effet, si cela était, il existerait une suite de nombres x_j augmentant indéfiniment pour lesquels on aurait $\frac{x}{\lambda^2}>2a$ et une suite intercalée x'_k (en supprimant au besoin des x_j) telle que $\frac{x}{\lambda^2}<a$. Supposons la numérotation faite de telle sorte que

$$x_{j-1}<x'_j<x_j,$$

$\lambda^2(x)$ étant une fonction croissante de x, on a

$$\frac{x_j'}{a} \leq \lambda^2(x_j') < \lambda^2(x_j) \leq \frac{x_j}{2a}.$$

d'où l'on tire $x_j > 2x_j'$ et par suite

$$\int_{x_j'}^{x_j} \frac{dx}{\lambda^2(x)} > (x_j - x_j') \frac{1}{\lambda^2(x_j)} > a,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse quand on fait augmenter j indéfiniment. On a donc $a = 0$ et $\lim_{x=\infty} \frac{x}{\lambda^2(x)} = 0$. La convergence de $\int^{\infty} \frac{dx}{\lambda^2(x)}$ entraîne celle de $\int^{\infty} \frac{x(\lambda)\, d\lambda}{\lambda^3}$.

Réciproquement, supposons que l'intégrale $\int^{\infty} \frac{x(\lambda)\, d\lambda}{\lambda^3}$ converge; montrons que l'on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{x}{\lambda^2(x)} = 0.$$

On a d'abord $\lim_{x=\infty} \frac{x}{\lambda^2} = 0$, car si $\frac{x}{\lambda^2(x)}$ restait supérieur à un nombre positif K on aurait

$$\int^{\beta} \frac{x\, d\lambda}{\lambda^3} > K \int^{\beta} \frac{d\lambda}{\lambda},$$

et cette intégrale tend vers l'infini en même temps que β. Supposons que $\overline{\lim}_{x=\infty} \frac{x}{\lambda^2} = 3a > 0$. Il existe alors une suite de nombres λ_j augmentant indéfiniment tel que $\frac{x}{\lambda^2} < a$ et une autre suite intercalée λ_k' telle que $\frac{x}{\lambda^2} > 2a$ et l'on peut supposer la numérotation de chacune de ces suites faite de telle façon que

$$\lambda_{j-1} < \lambda_j' < \lambda_j.$$

La fonction $x(\lambda)$ étant croissante, on a les inégalités

$$2a\lambda_j'^2 \leq x_j' < x_j \leq a\lambda_j^2,$$

d'où $\frac{\lambda_j}{\lambda_j'} > \sqrt{2}$ et

$$\int_{\lambda_j'}^{\lambda_j} \frac{x(\lambda)\, d\lambda}{\lambda^3} > \frac{a}{2}.$$

En faisant tendre j vers l'infini, on arrive à une contradiction si $a \neq 0$. On a donc $a = 0$ et l'existence de l'intégrale $\int^{\infty} \frac{x(\lambda)\, d\lambda}{\lambda^3}$ entraîne bien celle de $\int^{\infty} \frac{dx}{\lambda^2(x)}$.

Il résulte de là que si la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n^2}$ converge, l'indicatrice $\Phi(r, \theta)$ est, à r constant, une fonction continue de θ pour $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ et l'on a

$$\Phi\left(r, \pm\frac{\pi}{2}\right) = \int_{\frac{\lambda_1}{r}}^{+\infty} \frac{x(ru)\,du}{u(u^2+1)}.$$

Propriétés asymptotiques de l'indicatrice. — L'expression même de $\Phi(r, \theta)$ montre que, à θ constant, le comportement de $\Phi(r,\theta)$ lorsque r tend vers l'infini ne dépend que du comportement asymptotique de la fonction $x(\lambda)$ c'est-à-dire de la répartition asymptotique des nombres λ_n. Cette remarque sera utile dans les applications des théorèmes du Chapitre VI. Donnons un exemple. Supposons que la suite $\{\lambda_n\}$ ait une densité positive et finie D, c'est-à-dire que $\lim_{n=\infty} \frac{n}{\lambda_n} = D$; on a aussi $\lim_{x=\infty} \frac{x}{\lambda(x)} = D$, donc pour $\lambda \geq A$, on a

$$(D-\varepsilon)\lambda \leq x(\lambda) \leq (D+\varepsilon)\lambda \qquad (o < \varepsilon < D).$$

Décomposons l'intégrale $\Phi(r, \theta)$ de la façon suivante :

$$\Phi(r, \theta) = \int_{\frac{\lambda_1}{r}}^{\frac{A}{r}} + \int_{\frac{A}{r}}^{\frac{1}{2\cos\theta}}. \tag{21}$$

Quand r augmente indéfiniment, la première intégrale reste bornée puisque la quantité $\frac{(1-u\cos\theta)\,x(ru)}{u^2-2u\cos\theta+1}$ est bornée et que $\int_{\frac{\lambda_1}{r}}^{\frac{A}{r}} \frac{du}{u} = \log\frac{A}{\lambda_1}$ est indépendant de r. Dans la seconde intégrale, on a $ru \geq A$, donc la fonction $x(ru)$ vérifie les inégalités (20) et l'on déduit immédiatement

$$(D-\varepsilon)\,r\psi(\theta) - C(r, \theta) \leq \Phi(r, \theta) \leq (D+\varepsilon)\,r\psi(\theta) + C(r, \theta),$$
$$\psi(\theta) = \cos\theta\log(2\cos\theta) + \theta\sin\theta.$$

La fonction $C(r, \theta)$ restant bornée quand r tend vers l'infini $\left(\theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$. D'une façon générale, on voit que si, pour $\lambda \geq A$, la suite λ_n est soumise à certaines conditions d'inégalité, on pourra décomposer $\Phi(r, \theta)$ en deux intégrales comme dans (21); la première intégrale restera bornée quand r tend vers l'infini: la seconde sera évaluée en fonction des conditions asymptotiques imposées à la suite $\{\lambda_n\}$.

Enfin, il nous sera également utile pour la suite de connaître la propriété suivante :

La fonction indicatrice croît plus vite que le logarithme de tout polynome. — Et effet, d'après les inégalités (20), on a

$$\Phi(r, \theta) \geq \log |P_\xi(z)|,$$

ξ étant le plus grand entier inférieur ou égal à $x\left(\frac{r}{2}\right)$. Quand r tend vers l'infini le degré ξ du polynome augmente indéfiniment et l'on a en désignant par $Q(z)$ un polynome quelconque, mais fixe

$$\lim_{r=\infty} Q(z)\, e^{-\Phi(r,\theta)} = 0, \qquad z = re^{i\theta} \qquad \left(|\theta| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Après cette étude rapide de la fonction indicatrice de la suite $\{\lambda_n\}$, nous allons revenir à l'étude qui est le but de ce Chapitre, à savoir : quelles sont les inégalités vérifiées par une fonction $F(z)$ représentée par une série (1) en supposant que la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ diverge ?

La série (1) peut ne pas converger absolument pour $\sigma > \mathcal{S}$, la convergence absolue pouvant même n'avoir lieu pour aucune valeur de z. Il convient donc de remplacer la série (1) par une nouvelle série absolument convergente, nous permettant d'utiliser les quantités $\sum_0^n a_\nu$ (pour $\mathcal{S} \geq 0$) et $\sum_n^\infty a_\nu$ (pour $\mathcal{S} < 0$) dont la croissance est liée simplement à l'abscisse de convergence de la série (1) et à la fonction $I(n)$ par les relations (18) et (19).

Plaçons-nous dans le cas où la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ diverge, et supposons que la série

$$F(z) = \sum_0^\infty a_\nu P_\nu(z) \tag{1}$$

converge pour $z = \sigma + i\tau$ ($\sigma > \mathcal{S} \geq 0$). On a, en utilisant la transformation d'Abel,

$$\sum_0^m a_\nu P_\nu(z) = \sum_{\nu=0}^{m-1} (P_\nu - P_{\nu+1}) \sum_{s=0}^{\nu} a_s + P_m \sum_0^m a_\nu.$$

Quand m tend vers l'infini, le terme $P_m \sum_0^m a_\nu$ tend vers zéro pour $\sigma = \mathcal{S} + \varepsilon$ d'après les inégalités établies au paragraphe précédent et portant sur $|P_n(z)|$ et $\left|\sum_0^n a_\nu\right|$.

Donc, pour $\sigma > \mathcal{S} \geq 0$, on a bien

$$F(z) = z \sum_{\nu=0}^\infty \frac{b_\nu}{\lambda_{\nu+1}} P_\nu(z), \qquad b_\nu = \sum_{s=0}^{\nu} a_s. \tag{22}$$

Supposons maintenant l'abscisse de convergence de la série (1) négative. On sait que dans ces conditions, la série $\sum_0^\infty a_\nu$ converge, et toujours en utilisant la transformation d'Abel, on a

$$\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu P_\nu(z) = \sum_0^\infty a_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} (P_\nu - P_{\nu-1}) \sum_{s=\nu}^\infty a_s - P_m \sum_{m+1}^\infty a_\nu.$$

Pour $\sigma > \mathcal{S}$, le dernier terme tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$, et l'on a

$$F(z) = c_0 - z \sum_{\nu=1}^\infty \frac{c_\nu}{\lambda_\nu} P_{\nu-1}(z), \qquad c_\nu = \sum_{s=\nu}^\infty a_s. \tag{23}$$

Il est facile de constater que les séries (22) et (23) convergent absolument pour $\sigma > \mathcal{S}$. En effet, dans le premier cas, on a

$$|b_\nu| < C\, e^{(\mathcal{S}+\delta)l(\nu)}, \qquad |P_n(z)| < M\, e^{(-\sigma+\varepsilon)l(\nu)}, \qquad \varepsilon > 0, \qquad \delta > 0,$$

et le terme général de la série est inférieur en module à

$$\frac{CMr}{\lambda_\nu} e^{(\mathcal{S}+\varepsilon+\delta-\sigma)l(\nu)},$$

terme général d'une série convergente, pour $\sigma > \mathcal{S} + \varepsilon + \delta$.

Pour (23), on a de même

$$|c_\nu| < C\, e^{(\mathcal{S}+\delta)l(\nu)}, \qquad |P_\nu(z)| < M\, e^{(-\sigma+\varepsilon)l(\nu)}, \qquad \varepsilon > 0, \qquad \delta > 0,$$

et le terme général de (23) est majoré en module par

$$\frac{CMr}{\lambda_\nu} e^{(\mathcal{S}+\varepsilon+\delta-\sigma)l(\nu)},$$

terme général d'une série convergente pour

$$\sigma > \mathcal{S} + \varepsilon + \delta.$$

On vérifie aisément que l'égalité (23) est encore valable lorsque la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ converge. Nous voyons donc que dans tous les cas $F(z)$ est représentable par une série absolument convergente pour $\sigma > \mathcal{S}$. Cette série est d'ailleurs également une série d'interpolation, à un facteur z près. Nous avons donc, en désignant par μ un nombre supérieur à $\mathcal{S}$ et aussi voisin que l'on veut de $\mathcal{S}$,

$$|F(z)| < rC_0 + rC \sum_{\nu=1}^\infty \frac{e^{\mu l(\nu)}}{\lambda(\nu)} |P_\nu(z)|, \tag{24}$$

C_0 et C étant deux constantes indépendantes de z. Ayant en vue l'étude de conditions suffisantes de représentation de $F(z)$ valables dans le demi-plan $\sigma > o$, nous nous bornerons à étudier $|F(z)|$ pour $\sigma \geq A$ $(A > o)$, A étant déterminé à partir de l'abscisse de convergence $\mathcal{S}$, laissant de côté l'étude de $|F(z)|$ pour z situé dans la bande $\mathcal{S} < \sigma < A$.

Le cas le plus simple à étudier est celui où $\mathcal{S}$, donc μ, est négatif. Dans ce cas, en effet, la série $\sum_1^{\infty} \frac{e^{\mu l(\nu)}}{\lambda(\nu)}$ est une série numérique convergente. Or, pour tout n et $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, on a $|P_n(z)| \leq e^{\Phi(r,\theta)}$, $z = re^{i\theta}$, et par conséquent,

$$|F(z)| < Cr\, e^{\Phi(r,\theta)}. \tag{25}$$

Cette inégalité pourrait d'ailleurs être légèrement améliorée. En effet, quand r tend vers l'infini, le rang ξ du polynome de module maximum de la suite $P_n(z)$ augmente indéfiniment et le coefficient de ce polynome, soit $\frac{e^{\mu l(\xi)}}{\lambda(\xi)}$, tend vers zéro, puisque μ est négatif.

Examinons maintenant le cas où $\mathcal{S} \geq o$, donc $\mu > o$. Pour chaque valeur de z, la série au deuxième membre de (24) converge bien, mais le coefficient de $P_n(z)$ peut tendre vers l'infini avec n. En effet, si nous prenons, par exemple, $\lambda_n = n$, l'on a

$$\frac{e^{\mu l(n)}}{\lambda(n)} = n^{\mu - 1},$$

expression qui tend vers l'infini avec n pour $\mu > 1$. D'autre part, la série $\sum_1^{\infty} \frac{e^{\mu l(\nu)}}{\lambda(\nu)}$ est certainement divergente, si bien qu'il faudra partager la série (24) en trois parties

$$\sum_0^{\nu_0 - 1} + \sum_{\nu_0}^{\nu_1} + \sum_{\nu_1 + 1}^{+\infty} = S_0 + S_1 + S_2. \tag{26}$$

ν_0 est déterminé par la condition que $\mu \leq \lambda(\nu_0)$, et est donc indépendant de z.

ν_1 est le plus petit nombre entier tel que $\lambda(\nu_1) \geq \frac{r}{2\cos\theta}(1 + \varepsilon)$ et dépend de z $(\varepsilon > o)$.

Dans ces conditions, S_0 se comporte comme un polynome de degré fixe quand r tend vers l'infini, et par conséquent, on a, comme nous l'avons montré plus haut,

$$\lim_{r = \infty} S_0\, e^{-\Phi(r,\theta)} = o.$$

Pour évaluer S_1, nous remarquons que pour r suffisamment grand, on a

$\nu_0 < \xi \leq \nu_1$. On peut donc dans S_1 majorer $|P_n(z)|$ par $|P_\xi(z)|$ ou encore par $e^{\Phi(r,0)}$. Donc, en vertu de (15), on a

$$S_1 < Cr\, e^{\Phi(r,0)} \sum_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{e^{\mu I(\nu)}}{\lambda(\nu)} < \frac{C_1 r}{\mu} e^{\Phi(r,0)+\mu I(\nu_1)} \qquad (C_1 = eC). \tag{27}$$

Dans le cas où l'on peut faire $\mu = 0$ $\left(\text{c'est-à-dire si } \mathfrak{S} = 0 \text{ et si } \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n^2} \text{ converge}\right)$ on remplacera (27) par

$$S_1 < C_1 r\, e^{\Phi(r,0)} I(\nu_1). \tag{27'}$$

Occupons-nous maintenant de S_2. Pour $\nu > \nu_1$, la suite $|P_\nu(z)|$ est une suite décroissante. On a même

$$\log|P_\nu| - \log|P_{\nu-1}| = \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{2\sigma}{\lambda_\nu} + \frac{r^2}{\lambda_\nu^2}\right) < \frac{-\sigma}{\lambda_\nu} + \frac{r^2}{2\lambda_\nu^2} < \frac{-\sigma\varepsilon}{(1+\varepsilon)\lambda_\nu},$$

puisque

$$\lambda_\nu \geq \frac{r}{2\cos\theta}(1+\varepsilon),$$

d'où

$$|P_\nu| < |P_{\nu_1-1}|\, e^{\frac{-\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon}\left[\frac{1}{\lambda_{\nu_1}} + \frac{1}{\lambda_{\nu_1+1}} + \ldots + \frac{1}{\lambda_\nu}\right]} \leq |P_{\nu_1}|\, e^{\frac{-\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon}[I(\nu) - I(\nu_1)]},$$

et

$$S_2 < Cr\,|P_{\nu_1}|\, e^{\frac{\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon} I(\nu_1)} \sum_{\nu_1+1}^{\infty} \frac{e^{\left(\mu - \frac{\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) I(\nu)}}{\lambda(\nu)}.$$

Supposons alors $\sigma \geq (1+\mu)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)$; la somme figurant au deuxième membre est majorée par $e \times e^{\left(\mu - \frac{\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) I(\nu_1)}$ et l'on a

$$S_2 < C_1 r\,|P_{\nu_1}|\, e^{\mu I(\nu_1)} \leq C_1 r\, e^{\Phi(r,0)+\mu I(\nu_1)}. \tag{28}$$

En comparant (26), (27) et (28), nous arrivons au résultat

$$|F(z)| < Cr\, e^{\Phi(r,0)+\mu J\left[\frac{r(1+\varepsilon)}{2\cos\theta}\right]}; \tag{29}$$

C, constante numérique ($\varepsilon > 0$);
$\Phi(r, \theta)$, indicatrice de la suite $\{\lambda_n\}$;
$\mu > 0$, supérieur à l'abscisse de convergence $\mathfrak{S}$ de la série (1);

$$I(\nu) = \int_1^\nu \frac{dx}{\lambda(x)}, \qquad J(\lambda) = I[\nu(\lambda)].$$

L'inégalité (29) étant valable pour

$$\sigma \geq (\mu+1)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

En particulier, pour la suite $\lambda_n = n$, (29) donne

$$|F(z)| < C e^{r[\cos\theta \log(2\cos\theta) + \theta \sin\theta]} r^{\mu+1} \cos^{-\mu}\theta. \tag{30}$$

Dans le cas où la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ converge et en remarquant d'une part que $|P_n(z)|$ est majoré dans tout le plan par $e^{\Phi(r,\theta)}$ et, d'autre part, que la série $\sum_1^\infty \frac{c_\nu}{\lambda_\nu}$ converge, on obtient facilement l'inégalité

$$|F(z)| < C r e^{\Phi(r,\theta)},$$

valable dans tout le plan.

CHAPITRE VI.

Conditions suffisantes de représentation.

Passons maintenant à l'étude de conditions suffisantes pour qu'une fonction $F(z)$, holomorphe pour $\sigma > 0$, soit représentable par une série (1), dans le cas où la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ est supposée divergente. Nous allons pour cela étudier le reste de la série (1). Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, les coefficients de la série (1) calculés à l'aide des valeurs que prend la fonction $F(z)$ pour $z = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Soit

$$R_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{P_n(z)}{P_n(\zeta)} \frac{F(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \tag{31}$$

(C) étant une courbe continue, entourant les points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et z, et située tout entière dans le demi plan $\sigma > 0$. On voit immédiatement que

$$R_n(z) = F(z) - \Pi_{n-1}(z),$$

$\Pi_{n-1}(z)$ étant le polynome en z de degré $(n-1)$ qui prend les mêmes valeurs que $F(z)$ pour $z = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Il suffit donc de démontrer que

$$\lim_{n=\infty} R_n(z) = 0 \quad (\sigma > 0),$$

pour prouver d'abord que la série (1) converge, et ensuite qu'elle représente bien $F(z)$.

Choisissons alors la courbe (C) de façon à rendre le produit $\prod_{\nu=1}^{n} |\zeta - \lambda_\nu|$, maximum. D'après ce que nous avons vu, cela sera réalisé lorsque $n = \xi$, c'est-à-dire lorsque

$$\lambda_n = \lambda_\xi = \frac{\rho}{2\cos\varphi} \qquad (\zeta = \rho e^{i\varphi}).$$

Nous prendrons donc pour (C), qui varie avec n, le cercle de centre le point λ_n et de rayon λ_n. Ce cercle est tout entier dans le demi-plan $\sigma > 0$, sauf le point O qu'on pourra éviter par un petit arc de cercle (γ) si O n'est pas un point régulier de $F(z)$. Ce cercle contient bien les points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et, pour n assez grand, le point z. D'après (20) on a, sur (C),

$$|P_n(\zeta)| > \frac{e^{\Phi(\rho,\varphi)}}{\left|1-\frac{\zeta}{\lambda_1}\right|}.$$

D'autre part, pour z donné, on a

$$|P_n(z)| < M\, e^{(-\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(n)}, \qquad |d\zeta| = 2\lambda_n |d\varphi|.$$

Supposons alors que $F(\zeta)$ satisfasse à l'inégalité

$$(32) \qquad |F(\zeta)| < C\frac{\cos\varphi}{\rho}\, e^{\Phi(\rho,\varphi)+k\mathrm{J}\left(\frac{\rho}{2\cos\varphi}\right)} \quad \text{pour} \quad |\zeta| \geq A \qquad (k \geq 0),$$

avec les notations de l'inégalité (29).

Décomposons l'intégrale R_n en deux intégrales : l'une R'_n pour laquelle $\rho \geq A$, l'autre, R''_n, pour laquelle $\rho \leq A$. Puisque sur le cercle (C), on a l'égalité $\mathrm{J}\left(\frac{\rho}{2\cos\varphi}\right) = \mathrm{I}(n)$, on obtient, en utilisant les inégalités vérifiées par $|P_n(z)|$,

$$|R'_n| < \frac{CM}{\lambda_1}\left|\frac{\zeta-\lambda_1}{\zeta-z}\right| e^{(k+\varepsilon-\sigma)\mathrm{I}(n)},$$

$\left|\frac{\zeta-\lambda_1}{\zeta-z}\right|$ est borné pour ζ sur (C) et $n \geq n_0(z)$. On a donc, pour $\sigma > k$,

$$\lim_{n=\infty} R'_n = 0.$$

Supposons, en outre, que $F(\zeta)$ soit bornée pour $\zeta = X + iY$, $0 \leq X < \varepsilon$; $|Y| \leq A$; dans ces conditions, l'intégrale R''_n tend aussi vers zéro quand n tend vers l'infini, puisqu'on a alors

$$|P_n(\zeta)| \geq 1, \qquad |F(\zeta)| < C, \qquad |\zeta - z| > d > 0$$

et

$$|R''_n| < \frac{3ACM}{d}\, e^{(-\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(n)}.$$

En résumé, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème. — *Si une fonction $F(z)$ est holomorphe pour $\sigma > 0$ et bornée pour $0 \leq \sigma < \varepsilon$; $|\tau| \leq A$, et satisfait pour $|z| \geq A$ à l'inégalité*

$$(33) \qquad |F(z)| < C\frac{\cos\theta}{r}\, e^{\Phi(r,\theta)+k\mathrm{J}\left(\frac{r}{2\cos\theta}\right)} \qquad \text{avec} \quad z = re^{i\theta} = \sigma + i\tau \qquad (k > 0),$$

alors $F(z)$ est représentable par une série (1) dont l'abscisse de convergence est au plus égale à k.

Dans la majoration de $F(z)$, nous avons dû introduire le facteur $\frac{\cos\theta}{r}$ et l'on pourrait craindre que cela n'entraîne que la fonction $F(z)$ tende vers zéro le long de Oy. Il n'en est rien en général, car le terme $J\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)$ croît suffisamment vite pour que le deuxième membre de (83) ne tende pas vers zéro quand $\cos\theta$ tend vers zéro. Il existe cependant des cas où le phénomène se produit. Par exemple, si l'on prend la suite $\lambda_n = (n+1)\log(n+1)$, on a

$$J(n) = \log\left(\frac{\log(n+1)}{\log 2}\right).$$

D'autre part, puisque la série $\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$ converge, la fonction $\Phi(r, \theta)$ reste bornée pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et le deuxième membre de (33) tend vers zéro en même temps que $\cos\theta$. Une autre séparation de l'intégrale (31) n'a pas pu, dans ce cas, nous fournir de renseignements plus précis, et il semble bien que ce phénomène, qui se présente lorsque la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ diverge très lentement, tient à la nature même du problème.

Conséquences. — Supposons qu'une fonction $F(z)$ holomorphe pour $\sigma \geq 0$ s'annule pour $z = \lambda_n$; si l'inégalité (33) est vérifiée, alors, comme les coefficients de la série (1) sont tous nuls, $F(z)$ est identiquement nulle, puisqu'elle est représentée par sa série d'interpolation. En particulier, supposons qu'on prenne $\lambda_n = n^p$ $(0 < p < 1)$. Pour θ fixe différent de $\pm\frac{\pi}{2}$, on voit que $J\left(\frac{r}{2\cos\theta}\right)$ est de l'ordre de grandeur de $r^{\frac{1}{p}-1}$ et est négligeable devant la fonction indicatrice $\Phi(r, \theta)$ qui est de l'ordre de $r^{\frac{1}{p}}$. Pour $p = 1$, on a $J(\lambda) = \log\lambda$ et $\Phi(r, \theta)$ est de l'ordre de r; et les résultats précédents sont donc encore valables. Supposons que la fonction $F(z)$ soit d'ordre $\frac{1}{p}$ $(0 < p \leq 1)$, et posons

$$h_p(\theta) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log|F(re^{i\theta})|}{r^{\frac{1}{p}}},$$

$$\psi_p(\theta) = \int_0^{\frac{1}{2\cos\theta}} \frac{u^{\frac{1}{p}-1}(1 - u\cos\theta)\,du}{u^2 - 2u\cos\theta + 1}$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème

Théorème. — *Si une fonction holomorphe pour $\sigma \geq 0$ est d'ordre égal à $\frac{1}{p}$ $(0 < p \leq 1)$ et si, pour $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$,*

$$h_p(\theta) < \psi_p(\theta),$$

alors cette fonction $F(z)$ *ne peut s'annuler pour* $z = n^p$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *sans être identiquement nulle.*

Dans ce théorème, on peut évidemment remplacer la fonction $F(z)$ par la fonction $F(z) - P(z)$, $P(z)$ étant un polynome donné quelconque; comme d'autre part, deux fonctions prenant les mêmes valeurs pour $z = \lambda_i$ $(i \geq n_0)$ ont des développements (1) qui ne diffèrent que par un développement de O, on voit qu'on obtient le théorème suivant analogue à celui obtenu par M. Bernstein [7] dans le cas où la suite $\{\lambda_n\}$ est à densité maxima finie.

Théorème. — *Si une fonction* $F(z)$, *holomorphe pour* $\sigma \geq 0$ *est telle que*

1° $\qquad F(n_p) = P(n^p) \qquad$ (*pour tout* $n \geq n_0$);

2° $\qquad h_p(\theta) < \psi_p(\theta) \qquad \left[\text{pour tout } \theta, \left(|\theta| \leq \frac{\pi}{2}\right)\right]$;

alors on a

$$F(z) \equiv P(z) \qquad [P(z) \text{ polynome arbitraire donné}].$$

Ce théorème peut encore être généralisé grâce aux remarques que nous avons faites sur le calcul de la fonction $\Phi(r, \theta)$ lorsque la suite $\{\lambda_n\}$ satisfaisait à certaines conditions asymptotiques. Le théorème précédent prend alors la forme suivante :

Théorème. — *Si une fonction* $F(z)$ *est holomorphe pour* $\sigma \geq 0$ *et vérifie les conditions*

1° $\qquad F(\lambda_n) = P(\lambda_n) \qquad$ (*pour tout* $n \geq n_0$);

2° $\qquad h_p(\theta) < \frac{1}{K^p}\psi_p(\theta) \qquad \left(\text{pour tout } \theta, |\theta| \leq \frac{\pi}{2}\right)$;

les nombres λ_n *vérifiant* $\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\lambda_n}{n^p} \leq K$, $P(z)$ *étant un polynome donné à l'avance et* p *un nombre fixe vérifiant* $0 < p \leq 1$, *alors on a*

$$F(z) = P(z).$$

On voit, par le même raisonnement, que la série (1), quand elle converge, fournit la fonction $F(z)$ de croissance minimum prenant pour $z = \lambda_\nu$ certaines valeurs A_ν données à l'avance. La fonction $F(z)$ est donc déterminée uniquement par les nombres A_ν d'indice supérieur à un nombre donné arbitrairement grand. Ainsi, lorsque nous cherchions les fonctions $O_p(z)$ s'annulant pour $z = \lambda_\nu$ $(\nu \neq p)$ avec $O_p(\lambda_p) = 1$, leur développement (1) ne pouvait représenter que la fonction zéro et leur abscisse de convergence ne pouvait être inférieure à λ_p, puisque pour $z = \lambda_p$ nous imposions une valeur $O_p(\lambda_p)$ différente de celle imposée par la suite des valeurs $O_p(\lambda_\nu)$ $(\nu > p)$, suite qui, à elle seule, suffisait à déterminer la fonction.

Ces résultats s'étendent facilement aux fonctions définies dans l'angle $|\theta| \leq \alpha < \pi$, moyennant la transformation $Z = z^{\frac{\pi}{2\alpha}}$ et nous fournissent ainsi des théorèmes relatifs aux fonctions définies dans un angle donné, et dont les valeurs sont connues, en certains points de la bissectrice de cet angle.

Les résultats qui précèdent ont été obtenus, moyennant l'hypothèse que la série $\sum \frac{1}{\lambda_\nu}$ était divergente. Il est facile de voir que cette condition est nécessaire; en effet, si la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ converge, il est possible de construire une fonction s'annulant pour $z = \lambda_\nu$, bornée dans le demi-plan $\sigma \geq 0$ et non identiquement nulle. Il suffit de considérer le produit de Blaschke [4]

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(\frac{z - \lambda_\nu}{z + \lambda_\nu} \right).$$

Fonction qui répond bien aux conditions imposées et reste inférieure ou égale à 1 en module pour $\sigma \geq 0$.

CHAPITRE VII.

Dans ce Chapitre, nous nous intéresserons au comportement de la série

$$(1) \qquad F(z) = \sum_0^\infty a_n P_n(z), \qquad P_0(z) = 1, \qquad P_n(z) = \prod_1^n \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu} \right);$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots, \qquad \lim_{n=\infty} \lambda(n) = +\infty,$$

avec

$$S(0) = 0, \qquad S(n) = \sum_1^n \frac{1}{\lambda_\nu}, \qquad \lim_{n=\infty} S(n) = +\infty,$$

sur sa droite de convergence et à l'étude des points singuliers de sa somme $F(z)$.

Théorème. — *Si la série* $\sum \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ *converge, la série*

$$(1) \qquad F(z) = \sum_0^\infty a_n P_n(z)$$

et la série de Dirichlet associée

$$(2) \qquad D(z) = \sum_0^\infty a_n e^{-z S n}$$

convergent simultanément.

Supposons, en effet, que la série (1) converge, et posons

$$a_n P_n = b_n, \qquad e^{zS(n)} P_n(z) = \frac{1}{c_n}.$$

En utilisant la transformation d'Abel, nous avons

$$\sum_m^p a_n e^{-zS(n)} = \sum_m^p b_n c_n = \sum_m^{p-1} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sum_m^\nu b_s + c_p \sum_m^p b_s.$$

Comme la série (1) converge, on a, pour $\nu \geq m \geq n_0$

$$\left| \sum_m^\nu b_s \right| < \varepsilon,$$

d'où l'on tire

$$\left| \sum_m^p a_n e^{-zS(n)} \right| < \varepsilon \left(|c_p| + \sum_m^{p-1} |c_\nu - c_{\nu+1}| \right). \tag{3}$$

Or,

$$-\log|c_q| = \sum_1^q \log \left| 1 - \frac{z}{\lambda_\nu} \right| + \sigma S(q). \tag{4}$$

Quand z est fixe, différant de λ_i, le membre de droite de (4) a une limite, quand q tend vers l'infini, puisque la série $\sum \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ converge. Donc $|c_q| < C$. D'autre part, dans les mêmes conditions, on a

$$|c_\nu - c_{\nu+1}| = |c_\nu| \left| 1 - \frac{e^{-\frac{z}{\lambda_{\nu+1}}}}{1 - \frac{z}{\lambda_{\nu+1}}} \right| < C_1 \left| 1 - \frac{z}{\lambda_{\nu+1}} - e^{-\frac{z}{\lambda_{\nu+1}}} \right| < \frac{C_2}{\lambda_{\nu+1}^2}.$$

Par suite, le coefficient de ε dans (3) est borné quel que soit p pour z fixe. La série (2) est donc convergente.

Réciproquement, supposons la série (2) convergente, et posons, cette fois, $a_n e^{-zS(n)} = b_n$ et $e^{zS(n)} P_n = c_n$. Par hypothèse, il existe un nombre $n_0(\varepsilon)$ tel que, pour $p \geq m \geq n_0(\varepsilon)$ on ait $\left| \sum_m^p b_s \right| < \varepsilon$. Appliquons encore la transformation d'Abel

$$\sum_m^p a_n P_n = \sum_m^{p-1} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sum_m^\nu b_s + c_p \sum_m^p b_s,$$

donc

$$\left| \sum_m^p a_n P_n \right| < \varepsilon \left(|c_p| + \sum_m^{p-1} |c_\nu - c_{\nu+1}| \right). \tag{5}$$

analogue à (3), mais avec des notations différentes. Or, on a $|c_\eta| < C$ puisque

$$\log|c_\eta| = \sum_1^q \log\left|1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right| + \sigma S(q)$$

et que cette somme a une limite lorsque q tend vers l'infini $\left(\text{la série } \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu^2} \text{ étant convergente et } z \text{ fixe}\right)$. D'autre part,

$$|c_\nu - c_{\nu+1}| = |c_\nu|\left|1 - \left(1 - \frac{z}{\lambda_{\nu+1}}\right)e^{\frac{z}{\lambda_{\nu+1}}}\right| < \frac{C_1}{\lambda_{\nu+1}^2},$$

Le coefficient de ε dans (5) restant borné pour z fixe, la série (1) est bien convergente.

La démonstration de ce théorème a nécessité la convergence de la série $\sum \frac{1}{\lambda_\nu^2}$. Nous allons voir que, inversement, si la série $\sum \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ est divergente, on peut construire des séries associées (1) et (2) qui n'ont sur la droite de convergence qu'un seul point de convergence commun.

Considérons, en effet, la suite des nombres définis par les égalités

$$a'_n = e^{-\sqrt{\sum_1^n \frac{1}{\lambda_\nu^2}}},$$

on a

$$\lim_{n=\infty} a'_n = 0.$$

Extrayons de cette suite, une suite partielle de nombres a'_{n_k} tels que l'on ait $a'_{n_k} \leq \frac{1}{k^2}$; la série $\sum_{k=1}^\infty a'_{n_k}$ converge. Posons alors

$$a_n = 0 \quad \text{si } n \neq n_k \qquad \text{et} \qquad a_{n_k} = a'_{n_k}.$$

La série (2) converge normalement pour $\sigma = 0$. Quant à la série (1) elle converge pour $z = 0$, mais diverge pour $z = i\tau$, $\tau \neq 0$. En effet

$$|P_{n_k}(i\tau)|^2 > C^2(\tau)\, e^{\frac{\tau^2}{2}\sum_1^{n_k}\frac{1}{\lambda_\nu^2}}, \qquad \text{avec} \quad C(\tau) > 0 \qquad \text{pour} \quad \tau \neq 0,$$

puisque pour y réel, compris entre zéro et un, on a $\log(1+y) \geq \frac{y}{2}$. Donc

$$|P_{n_k}(i\tau)| > C(\tau)\, e^{\frac{\tau^2}{4}\sum_1^{n_k}\frac{1}{\lambda_\nu^2}}$$

et

$$|a_{n_k} P_{n_k}(i\tau)| > C(\tau)\, e^{\frac{\tau^2}{4}\sum_1^{n_k}\frac{1}{\lambda_\nu^2} - \sqrt{\sum_1^{n_k}\frac{1}{\lambda_\nu^2}}},$$

quantité qui augmente indéfiniment quand k augmente indéfiniment, z restant fixe et non nul.

En ce qui concerne les points singuliers des fonctions $F(z)$ et $D(z)$ définies par les séries (1) et (2) pour $\sigma > \mathcal{S}$, nous pouvons établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si les séries* (1) *et* (2) *convergent pour* $\sigma > \mathcal{S}$ *et si la densité supérieure de la suite* $\{\lambda_m\}$ *est finie, les fonctions* $F(z)$ *et* $D(z)$ *définies par les séries* (1) *et* (2) *ont mêmes points singuliers sur la droite de convergence, sauf peut-être pour* $z = \lambda_i$ *si* $\mathcal{S} = \lambda_i$. *Dans ce dernier cas, si* $z = \lambda_i$ *est un point régulier pour* $D(z)$, *il l'est aussi pour* $F(z)$, *la réciproque pouvant ne pas être vraie.*

Supposons donc qu'on ait

$$\frac{n}{\lambda_n} < K \qquad \text{pour} \quad n \geq n_0,$$

K étant un nombre positif arbitraire, plus grand que la densité supérieure D_s de la suite $\{\lambda_n\}$. La série $\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$ est convergente, et le produit infini de Weierstrass

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right) e^{\frac{z}{\lambda_\nu}}$$

définit une fonction entière $E_0(z)$; posons, d'une façon générale,

$$E_n(z) = \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right) e^{\frac{z}{\lambda_\nu}},$$

on a alors l'égalité valable pour $n \geq 0$

$$E_0(z)\, a_n\, e^{-z s_n} = a_n P_n(z) E_n(z). \tag{6}$$

Étudions les fonctions $E_n(z)$; pour z fixe, on voit que $\lim_{n=\infty} E_n(z) = 1$. Plus précisément, supposons $|z| < C$ et choisissons un nombre $n_1 \geq n_0$ tel que pour $n \geq n_1$ on ait $\lambda_n > 2C$.

De l'inégalité

$$\left| \log(1-y) + y + \frac{y^2}{2} \right| \leq \frac{|y|^3}{3} + \frac{|y|^4}{4} + \ldots \leq \frac{2}{3}|y|^3, \tag{7}$$

valable pour $|y| \leq \frac{1}{2}$, nous déduisons, en posant $\frac{z}{\lambda_\nu} = y$ et en ajoutant les inégalités obtenues pour $\nu = n+1, n+2, \ldots$

$$\left| \log E_n(z) + \frac{z^2}{2} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} \right| \leq \frac{2}{3}|z|^3 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^3} \tag{8}$$

ou bien

$$E_n(z) = e^{-\frac{z^2}{2}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2} + \theta(z,n)\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^3}}, \tag{9}$$

$0(z, n)$ étant une fonction qui reste bornée dans les conditions indiquées plus haut, ($|z|<C$ et $n\geq n_1$). Comme on a

$$\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2}<K^2\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}<\frac{K^2}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^3}<\frac{C}{n^2},$$

on en déduit

$$E_n(z)=1-\frac{z^2}{2}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2}+\theta_1(z, n)\frac{1}{n^2},$$

$\theta_1(z, n)$ restant bornée dans les mêmes conditions.

En faisant successivement, $n=0, 1, 2, \ldots$ dans les égalités (6) et en ajoutant membre à membre, il vient

$$E_0(z)D(z)-F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n[E_n(z)-1], \tag{10}$$

valable au moins pour $\sigma>\mathcal{S}$.

Il suffit donc de démontrer que la série au second membre de (10) converge uniformément pour $\sigma>\mathcal{S}-\delta$ et $|\tau|<C$ ($\delta>0$) pour établir le théorème énoncé plus haut. Étudions les séries

$$\sum_{0}^{\infty}a_nP_n\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2} \tag{11}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{a_nP_n}{n^2}\right|. \tag{12}$$

Nous savons que, pour $\sigma<\mathcal{S}+\varepsilon$ et $n>n_0$

$$\left|\frac{P_n(z)}{P_n(\mathcal{S}+\varepsilon)}\right|<M^2e^{(-\sigma+\mathcal{S}+\varepsilon)S(n)}<M_1e^{(-\sigma+\mathcal{S}+\varepsilon)K\log n}.$$

Donc,

$$\left|\frac{P_n(z)\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2}}{P_n(\mathcal{S}+\varepsilon)}\right|<M_1K^2n^{(\mathcal{S}+\varepsilon-\sigma)K-1},$$

puisque, pour $n\geq n_0$, on a

$$S(n)<K\log n+K_1 \qquad (K_1, \text{ indépendant de } n).$$

Enfin

$$\frac{P_{n+1}(z)}{P_{n+1}(\mathcal{S}+\varepsilon)}\sum_{n+2}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2}-\frac{P_n(z)}{P_n(\mathcal{S}+\varepsilon)}\sum_{n+1}^{\infty}\lambda_\nu^2$$
$$=\frac{P_n(z)}{P_n(\mathcal{S}+\varepsilon)}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu^2}\left[\frac{\lambda_{n+1}-z}{\lambda_{n+1}-\mathcal{S}-\varepsilon}-1\right]-\frac{P_{n+1}(z)}{P_{n+1}(\mathcal{S}+\varepsilon)}\frac{1}{\lambda_{n+1}^2},$$

où les deux termes du second membre sont majorés par $C_1 n^{(\mathcal{S}+\varepsilon-\sigma)K-2}$, C_1 étant indépendant de n.

En appliquant la transformation d'Abel à la série (11) avec

$$b_n = a_n P_n(\mathcal{S}+\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad c_n = \frac{P_n(z)}{P_n(\mathcal{S}+\varepsilon)} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2},$$

on voit que la série (11) converge uniformément pour

$$\sigma \geq \mathcal{S}+\varepsilon-\frac{1-\eta}{K} \qquad \text{et} \qquad |\tau| < C \qquad (\eta > 0 \text{ arbitraire}).$$

La série (12) converge absolument et uniformément dans les mêmes conditions puisque, alors,

$$\left|\frac{a_n P_n(z)}{n^2}\right| < C n^{-1-\eta}.$$

Comme ε et η sont arbitrairement petits et K aussi voisins que l'on veut de la densité supérieure D_s de la suite $\{\lambda_n\}$, on voit finalement que la fonction

$$E_0(z)\,D(z) - F(z)$$

est holomorphe pour $\sigma > \mathcal{S} - \frac{1}{D_s}$, d'où résulte le théorème annoncé.

Si $\mathcal{S} = \lambda_i$ on voit que si $z = \lambda_i$ est un point régulier pour $D(z)$, il l'est aussi pour $F(z)$, mais que, réciproquement, s'il est régulier pour $F(z)$ il est soit un point régulier, soit un pôle simple pour $D(z)$. C'est ce qui se produit quand $F(z)$ est une des fonctions $O_p(z)$ étudiées plus haut. Nous allons montrer par un exemple, qu'il n'est pas possible d'améliorer le théorème précédent. Pour cela, nous allons former deux séries associées (1) et (2) telles que la fonction $E_0 D - F$ ne soit plus holomorphe pour $z = \mathcal{S} - \frac{1}{D_s}$. Prenons la suite $\{\lambda_n\}$ formée par les entiers 1, 2, ..., n, ... et $a_n = n^\alpha$, α réel, différent de zéro, non entier positif, et posons

$$G(z) = E_0(z)\,D(z) - F(z) = \sum_0^\infty a_n P_n(z)\,[E_n(z) - 1],$$

avec

$$E_n(z) = \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right) e^{\frac{z}{\lambda_\nu}}.$$

Les séries (1) et (2) admettent la droite $\sigma = \alpha + 1$ pour droite de convergence simple et absolue. La densité de la suite $\{\lambda_n\}$ étant égale à 1, nous allons montrer que le point $z = \alpha$ est singulier pour la fonction $G(z)$. Soit, en effet, x un nombre réel supérieur à α. A partir d'un certain rang, les polynomes $P_n(x)$

gardent un signe constant puisque les quantités $1-\frac{x}{\lambda_n}$ sont positives pour $\lambda_n > x$, et l'on a

$$|P_n(x)| > Cn^{-x},$$

valable pour $\alpha \leq x \leq \alpha+\varepsilon$, C étant une constante positive, indépendante de x et de n, et ε un nombre positif assez petit pour que l'intervalle $(\alpha, \alpha+\varepsilon)$ ne contienne pas de nombre entier. D'autre part, un calcul facile montre que l'on a

$$1-E_n(x) > \frac{C_1}{n},$$

C_1 étant une constante positive, indépendante de n et de x, pour $n \geq n_0$ et $\alpha \leq x \leq \alpha+\varepsilon$.

La fonction $G(x)$ est donc représentée par une série à termes réels de signe constant (au moins à partir d'un certain rang) et le terme général de cette série est minoré par la quantité $C_2 n^{\alpha-1-x}$, on en déduit l'inégalité

$$|G(x)| > \frac{K}{x-\alpha},$$

qui prouve que

$$\lim_{x\to\alpha} |G(x)| = +\infty.$$

Le point $z=\alpha$ est un point singulier de la fonction $G(z)$.

En divisant les nombres λ_n et z par un même nombre D, on voit par ce même exemple, qu'il existe des séries associées (1) et (2) telles que la fonction $G(z)=E_0(z)D(z)-F(z)$ admet le point $z=\frac{\alpha}{D}$ pour point singulier, l'abscisse de convergence simple et absolue des séries (1) et (2) étant $\sigma=\frac{\alpha+1}{D}$. On ne peut donc pas dans le cas général, espérer augmenter l'épaisseur de la bande où $D(z)$ et $F(z)$ ont mêmes points singuliers.

Grâce à ce théorème, nous pourrons étudier la distribution des points singuliers de la fonction $F(z)$ représentée par la série (1) situés sur la droite de convergence de (1) si nous connaissons celle des points singuliers de la fonction $D(z)$. Tout théorème valable pour les séries de Dirichlet sera valable pour les séries d'interpolation (1), à condition que l'inégalité $\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\lambda_n} < K$ soit vérifiée, ce qui entraîne pour les exposants de la série (2) de Dirichlet

$$S(n) < K \log n + K_1.$$

En particulier, nous pouvons énoncer ce théorème dû à M. Aronszajn, dans le cas des séries de Dirichlet.

Théorème. — *Si l'on a*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\lambda_n} < K \qquad (K>0),$$

on peut définir les coefficients a_n de la série (1) *de telle façon que la somme* $F(z)$ *de cette série soit holomorphe sur la droite de convergence simple et absolue de la série* (1).

Comme autre application de ce même théorème nous allons montrer que les séries d'interpolation (1) satisfont aux théorèmes taubériens valables pour les séries de Dirichlet. Nous savons déjà que, quelle que soit la suite $\{\lambda_n\}$, les séries (1) satisfont au théorème d'Abel. Réciproquement, supposons que l'on ait

$$a_n < \frac{M}{\lambda(n)\,S(n)} \qquad (M \text{ indépendant de } n)$$

et que $F(z)$ tende vers une limite S quand z tend vers $z_0 \neq \lambda_i$ le long d'une parallèle à l'axe réel ($\sigma > 0$). Dans ces conditions, la fonction associée $D(z)$ a une limite S′ puisque $E_0 D - F$ est continue au point z_0, et un théorème taubérien dû à Littlewood [6], montre que la série (2) converge pour $z = z_0$ et que $D(z_0) = S'$. Or, puisque $\sum \frac{1}{\lambda_j^2}$ converge, nous savons que les séries (1) et (2) convergent simultanément. Donc, la série (1) converge pour $z = z_0$ et sa somme est égale à S, puisque la série (1) satisfait au théorème d'Abel.

Revenons, dans le cas général, à l'étude des points singuliers de $F(z)$. Il est possible d'établir pour ces séries, un théorème analogue à celui de Landau valable pour les séries de Dirichlet; d'une façon précise, nous pouvons énoncer le théorème :

Théorème. — *Si l'on a* $a_n = 0$ *pour tout* $n \geq n_0$, *et si la série* (1) *a une abscisse de convergence finie* $\mathcal{S}$ *le point* $z = \mathcal{S}$, *est singulier pour la fonction* $F(z)$ *représentée par la série* (1) *à condition toutefois qu'on ait* $\mathcal{S} \neq \lambda_i$.

En effet, si $\lambda_p < \mathcal{S} < \lambda_{p+1}$, posons

$$F_1(z) = \frac{F(z) - \sum_0^{p-1} a_n P_n(z)}{P_p(z)} = a_p + a_{p+1}\left(1 - \frac{z}{\lambda_{p+1}}\right) + \dots,$$

$F(z)$ et $F_1(z)$ admettent simultanément le point $z = \mathcal{S}$ pour point singulier ou régulier. Il suffit donc, d'après cela, de démontrer le théorème pour $\mathcal{S} < \lambda_1$, en changeant éventuellement la numérotation de la suite $\{\lambda_n\}$. On a

$$F(z) = \sum_0^{\infty} \frac{F^{(n)}\left(\frac{\lambda_1 + \mathcal{S}}{2}\right)}{n!}\left(z - \frac{\mathcal{S} + \lambda_1}{2}\right)^n,$$

valable, au moins, pour

$$\left|z - \frac{\mathcal{S} + \lambda_1}{2}\right| < \frac{\lambda_1 - \mathcal{S}}{2}.$$

Si $z = \mathcal{S}$ est un point régulier de $F(z)$, cette série de Taylor a un rayon de convergence supérieur à $\frac{\lambda_1 - \mathcal{S}}{2}$ et l'on a

$$F(\mathcal{S} - \varepsilon) = \sum_0^\infty \frac{F^{(n)}\left(\frac{\lambda_1 + \mathcal{S}}{2}\right)}{n!} \left(\frac{\mathcal{S} - \lambda_1 - 2\varepsilon}{2}\right)^n,$$

avec

$$F^{(n)}\left(\frac{\lambda_1 + \mathcal{S}}{2}\right) = \sum_0^\infty a_p P_p^{(n)}\left(\frac{\lambda_1 + \mathcal{S}}{2}\right).$$

Or,

$$(-1)^n P_p^{(n)}\left(\frac{\lambda_1 + \mathcal{S}}{2}\right) > 0,$$

$F(\mathcal{S} - \varepsilon)$ est donc donné par une série double absolument convergente et, en ordonnant par rapport à p, on trouve

$$F(\mathcal{S} - \varepsilon) = \sum_0^\infty a_n P_n(\mathcal{S} - \varepsilon),$$

ce qui est impossible, puisque $\mathcal{S}$ est l'abscisse de convergence de la série (1).

Si $\mathcal{S} = \lambda_p$, le théorème est en défaut comme le montre l'exemple du développement de 0, $O_p(z)$. Dans ce cas, en effet, on vérifie bien que la fonction $F_1(z)$ admet le point $z = \lambda_p$ pour pôle simple, alors que $F(z)$ y est régulière.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

Étude des séries d'interpolation.

$$\sum_0^\infty a_n Q_n(z).$$

Étudions maintenant les séries d'interpolation

$$(1) \qquad G(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n Q_n(z),$$

$$Q_0(z) = 1, \qquad Q_n(z) = \prod_1^n (z - \lambda_\nu) \qquad (n \geqq 1).$$

Les nombres λ_n réels, positifs et vérifiant

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > \lambda_{n+1} > \ldots, \qquad \lim_{n=\infty} \lambda_n = 0, \qquad \sum_1^\infty \lambda_n \text{ convergente.}$$

Comme précédemment, nous commencerons par l'étude du domaine de convergence des séries (1). Pour cela, étudions d'abord les polynomes $Q_n(z)$.

On a

$$\frac{Q_n(z)}{z^n} = \prod_1^n \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{z}\right) \qquad (n \neq 0)$$

et comme nous avons supposé la série $\sum_1^\infty \lambda_\nu$ convergente, nous voyons que l'on a, uniformément dans tout domaine fermé ne contenant pas l'origine,

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_n(z)}{z^n} = \mathrm{E}\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \text{avec} \quad \mathrm{E}\left(\frac{1}{z}\right) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{z}\right).$$

$\mathrm{E}\left(\frac{1}{z}\right)$ étant une fonction entière de $\frac{1}{z}$ s'annulant pour $z = \lambda_\nu$ et égale à 1 pour z infini. De cette propriété, nous déduisons le

Théorème. — *Le domaine de convergence simple et absolue de la série* (1) *est le cercle* $|z| < \mathrm{R}$, R *étant défini par*

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{2}$$

La série (1) *converge normalement* (*c'est-à-dire absolument et uniformément*), *pour* $|z| \leq \mathrm{R}' < \mathrm{R}$.

En effet, supposons R fini non nul et soit z un nombre non nul de module inférieur à R. On peut déterminer un nombre n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait

$$|a_n| < \left(\frac{2}{\mathrm{R} + |z|}\right)^n,$$

d'où

$$|a_n Q_n(z)| < \mathrm{H}\left(\frac{2|z|}{\mathrm{R} + |z|}\right)^n, \tag{3}$$

terme général d'une série géométrique convergente, que l'on peut majorer en remplaçant dans (3) $|z|$ par R′ si $|z| \leq \mathrm{R}'$; la série (1) converge donc absolument pour $|z| < \mathrm{R}$ et uniformément pour $|z| \leq \mathrm{R}' < \mathrm{R}$. La démonstration n'est pas valable pour $z = 0$, mais la série (1) converge uniformément sur le cercle $|z| = \frac{\mathrm{R}}{2}$ et un théorème classique de Weierstrass permet d'affirmer que la convergence uniforme a lieu également pour $|z| \leq \frac{\mathrm{R}}{2}$.

D'autre part, si $|z| > R$ et $z \neq \lambda_i$, on a pour une suite infinie de nombres n_k

$$|a_{n_k} Q_{n_k}(z)| > k \left(\frac{2|z|}{R - |z|} \right)^{n_k},$$

quantité qui tend vers l'infini et la série (1) diverge pour $|z| > R (z \neq \lambda_i)$; on ne peut rien affirmer dans le cas général pour $|z| = R$.

Le calcul des coefficients a_n se fera exactement comme pour les séries étudiées au début de la première Partie, nous aurons également des représentations de O valables dans les cercles

$$|z| < \lambda_p.$$

Ces séries feront également exception au théorème d'Abel que nous démontrerons plus loin. Comme précédemment, dans le cas où la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ était supposée divergente, deux fonctions dont les valeurs aux points $z = \lambda_n$ sont égales, sauf pour un nombre fini d'entre eux, doivent être considérées comme identiques. On peut même aller plus loin, puisqu'on sait que deux fonctions holomorphes pour $|z| < R (R > 0)$ ne peuvent prendre les mêmes valeurs pour une suite de valeurs λ_n de la variable ayant le point O pour point d'accumulation sans être identiques, la différence de ces deux fonctions ayant alors un point d'accumulation de zéros à l'intérieur de son domaine d'holomorphie.

L'étude des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction $G(z)$ soit représentable par une série (1) est ici très simplifiée.

1° Si la série (1) converge pour $|z| < R$, $G(z)$ est holomorphe dans le même cercle $|z| < R$.

2° Réciproquement, l'étude du reste de la série (1)

$$R_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{Q_n(z)}{Q_n(\zeta)} \frac{G(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

l'intégrale étant prise le long d'un cercle (C) de centre O à l'intérieur et sur la frontière duquel la fonction $G(\zeta)$ est holomorphe, montre que la série (1) converge et représente bien $G(z)$ dans le plus grand cercle de centre O dans lequel la fonction $G(z)$ est holomorphe : la série (1) a le même rayon de convergence que la série de Taylor de $G(z)$.

Une objection se présente ici, et il semblerait que les développements de O, de rayon de convergence λ_p, fassent exception au théorème énoncé plus haut. En effet, la fonction O n'a pas de points singuliers et cependant la convergence de la série (1) n'a pas lieu dans tout le plan. C'est que, pour le développement $O_1(z)$ par exemple, nous fixons

$$O_1(\lambda_n) = 0 \quad \text{si } n \neq 1 \qquad \text{et} \qquad O_1(\lambda_1) = 1.$$

On doit alors considérer que $G(z)$ n'est pas la fonction entière O, mais qu'elle

présente le point singulier $z = \lambda_1$. Ainsi, lorsqu'une série (1) a un rayon de convergence R non nul, deux cas peuvent se produire.

Premier cas : $R \neq \lambda_p$. — La fonction $G(z)$ a un point singulier sur le cercle de convergence $|z| = R$ de la série (1).

Deuxième cas : $R = \lambda_p$. — Il se peut qu'en modifiant la valeur de $G(z)$ pour $z = \lambda_p$ [c'est-à-dire, en ajoutant à la série (1), un développement de 0 convenable] la nouvelle série obtenue ait un rayon de convergence supérieur à R. Le point $z = \lambda_p$ était alors un point singulier parasite de $G(z)$ introduit par un mauvais choix de $G(\lambda_p)$. Nous voyons donc, qu'en général, si l'on se donne arbitrairement, pour $G(\lambda_n)$ des nombres A_n ayant une limite lorsque n tend vers l'infini; la série (1) aura un rayon de convergence nul. Au contraire, si les nombres A_n sont les valeurs d'une fonction qu'on sait être holomorphe dans le cercle $|z| < R$ on est assuré que la série (1) converge pour $|z| < R$.

C'est là une généralisation de résultats bien connus relatifs aux séries entières.

Nous énoncerons enfin quelques théorèmes vérifiés par les séries d'interpolation (1) et qui montrent la profonde analogie de ces séries avec les séries entières.

CHAPITRE II.

Étude de la convergence des séries (1) sur le cercle de convergence.

Nous démontrerons d'abord le

Théorème d'Abel. — *Si la série d'interpolation* (1) *converge pour* $z = z_0 \neq \lambda_i$,

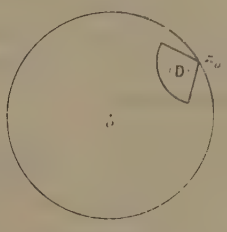


Fig. 8.

elle converge uniformément au voisinage du point z_0 *dans un angle* (D) *de sommet* z_0 *intérieur au cercle de convergence* (*fig.* 8).

Supposons donc que la série (1) converge pour $z = z_0 \neq \lambda_i$ et appliquons la transformation d'Abel à

$$\sum_0^n a_n Q_n(z) = \sum_0^n a_n Q_n(z_0) \frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)},$$

il suffit de prouver que, pour z dans (D), les quantités

$$\left|\frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)}\right| \tag{4}$$

et

$$\sum_m^p \left|\frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)} - \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_{n-1}(z_0)}\right| \tag{5}$$

sont bornées, quels que soient les entiers n, m et $p \geq m$.

Puisqu'on a uniformément, pour z dans (D),

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_n(z)}{z^n} = E\left(\frac{1}{z}\right),$$

on déduit pour z dans (D)

$$\left|\frac{Q_n(z)}{z^n}\right| \leq H \qquad \text{(pour tout } n\text{)}$$

et pour $z = z_0$

$$0 < h \leq \left|\frac{Q_n(z_0)}{z_0^n}\right| \leq H \qquad \text{(pour tout } n\text{)},$$

h et H étant deux constantes indépendantes de n et z puisque aucun des polynomes $Q_n(z)$ ne s'annule pour $z = z_0 \neq \lambda_i$.

On a donc

$$\left|\frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)}\right| \leq \frac{H}{h}\left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

D'autre part,

$$\left|\frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)} - \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z_0)}\right| = \left|\frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)}\right| \left|1 - \frac{z-\lambda_{n+1}}{z_0-\lambda_{n+1}}\right| \leq \frac{H}{h\,d}|z-z_0|\left|\frac{z}{z_0}\right|^n,$$

d étant le minimum non nul de $|z_0 - \lambda_n|$ quand n prend successivement les valeurs 1, 2, 3, ... On en déduit alors

$$\sum_m^p \left|\frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)} - \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z_0)}\right| \leq \frac{H}{h\,d}|z-z_0| \sum_0^\infty \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{H|z_0|}{h\,d}\,\frac{|z-z_0|}{|z_0|-|z|}.$$

La quantité $\frac{|z-z_0|}{|z_0|-|z|}$ reste bornée dans le domaine (D) et le théorème est démontré.

Nous allons maintenant, pour démontrer que la série (1) satisfait à un théorème taubérien, établir un lemme qui nous fournira une nouvelle démonstration du théorème de continuité d'Abel.

LEMME. — *Si l'on a*

$$\lim_{n=\infty} |a_n z_0^n| = 0, \tag{6}$$

on a également, quand z tend vers z_0 dans l'angle (D),

$$\lim_{z\to z_0}\sum_0^\infty a_n\left[Q_n(z)-\left(\frac{z}{z_0}\right)^n Q_n(z_0)\right]=0. \tag{7}$$

Autrement dit, la série (1) se comporte au voisinage du point z_0 comme la série entière ayant les mêmes termes que (1) pour $z=z_0$.

En effet, nous avons

$$Q_n(z)-\left(\frac{z}{z_0}\right)^n Q_n(z_0)=z^n\left[E_n\left(\frac{1}{z}\right)-E_n\left(\frac{1}{z_0}\right)\right],$$

avec

$$E_n\left(\frac{1}{z}\right)=\prod_1^n\left(1-\frac{\lambda_\nu}{z}\right).$$

Or, nous avons vu que, lorsque n tend vers l'infini, la fonction $E_n\left(\frac{1}{z}\right)$ tend vers la fonction $E\left(\frac{1}{z}\right)$ uniformément dans le domaine $|z|\geq r>0$.

On sait que, dans ces conditions, les fonctions dérivées $E_n'\left(\frac{1}{z}\right)$ convergent uniformément vers la dérivée de $E\left(\frac{1}{z}\right)$ dans le domaine $|z|\geq 2r$, donc, on a l'inégalité, valable pour $|z|\geq 2r$

$$\left|E_n\left(\frac{1}{z}\right)-E_n\left(\frac{1}{z_0}\right)\right|<K|z-z_0|,$$

K étant une constante indépendante de z et de n. Les fonctions $E_n\left(\frac{1}{z}\right)$ satisfont à un critère d'égale continuité.

Pour $|z|<|z_0|$ les séries $\sum_0^\infty a_nQ_n(z)$ et $\sum_0^\infty a_nQ_n(z_0)\left(\frac{z}{z_0}\right)^n$ convergent puisque (6) est vérifié et l'on a

$$\left|\sum_0^\infty a_n\left[Q_n(z)-\left(\frac{z}{z_0}\right)^n Q_n(z_0)\right]\right|<K|z-z_0|\sum_0^N|a_nz^n|+K|z-z_0|\sum_{N+1}^\infty|a_nz_0^n|\left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Choisissons N tel que, pour $n\geq N$, on ait $|a_nz_0^n|<\varepsilon$; le deuxième terme du second membre est alors majoré par

$$\varepsilon K\frac{|z-z_0||z_0|}{|z_0|-|z|}<KK_1\varepsilon,$$

K et K_1 ne dépendant pas de ε ni de z dans (D).

N étant ainsi choisi, on peut prendre $|z-z_0|$ assez petit pour que le premier terme soit aussi petit que l'on veut, et le lemme est démontré.

Conséquences. — 1° Ce lemme nous permet de donner une nouvelle démons-

tration du théorème de continuité d'Abel. En effet, si la série (1) converge pour $z = z_0 \neq \lambda_i$ et a pour somme L, il en est de même de la série entière

$$\sum_0^\infty a_n Q_n(z_0) \left(\frac{z}{z_0}\right)^n, \tag{8}$$

D'après le théorème d'Abel sur les séries entières la somme de la série (8) tend vers L quand z tend vers z_0 dans l'angle (D). D'après le lemme, il en est de même de la somme de la série (1).

2° Montrons maintenant la réciproque suivante due à Littlewood [6], dans le cas des séries entières.

Théorème. — *Si l'on a*

$$|a_n z_0^n| = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (z_0 \neq \lambda_i \text{ ou non})$$

et si la somme de la série

$$\sum_{n=0}^\infty a_n Q_n(z_0 t) \qquad (0 < t < 1) \tag{9}$$

a une limite L *quand t tend vers* 1, *alors*

$$\sum_{n=0}^\infty a_n Q_n(z_0) = L$$

En effet, d'après le lemme établi, si (9) a une limite quand t tend vers 1, la série entière

$$\sum_0^\infty a_n Q_n(z_0)\, t^n \tag{10}$$

a même limite dans les mêmes conditions. On a évidemment,

$$|a_n Q_n(z_0)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et la série (10) vérifie le théorème de Littlewood. Par conséquent, elle converge pour $t = 1$ et

$$\sum_0^\infty a_n Q_n(z_0) = L,$$

le théorème est démontré.

3° Une autre conséquence du lemme précédent est le

Théorème. — *La série* $\Sigma n |a_n z_0^n|^2$ *étant supposée convergente, la série* (1) *converge en tout point* z_0 *du cercle de convergence pour lequel*

$$\lim_{t \to 1} G(z_0 t) \text{ existe} \qquad (0 < t < 1). \tag{11}$$

La convergence est uniforme pour l'ensemble des points tels que (11) *ait lieu uniformément sur cet ensemble.*

Ce théorème a été démontré par M. Féjer pour les séries entières (*voir* par exemple, Landau [8], p. 65). Montrons que ce théorème est valable pour les séries (1).

Si la somme de la série

$$\sum_{0}^{\infty} a_n Q_n(z_0 t) \qquad (0 < t < 1)$$

a une limite quand t tend vers 1, il en est de même de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z_0) t^n, \tag{12}$$

puisque l'on a

$$\lim_{n=\infty} a_n Q_n(z_0) = 0.$$

La série $\Sigma n |a_n Q_n(z_0)|^2$ converge, donc (12) converge pour $t = 1$. C'est précisément ce qu'il fallait prouver.

Comme l'égalité (7) a lieu uniformément par rapport à l'argument de z_0 sur le cercle $|z_0| = R$, on déduit du théorème de Fejer l'uniformité de la convergence de la série (1) sur l'ensemble des points du cercle de convergence où (11) a lieu uniformément.

Dans le même genre d'idées, nous démontrerons un théorème analogue à celui énoncé par M. Riesz [*voir* Landau (8), p. 73], dans le cas des séries entières.

THÉORÈME. — *Si la série* (1) *a le rayon de convergence* R *et si*

$$\lim_{n=\infty} a_n R^n = 0, \tag{13}$$

alors, la série (1) *converge en tout point du cercle de convergence, où la fonction* G(z) *est holomorphe. La convergence est uniforme sur tout arc fermé où la fonction* G(z) *est régulière.*

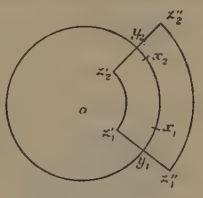


Fig. 9.

Soit $x_1 x_2$ un arc fermé sur lequel la fonction G(z) est régulière. G(z) est alors régulière sur le contour et dans le domaine (D) indiqué par la figure 9, à

condition de prendre $|z_1''| = |z_2''| = R''$ assez voisins de R et $|x_1 - y_1|$, et $|x_2 - y_2|$ suffisamment petits.

Posons

$$g_n(x) = \left(\frac{R}{x}\right)^{n+1} (x - y_1)(x - y_2)\left[G(x) - \sum_0^n a_\nu Q_\nu(x)\right].$$

Il suffit de démontrer qu'on a

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = 0,$$

uniformément dans le domaine (D), ou seulement sur sa frontière, d'après le théorème de Weierstrass. En effet, on en déduira bien, uniformément pour x sur l'arc $x_1 x_2$

$$G(x) = \lim_{n=\infty} \sum_0^n a_\nu Q_\nu(x),$$

puisque alors

$$|x - y_1| \geq d, \qquad |x - y_2| \geq d \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{R}{x}\right| = 1 \qquad (d > 0).$$

Désignons par ε_n le maximum de $|a_\nu R^\nu|$ pour $\nu \geq n$. On a

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

et l'on sait que, sur toute la frontière du domaine (D), on a

$$|Q_n(x)| < H|x|^n,$$

H étant indépendant de x et de n. Posons $x = r\frac{y_1}{R}$.

1° Pour $|z_1'| \leq r < R$, on a

$$\left|G(x) - \sum_0^n a_\nu Q_\nu(x)\right| \leq \sum_{n+1}^\infty |a_\nu Q_\nu(x)| < H\varepsilon_n \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{r}{R}},$$

d'où, puisque $|x - y_1| = R - r$ et $|x - y_2| < K$,

$$|g_n(x)| < HKR\varepsilon_n,$$

où le coefficient de ε_n est indépendant de x et de n.

2° Pour $R < r \leq R''$, on a, en désignant par M le maximum de $G(z)$ sur le contour et en posant

$$A_m = M + |a_0| + |a_1 Q_1(x)| + \ldots + |a_m Q_m(x)|,$$

$$\left|G(x) - \sum_0^n a_\nu Q_\nu(x)\right| \leq A_m + \sum_{m+1}^n |a_\nu Q_\nu(x)| \leq A_m + H\varepsilon_m \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \frac{1}{\frac{r}{R} - 1};$$

d'où

$$|g_n(x)| \leq \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left[A_m + H\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \frac{\varepsilon_m}{\frac{r}{R} - 1}\right](r - R)|x - y_2|.$$

Or $|x-y_2|<K$; donc

$$|g_n(x)|\leq K\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(r-R)A_m+HKR\varepsilon_m.$$

Choisissons m tel que $\varepsilon_m<\frac{\varepsilon}{2HKR}$. Comme

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(r-R)<\frac{R}{n},$$

on a, pour tout $n\geq\frac{2KRA_m}{\varepsilon}$,

$$|g_n(x)|<\varepsilon.$$

3° Pour x sur l'arc $z_1''z_2''$, avec les mêmes notations, on a

$$\left|G(x)-\sum_0^n a_\nu Q_\nu(x)\right|\leq A_m+H\varepsilon_m\left(1+\left|\frac{x}{R}\right|+\ldots+\left|\frac{x}{R}\right|^n\right)\leq A_m+H\varepsilon_m\left|\frac{x}{R}\right|^{n+1}\frac{1}{\left|\frac{x}{R}\right|-1}.$$

Comme $|x|-R\geq d>0$ et

$$|x-y_1|<K \qquad \text{et} \qquad |x-y_2|<K,$$

on a

$$|g_n(x)|\leq K^2\left|\frac{R}{x}\right|^{n+1}\left[A_m+\frac{HR}{d}\left|\frac{x}{R}\right|^{n+1}\varepsilon_m\right]\leq K^2\left|\frac{R}{x}\right|^{n+1}A_m+\frac{HK^2R}{d}\varepsilon_m.$$

Choisissons m tel que $\varepsilon_m<\frac{\varepsilon d}{2HK^2R}$; alors pour tout n vérifiant $n\geq n_0(\varepsilon)$ et $n\geq m$, on a

$$K^2\left|\frac{R}{x}\right|^{n+1}A_m<\frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$|g_n(x)|<\varepsilon.$$

4° Pour x sur l'arc $z_1'z_2'$, on a

$$\left|G(x)-\sum_0^n a_\nu Q_\nu(x)\right|<HR\varepsilon_n\left|\frac{x}{R}\right|^{n+1}\frac{1}{R-|x|}<\frac{HR}{d}\varepsilon_n,$$

d'où

$$|g_n(x)|<\varepsilon \qquad \text{pour} \quad n>n_0(\varepsilon).$$

Comme, d'autre part, on a

$$g_n(y_1)=g_n(y_2)=0,$$

on en déduit que, uniformément dans (D),

$$\lim_{n=\infty}g_n(x)=0,$$

ce qu'il fallait établir.

On peut enfin énoncer un dernier théorème, dont la démonstration s'établit facilement en utilisant la transformation d'Abel.

THÉORÈME. — *Les séries*

$$G(z)=\sum_0^\infty a_n Q_n(z) \qquad \text{et} \qquad T(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$$

convergent simultanément, sauf éventuellement pour $z=\lambda_\nu$.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DES POINTS SINGULIERS DE $G(z)$ SUR LE CERCLE DE CONVERGENCE.

Nous avons déjà démontré que si le rayon de convergence d'une série (1) vérifiait $R\neq\lambda_\nu$, la fonction $G(z)$ représentée par cette série avait un point singulier au moins sur le cercle de convergence. Nous allons démontrer un théorème analogue à celui de Landau valable pour les séries entières.

THÉORÈME. — *Si la série* (1) *est à coefficients positifs ou nuls et si elle a le rayon de convergence* $R\neq\lambda_\nu$ *alors le point* $z=R$ *est point singulier de* $G(z)$.

Ce théorème est en défaut si $R=\lambda_\nu$, comme le montre le développement de 0, $O_\nu(z)$. Nous n'en donnerons pas la démonstration qui est, en tout point, comparable à celle donnée à la fin de la première Partie dans un cas analogue.

Nous montrerons, enfin, le

THÉORÈME. — *Les fonctions*

$$G(z)=\sum_0^\infty a_n Q_n(z) \qquad \text{et} \qquad T(z)=\sum_0^\infty a_n z^n,$$

définies pour $|z|<R$, *ont mêmes points singuliers sur le cercle de convergence* $|z|=R\neq\lambda_\nu$, *à condition que*

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{n}{\log\frac{1}{\lambda_n}}<K.$$

On a, en effet, en posant

$$R_n\left(\frac{1}{z}\right)=\prod_{\nu=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_\nu}{z}\right) \qquad \text{et} \qquad E\left(\frac{1}{z}\right)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_\nu}{z}\right),$$

l'égalité

$$z^n E\left(\frac{1}{z}\right)-Q_n(z)=Q_n(z)\left[R_n\left(\frac{1}{z}\right)-1\right]. \tag{11}$$

Supposons $|z|\geq R$ et choisissons un nombre n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$, on ait

$$\lambda_n<\frac{R}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_n<e^{-\frac{n}{K}}.$$

Alors, puisque

$$|\log(1-y)| \leq 2|y| \qquad \text{pour} \quad |y| \leq \frac{1}{2},$$

on a

$$\left|\log R_n\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{2}{|z|}\sum_{n+1}^{\infty}\lambda_\nu < \frac{2}{|z|}\,\frac{e^{-\frac{n+1}{K}}}{1-e^{-\frac{n}{K}}} < A\,e^{-\frac{n}{K}},$$

d'où

$$\left|R_n\left(\frac{1}{z}\right)-1\right| < Be^{-\frac{n}{K}},$$

A et B étant indépendants de n et z pour $|z| \geq R$.

De (14) on tire

$$(15) \qquad E\left(\frac{1}{z}\right)T(z) - G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z)\left[R_n\left(\frac{1}{z}\right)-1\right],$$

et la série du second membre converge absolument et uniformément pour $|z| \leq R' < Re^{\frac{1}{K}}$. Ce qui prouve que les fonctions $T(z)$ et $G(z)$ ont mêmes points singuliers pour

$$R \leq |z| < Re^{\frac{1}{K}}, \qquad z \neq \lambda_\nu.$$

Ce théorème ne peut pas être amélioré. Il suffit pour le voir de prendre

$$a_n = (-1)^n, \qquad \lambda_n = e^{-\frac{n}{K}}.$$

La fonction $E\left(\frac{1}{z}\right)T(z) - G(z)$ n'est pas holomorphe pour $z = -e^{\frac{1}{K}}$ puisqu'on peut montrer facilement qu'elle augmente indéfiniment quand z tend vers $-e^{\frac{1}{K}}$ par valeurs supérieures.

On vérifie aisément que tous les théorèmes démontrés dans cette deuxième Partie, sauf le théorème de Landau, restent valables lorsque les nombres λ_ν sont complexes, et tels que la série $\sum_1^{\infty}|\lambda_\nu|$ converge.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Norlund, *Leçons sur les séries d'interpolation* (*Collection de Monographies sur la théorie des Fonctions*, 1926).

[2] Bendixson, *Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss* (*Acta Math.*, t. IX, 1887, p. 1-34).

[3] Polya, *Untersuchungen uber Lucken und Singularitäten von Potenzreihen* (*Mat. Zeitschrift*, t. 29, 1929, p. 549-640).

[4] Blaschke, *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali uber Folgen analytischer Funktiœnen* (*Leipziger Berichte*, t. 67, 1915, p. 194).

[5] Aronszajn, *C. R. Acad. Sc.*, t. 193, 1931, p. 1381.

[6] Littlewood, *The converse of Abel's Theorem on power series* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 9, 1911, p. 434-448].

[7] Bernstein, *Leçons sur les séries de Dirichlet* (*Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions*, 1933.).

[8] Landau, *Darstellung und Begrundüng einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* (J. Springer, Berlin, 1929).

[9] Valiron, *Sur la formule d'interpolation de Lagrange* (*Bull. Soc. Math.*, 2e série, t. XLIX, 1925, p. 181-191 et 203-224).

SUR

LES MINIMA ARITHMÉTIQUES DES FORMES

PAR M. CLAUDE CHABAUTY.

I. — Introduction.

Soit $f = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ une *forme positivement homogène* [$f(tx) = t^d f(x)$ pour tout $t > 0$] sur l'espace numérique réel à n dimensions R^n, à valeurs ≥ 0 et prenant éventuellement la valeur $+\infty$. Soit G un *réseau* de R^n de *masse* $m(G)$ [i. e. un sous-groupe du groupe additif de R^n, engendré par n vecteurs linéairement indépendants, $m(G)$ étant la mesure du parallélotope que définissent ces vecteurs]. Les « *minima* (1) *arithmétiques* » de f par rapport à G sont les n nombres μ_h, $0 \leq \mu_h \leq +\infty$, $h = 1, 2, \ldots, n$, ainsi définis : μ_h est la borne inférieure des nombres μ tels qu'il y ait au moins h éléments linéairement indépendants de G pour lesquels $f \leq \mu$.

Notons Γ l'ensemble des réseaux de R^n. Posons

$$\gamma(f) = \sup_{G \in \Gamma} \mu_1(f, G)(m(G))^{-\frac{d}{n}},$$

$$\rho(f) = \sup_{G \in \Gamma} \prod_{h=1}^{n} \mu_h(f, G)(m(G))^{-d}.$$

Nous appellerons $\gamma(f)$ la *constante d'Hermite* de f (2). On a évidemment $\rho(f) \geq (\gamma(f))^n$. Pour l'étude de $\gamma(f)$ et de $\rho(f)$ on peut toujours se ramener au cas où *le degré d'homogénéité de f est égal à* 1 ce que nous supposerons dans la suite, et nous dirons simplement *forme* pour forme positivement homogène de degré 1, sauf mention contraire.

(1) Nous disons *minima* suivant l'usage, quoique les bornes inférieures dont il s'agit ne soient pas nécessairement atteintes. Ce sont bien des minima si f est *régulière* (définie et continue).

(2) Si f est une forme quadratique définie positive à n variables $\gamma(f)$ est alors ce qu'on appelle classiquement « la constante d'Hermite » pour la dimension n.

Supposons que la forme f soit une *norme* sur R^n, i. e. une forme définie positive [$f(x)>0$ pour $x\neq 0$], symétrique [$f(-x)=f(x)$], convexe [$f(x+y)\leq f(x)+f(y)$], à valeurs finies. Les résultats classiques de Minkowski sont alors en posant $J=\mathcal{E}(f(x)\leq 1)$:

$$\gamma(f)\leq 2\,(\mathrm{mes}(J))^{-\frac{1}{n}} \quad (^3), \tag{I}$$

$$\rho(f)\leq 2^n(\mathrm{mes}(J))^{-1} \quad (^4), \tag{II}$$

et dans le cas d'une *norme euclidienne* (racine carrée d'une forme quadratique définie positive)

$$\rho(f)=(\gamma(f))^n \quad (^5). \tag{III}$$

L'inégalité (I) n'est évidemment qu'un cas particulier de (II) mais la démonstration de (I) est presque triviale et non celle de (II). D'autre part, Minkowski a donné une démonstration simple d'une forme affaiblie de l'inégalité (II), suffisante pour certaines applications :

$$\rho(f)\leq 2^n n!(\mathrm{mes}(J))^{-1} \quad (^6). \tag{II'}$$

Pour toute forme posons $\alpha(f)=\rho(f)(\gamma(f))^{-n}$. Nous appellerons $\alpha(f)$ l'*anomalie* de f; c'est un nombre évidemment toujours ≥ 1. L'inégalité (III) de Minkowski dit que *l'anomalie des normes euclidiennes est égale à* 1. Nous établirons le résultat intéressant, de démonstration très simple, et qui semble avoir échappé à l'attention jusqu'ici, que *l'anomalie d'une forme arbitraire est bornée par une constante ne dépendant que du nombre n des variables* ($^{6\,bis}$). *Ainsi, quand on sait majorer le premier minimum d'une forme pour tous les réseaux, on sait majorer automatiquement le produit de ses n premiers minima sur tout réseau.* Plus précisément nous établirons qu'on a toujours $\alpha(f)\leq 2^{\frac{n-1}{2}}$, qu'il existe des formes de R^n d'anomalie *égale* à $2^{\frac{n-1}{2}}$, que pour toute valeur ≥ 1 et $<2^{\frac{n-1}{2}}$ il existe des formes définies et *continues* sur R^n dont l'anomalie a cette valeur et cela pour chaque valeur de l'entier n.

La majoration sur l'anomalie peut encore s'énoncer sous la forme suivante : *Etant donnée une forme f sur* R^n, *dont la constante d'Hermite est* $\gamma(f)$, *quel que*

---

(3) Minkowski, *Geometrie der Zahlen* (Chap. 3, § 30).
(4) Minkowski, *Geometrie der Zahlen* (Chap. 5, § 50).
(5) Minkowski, *Geometrie der Zahlen* (Chap. 5, § 51).
(6) Minkowski, *Ges. Abh.*, I, p. 293-315 (lemme 1, p. 297).
(6 *bis*) Nous avons donné ce résultat dans un Cours de Théorie des Nombres, à l'Université de Strasbourg en mars 1948 et nous l'avons signalé dans une Note aux *C. R. Acad. Sc.* d'octobre 1948. (*cf.* [13]).

soit $c>0$ sur chaque réseau G on peut trouver n éléments linéairement indépendants $p_1, \ldots, p_n$ tels que

$$\prod_{h=1}^{n} f(p_h) \leq (1+c)\, 2^{\frac{n-1}{2}} (\gamma(f))^n m(G).$$

Par une méthode analogue nous avons une majoration relative au produit des k premiers minima d'une forme à n variables, qui, dans certaines applications développées ailleurs, permet d'employer des formes auxiliaires d'anomalie quelconque presque aussi commodément que si leur anomalie était égale à 1.

Nous donnons aussi quelques résultats sur l'anomalie de formes particulières; ainsi nous démontrons que pour une forme dont le groupe des transformations linéaires en elle-même a des propriétés convenables [et dont l'exemple le plus simple est $f(x)=|x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n|^{\frac{1}{n}}$] l'anomalie est égale à 1.

Introduisons le *coefficient de convexité* $\omega(f)$ d'une forme f symétrique

$$\omega(f) = \sup f(x+y)\,(f(x)+f(y))^{-1}, \qquad (x, y) \neq (0, 0).$$

On a alors avec la mesure de Lebesgue en posant $S(f)=\mathfrak{E}(f(x)\leq 1)$:

$$\gamma(f) \leq 2\,\omega(f)\,(\eta(f))^{\frac{1}{n}} (\operatorname{mes\,int} S(f))^{-\frac{1}{n}},$$

$$\rho(f) \leq 2^{\frac{3n-1}{2}} (\omega(f))^n \eta(f)\,(\operatorname{mes\,int} S(f))^{-1},$$

$\eta(f)$ étant le « coefficient d'empilement » de $S(f)$, coefficient qui est toujours ≤ 1.

Si f est une norme, $\omega(f)=1$ et la majoration de $\rho(f)$ obtenue en remplaçant $\eta(f)$ par 1 est moins forte que l'inégalité (II) de Minkowski, mais plus forte que son inégalité affaiblie (II') et de démonstration plus simple. Il n'est pas exclu qu'il existe des normes avec $\eta < 2^{\frac{1-n}{2}}$ pour lesquelles l'inégalité avec η serait meilleure que (II).

Les résultats précédents permettent aussi de majorer le produit des valeurs d'une forme aux points d'une *base* convenablement choisie d'un réseau G, en fonction de $\omega(f)$, mes int $S(f)$, $m(G)$ et du nombre de dimensions de l'espace, généralisant ainsi un résultat connu pour les normes (7), et de donner un résultat reliant le « *problème homogène et le problème non homogène* » relatifs à f [généralisant des théorèmes de Kintchine (8) et Mahler (9)].

(7) Le résultat pour les normes euclidiennes remonte à Hermite, *Œuvres*, t. I, p. 103; pour les normes quelconques, *cf.* Mahler, *Kon. Ned. Akad. Wet.*, t. 41, 1938, p. 634-637 (théorème 1).

(8) Kintchine, *Math. Annal.*, t. 113, 1936, p. 398-415.

(9) Mahler, *Kon. Ned. Akad. Wet.*, t. 41, 1938, p. 634-637.

En outre si φ est une *forme algébrique définie* de degré d à n variables, nous montrons qu'elle est arithmétiquement équivalente à une forme dont les coefficients satisfont à des majorations simples ne faisant intervenir que n, d, $\omega\left(|\varphi|^{\frac{1}{d}}\right)$ et $\operatorname{mes}\left(\underset{x}{\mathcal{E}}(|\varphi(x)|\leq 1)\right)$. D'où des résultats de finitude du nombre des classes pour des formes à *coefficients entiers*.

Nous entendrons dans la suite par ensemble *étoilé* un ensemble étoilé par rapport à l'origine ($x\in S$ entraîne $tx\in S$ pour $0\leq t\leq 1$) ([10]). On peut (*cf.* § II) définir directement pour un ensemble étoilé des quantités $\mu_h(S, G)$, $\gamma(S)$, $\rho(S)$, $\alpha(S)$, analogues à celles définies plus haut. La considération de l'ensemble étoilé le plus général n'apporte rien de nouveau par rapport à la considération des formes. En effet, à tout ensemble étoilé S on peut associer une forme f, l'*indicatrice* de S, qui est définie par la condition

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(f(x)<1)\subset S\subset\underset{x}{\mathcal{E}}(f(x)\leq 1)$$

et l'on verra que pour tout réseau G tous les ensembles étoilés de même indicatrice ont mêmes $\mu_h(h=1, 2, \ldots, n)$ qui sont égaux aux $\mu_h(f, G)$. Néanmoins nous trouverons le plus souvent commode dans les démonstrations qui suivent de parler en termes d'ensembles. De ce point de vue nous sommes amenés à signaler que certaines inégalités obtenues peuvent en un certain sens se généraliser à des *ensembles arbitraires*, et à utiliser un coefficient de convexité défini pour tout ensemble.

Les premiers résultats obtenus sur les minima successifs d'une forme (ou ensemble) non convexe sont dus à Jarnik ([11]) qui a aussi publié à ce sujet avec Knichal ([12]). Ces auteurs (dont nous ne connaissons les résultats que par les comptes rendus des *Math. Reviews*) considèrent uniquement le problème des solutions de $f(x-y)<$ const. en x et y tels que $x-y\in G$, c'est-à-dire des minima pour un ensemble étoilé T donné comme *vectoriel* d'un ensemble étoilé $S\left[T=\underset{z}{\mathcal{E}}(z=x-y,\ x\in S,\ y\in S)\right]$ et établissent des inégalités du type $\rho(T)\leq c(n)(\operatorname{mes}\operatorname{int} S)^{-1}$ et ne semblent pas s'être occupés de la notion que nous avons appelée anomalie. Nous avons indiqué un certain nombre de nos résultats dans deux Notes aux *C. R. Ac. Sc.* ([13]). Au moment où nous donnons ce travail à l'impression paraît un article de Rogers ([14]) qui cite la première de

([10]) Dans beaucoup de travaux de Géométrie des nombres en langue anglaise, en particulier dans ceux de Mahler, « star domain » a une signification plus restreinte, l'indicatrice étant supposée continue.

([11]) Jarnik, *Vestnik Kralovske Ceske Spolecnosti Nauk* (*Trida Matemat.*, Prirodoved, 1941.

([12]) Jarnik et Knichal, *Rospravy II Tridy Ceske Akad.*, t. 53, n° 43, 1943; les auteurs considèrent un ensemble arbitraire, mais c'est en réalité l'ensemble étoilé engendré qui est étudié.

([13]) Chabauty, *C. R. Ac. Sc.*, t. 227, 1948, p. 747 et t. 228, 1949, p. 796.

([14]) Rogers, *Kon. Nederland Akad. Wet.*, vol. 11, 1949, p. 256-263.

ces Notes $\left(\alpha \leqq 2^{n-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n}}\right)$ et obtient le résultat plus précis $\alpha \leqq 2^{\frac{n-1}{2}}$, démontré dans notre seconde Note, et certains des résultats relatifs à des ensembles arbitraires qui sont donnés ici et qui ne figuraient pas dans ces Notes. Depuis est paru un article de Mahler ([14bis]) où il démontre que $2^{\frac{n-1}{2}}$ est la meilleure majoration possible pour l'anomalie, résultat figurant dans notre seconde Note. [Les résultats de Rogers et de Mahler ont été communiqués à l'Académie des Sciences néerlandaise avant notre seconde Note, mais ont paru après elle.]

II. — Majoration de l'anomalie.

Soit dans R^n un ensemble *arbitraire* A ; nous dirons qu'un réseau G de R^n est *permis* si l'intersection de G et de A est vide ou se réduit à l'origine et nous poserons $\delta(A) = \inf m(G)$ pour les réseaux G permis [s'il n'y en a pas, on pose $\delta(A) = +\infty$]. Évidemment $\delta(\mathfrak{T}(A)) = |\det(\mathfrak{T})|\,\delta(A)$ pour toute transformation linéaire homogène $\mathfrak{T}$ et $\delta(A) \geqq \delta(B)$ si $A \supset B$.

Pour un ensemble $E \subset R^n$ nous noterons $\dim(E)$ la *dimension linéaire* de E, c'est-à-dire la dimension de la variété linéaire homogène engendrée par E. Nous noterons λA pour tout $\lambda \geqq 0$ l'homothétique de A par rapport à O dans le rapport λ.

Lemme. — *Soit* A *un ensemble tel que* $0 < \delta(A) < +\infty$; *soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *des nombres de l'intervalle* $]0, +\infty[$ *et tels que l'on ait*

$$\lambda_{h+1}\lambda_h^{-1} \quad \textit{entier pour } h = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{1}$$

$$\dim(G \cap \lambda_h A) \geqq h - 1 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

On a alors

$$\delta(A) \prod_{h=1}^{n} \lambda_h \geqq 1.$$

Si $g \in G \cap \lambda_h A$, alors $g \in G \cap \lambda_k A$ pour $k \geqq h$ en vertu de (1), donc si L_h est la variété linéaire homogène engendrée par $G \cap \lambda_h A$, $L_h \subset L_{h-1}$. On peut toujours se ramener au cas où $\lambda_1 = 1$ (les λ_h sont alors des entiers dont chacun divise le suivant), où $G = Z^n$ (réseau des points à coordonnées entières) et où les L_h sont définis par des équations $x_n = x_{n-1} = \ldots = x_h = 0$.

Soit H le réseau se déduisant de Z^n par la transformation

$$x_h \to \lambda_n \lambda_h^{-1} x_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

([14bis]) Mahler, *Kon. Ned. Akad. Wet.*, vol. 11, 1949, fasc. 3, p. 633-642.

C'est un sous-réseau de Z^n de masse égale à $\lambda_n^n \prod_{h=1}^{n} \lambda_h^{-1}$. Soit $p \in H$ et $\neq o$, soit j le plus petit entier tel que les coordonnées de p d'indice $> j$ soient toutes nulles. L'entier $\lambda_n \lambda_j^{-1}$ divise l'entier $\lambda_n \lambda_h^{-1}$ pour tout $h \leq j$ donc $q = \lambda_n^{-1} \lambda_j p$ appartient à Z^n. Par conséquent si $p \in \lambda_n A$ on a $q \in \lambda_j A$, ce qui est contraire à l'hypothèse que tous les points de $Z^n \cap \lambda_j A$ sont dans L_j et ont donc leur coordonnée d'indice j nulle. H est donc permis par rapport à $\lambda_n A$ et l'on a

$$\delta(\lambda_n A) \leq m(H) = \lambda_n^n \prod_{h=1}^{n} \lambda_h^{-1},$$

d'où résulte immédiatement l'assertion de l'énoncé.

Anomalie des ensembles étoilés. — Soit dans R^n un ensemble étoilé S: nous poserons pour tout réseau G :

$$\mu_h(S, G) = \sup \lambda \{ \lambda \geq o, \dim(S \cap \lambda G) \leq h - 1 \} = \inf \lambda \{ \lambda \geq o, \dim(S \cap \lambda G) \geq h \}.$$

Les μ_h sont des nombres de l'intervalle $[o, +\infty]$ et forment une suite croissante [au sens large] avec l'indice $h = 1, 2, \ldots, n$. Γ étant l'ensemble des réseaux de R^n, posons :

$$\gamma(S) = \sup_{G \in \Gamma} (m(G))^{-\frac{1}{n}} \mu_1(S, G),$$

$$\rho(S) = \sup_{G \in \Gamma} (m(G))^{-1} \prod_{h=1}^{n} \mu_h(S, G),$$

$\alpha(S) = \rho(S) (\gamma(S))^n$ sera *l'anomalie* de S.

On prendra $\prod \mu_h = o$ si $\mu_1 = o$ et $\mu_n = +\infty$, $\alpha = 1$ si $\rho = \gamma = o$, de sorte que les quantités introduites sont toujours définies et en particulier l'anomalie α est un nombre toujours ≥ 1.

On a évidemment

$$\mu_h(tS, t'G) = t^{-1} t' \mu_h(S, G);$$

$$(\gamma(\mathfrak{T}(S)))^n = |\det(\mathfrak{T})|^{-1} (\gamma(S))^n, \qquad \rho(\mathfrak{T}(S)) = |\det(\mathfrak{T})|^{-1} \rho(S), \qquad \alpha(\mathfrak{T}(S)) = \alpha(S),$$

pour des homothéties $x \to tx$, $x \to t'x$, et des transformations linéaires homogènes non singulières $x \to \mathfrak{T}(x)$. D'autre part $(\gamma(S))^n = (\delta(S))^{-1}$ car d'après la définition des μ_h la borne inférieure des masses des réseaux homothétiques à G et permis par rapport à S est $m(G) \mu_1^{-n}(S, G)$. Si $S \supset T$ (étoilé aussi) : $\gamma(S) \leq \gamma(T)$.

Soit f l'indicatrice de S, de sorte que

$$S' = \mathcal{E}(f(x) < 1) \subset S \subset S'' = \mathcal{E}(f(x) \leq 1),$$

on a pour tout $c>0$, $S'\subset S''\subset(1+c)S'$. Donc pour tout réseau G les μ_h de S' et ceux de S'' (et *a fortiori* ceux de tous les ensembles étoilés d'indicatrice f) sont égaux à $\mu_h(f, G)$ pour tout h. Les ensembles de même indicatrice ont donc même γ et même anomalie. Si f est continue, S' est ouvert, S'' fermé, et ces ensembles « comprennent » l'intérieur et l'adhérence de S. Donc un ensemble étoilé d'indicatrice continue a même γ et même anomalie que son intérieur et que son adhérence.

Soit $\psi(n)$ le plus petit nombre >0 tel que pour toute suite x_h $(h=1, 2, \ldots, n)$, $0<x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n<+\infty$, et pour tout nombre $c>0$ il existe une suite y_h $(h=1, 2, \ldots, n)$ avec $0<y_h<x_h$ $(h=1, 2, \ldots, n)$ et $y_{h+1}y_h^{-1}$ entier $(h=1, 2, \ldots, n-1)$ telle que

$$\prod_{h=1}^{n} x_h y_h^{-1}\leq\psi(n)(1+c).$$

Il est évident que $\psi(n)$ est fini : par exemple en définissant $y_h=2^{r_h}x_1(1-c)$ avec $r_h=\log_2(x_h x_1^{-1})$ on voit que $\psi(n)\leq 2^{n-1}$. Nous démontrerons tout à l'heure que $\psi(n)=2^{\frac{n-1}{2}}$.

Théorème. — *L'anomalie d'un ensemble étoilé de* R^n *est* $\leq\psi(n)$.

Soit G un réseau de R^n. Nous écrirons μ_h pour $\mu_h(S, G)$. Supposons $\mu_1>0$, $\mu_n<+\infty$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ un système de n nombres >0. Si l'on suppose $\lambda_h<\mu_h$ $(h=1, 2, \ldots, n)$ on peut affirmer que $\dim(G\cap\lambda_h S)<h$; si l'on suppose en outre $\lambda_{h+1}\lambda_h^{-1}$ entier $(h=1, 2, \ldots, n-1)$ on peut appliquer le lemme précédent et par conséquent

$$\prod\mu_h=\prod\lambda_h\times\prod\mu_h\lambda_h^{-1}\leq(\delta(S))^{-1}m(G)\prod\mu_h\lambda_h^{-1},$$

donc d'après la définition de $\psi(n)$

$$\prod\mu_h\leq(\delta(S))^{-1}m(G)\psi(n)(1-c),$$

pour tout $c>0$ donc

$$\prod_{h=1}^{n}\mu_h(S, G)\leq(\gamma(S))^n\psi(n)\,m(G). \tag{1}$$

Si maintenant $\mu_1>0$, $\mu_n=+\infty$, on peut choisir des nombres $\lambda_h>0$ avec $\lambda_{h+1}\lambda_h^{-1}$ entier et $\lambda_h<\mu_h$ ayant un produit $\prod\lambda_h$ arbitrairement grand: donc en vertu du lemme on a $\delta(S)=0$ i. e. $\gamma(S)=+\infty$; l'inégalité (1) est donc automatiquement vérifiée puisque le second membre est égal à $+\infty$. Si $\mu_1=0$, $\mu_n<+\infty$, l'inégalité (1) est aussi vérifiée puisque son premier membre est

nul. Enfin si $\mu_1 = 0$, $\mu_n = +\infty$ $\prod \mu_h$ est conventionnellement pris égal à zéro, donc (1) est toujours vérifiée, ce qui équivaut à l'énoncé du théorème.

Remarquons que les ensembles pour lesquels la convention relative à $0 \times \infty$ peut avoir à jouer, sont de nature très particulière : en effet $\mu_n = +\infty$ entraîne que $\complement S$ contient une famille partout dense de droites passant par l'origine, donc S est un ensemble frontière; si en outre $\mu_1 = 0$, S doit contenir des segments issus de l'origine de longueur arbitrairement grande.

Détermination de la valeur exacte de $\psi(n)$. — Étant donnée une suite $x_1, \ldots, x_n$, $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n < +\infty$, appelons suite auxiliaire permise [pour la suite $(x_1, \ldots, x_n)$] toute suite $z_1, \ldots, z_n$ telle que $0 < z_h \leq x_h$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ et que $z_{h-1} z_h^{-1}$ soit entier $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$. Nous noterons $[a]$ le plus grand entier $\leq a$ et nous poserons

$$r(p, q) = [\log_2(x_q x_p^{-1})] \quad \text{pour} \quad 1 \leq p \leq q \leq n;$$
$$r(p, q) = -r(q, p) - 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leq q < p \leq n;$$
$$z_h^{(k)} = 2^{r(k,h)} x_k \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Autrement dit $r(k, h)$ est le plus grand des exposants entiers ρ positifs ou négatifs tels que $2^\rho x_k$ soit $\leq x_h$ si $h \geq k$ et que $2^\rho x_k$ soit $< x_h$ si $h < k$. Donc la suite $z_h^{(k)}$ pour k fixe est une suite auxiliaire permise pour la suite $x_1, \ldots, x_n$.

Posons

$$\varphi_k = \varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{h=1}^{n} x_h (z_h^{(k)})^{-1} = x_k^{-n} \prod_{h=1}^{n} x_h \times \prod_{h=1}^{n} 2^{-r(k,h)}.$$

On a

$$\prod_{k=1}^{n} \varphi_k = \prod_{k=1}^{n} \prod_{h=1}^{n} 2^{-r(k,h)} = \prod_{h<k} 2^{-r(k,h)-r(h,k)} \cdot 2^{n\frac{n-1}{2}},$$

de sorte qu'au moins un des φ_k, soit φ_{k_0}, est $\leq 2^{\frac{n-1}{2}}$. Donc si nous prenons

$$y_h = z_h^{(k_0)} (1 + c)^{-1} \qquad (c > 0)$$

on a

$$0 < y_h < x_h, \qquad y_{h-1} y_h^{-1} \text{ entier} \quad \text{et} \quad \prod_{h=1}^{n} x_h y_h^{-1} \leq 2^{\frac{n-1}{2}} (1 + c)^n$$

pour tout $c > 0$, donc $\psi(n) \leq 2^{\frac{n-1}{2}}$.

D'autre part l'ensemble des suites auxiliaires permises pour une suite $x_1, \ldots, x_n$ donnée [considérées comme des points de R^n] est un ensemble compact. Il y a au moins une de ces suites qui réalise le minimum de $\prod x_h z_h^{-1}$ et pour une telle suite extrême on a évidemment $z_h = x_h$ pour au moins une valeur de h. Considérons la suite $x_h = 2^{\frac{h-1}{n}}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$. Parmi les suites

auxiliaires permises pour x_h et telles que $z_k = x_k$ il y en a une qui donne à $\prod x_h z_h^{-1}$ sa moindre valeur; c'est évidemment la suite $t_h^{(k)} = \frac{x_k}{2}$ pour $h < k$, $t_h^{(k)} = x_k$ pour $h \geq k$, alors

$$\prod_h t_h^{(k)} = x_k^n 2^{-k+1} = 1.$$

Donc pour toutes ces suites

$$\prod_h (t_h^{(k)})^{-1} x_h = \prod_h x_h = 2^{\frac{n-1}{2}}$$

et par conséquent le minimum de $\prod x_h z_h^{-1}$ pour toutes les suites auxiliaires permises par rapport à la suite x_h considérée est $2^{\frac{n-1}{2}}$. En raisonnant comme plus haut il en résulte que $\psi(n) \geq 2^{\frac{n-1}{2}}$. Finalement on a donc $\psi(n) = 2^{\frac{n-1}{2}}$.

III. — Construction d'ensembles étoilés d'anomalie maxima.

LEMME. — *Soient* A *et* B *deux réseaux dans* R^n *et supposons que pour tout* $y \in B$ *il existe un nombre réel* t *et un* $x \in A$ *tels que* $y = tx$. *Alors il existe un réseau* $E \subset A$ *et un nombre réel* λ *tels que* $E = \lambda B$.

En effet, soient $b_1, \ldots, b_n$ les éléments d'une base de B; on peut trouver des nombres réels λ_h et des éléments $a_h \in A$ tels que $b_h = \lambda_h a_h$. On a

$$b_1 + b_2 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

mais aussi $b_1 + b_2 = \rho c = \rho\alpha_1 a_1 + \rho\alpha_2 a_2$, c étant un élément convenable de A, ρ un nombre réel, α_1, α_2 des entiers tous deux $\neq 0$; donc $\lambda_1 = \rho\alpha_1$, $\lambda_2 = \rho\alpha_2$, et $\lambda_2\lambda_1^{-1}$ est un nombre rationnel. On démontrerait de même que tous les $\lambda_h\lambda_1^{-1}$ sont rationnels. Soit τ un entier tel que tous les $\tau\lambda_h\lambda_1^{-1}$ soient entiers. On voit immédiatement que si l'on prend $\lambda = \tau\lambda_1^{-1}$, $E = \lambda B$ est bien un réseau contenu dans A.

COROLLAIRE. — *Sur chaque droite joignant l'origine à un point du réseau* A *il y a des points du réseau* B.

En effet puisque E est un réseau contenu dans le réseau A, E est un sous-groupe d'indice fini de A $\left[\text{l'indice est } j = \frac{m(E)}{m(A)}\right]$. Soit $a \in A$; parmi les éléments $a, 2a, \ldots, (j+1)a$ il y en a nécessairement deux distincts qui sont congrus mod(E). Donc il y en a un qui appartient à E.

Il résulte immédiatement du corollaire que si $a_1, \ldots, a_n$ *est une base de* A, *il existe une base* $b_1, \ldots, b_n$ *de* B *telle que*

$$b_h = \lambda_{h1} a_1 + \lambda_{h2} a_2 + \ldots + \lambda_{hh} a_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Ensemble étoilé non borné d'anomalie $2^{\frac{n-1}{2}}$. — Pour tout $x \in \mathrm{R}^n$ nous noterons $pj_h(x)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ ses coordonnées et $\nu(x)$ le plus petit des entiers h tels que $pj_h(x) = 0$ pour tout $k > h$. Considérons le réseau Z^n des points à coordonnées entières dans R^n. Soient e_h les éléments de sa base canonique (vecteurs unités sur les axes). A tout élément *primitif* z de Z^n (i. e. $\lambda \neq 0$, $\lambda z \in \mathrm{Z}^n$ implique $|\lambda| \geq 1$) faisons correspondre la demi-droite D_z formée de tous les points λz avec $\lambda \geq 2^{\frac{1-\nu(z)}{n}}$. Soit D la réunion de ces demi-droites et U le complémentaire de D; c'est un ensemble étoilé. On a par construction

$$\mu_h(\mathrm{U}, \mathrm{Z}^n) = 2^{\frac{h-1}{n}} \qquad (h = 1, \ldots, n).$$

Donc

$$\prod_{h=1}^{n} \mu_h(\mathrm{U}, \mathrm{Z}^n) = 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Nous allons établir que $\gamma(\mathrm{U}) = 1$, *donc* $\alpha(\mathrm{U}) \geq 2^{\frac{n-1}{2}}$ *et par conséquent* $\alpha(\mathrm{U}) = 2^{\frac{n-1}{2}}$.

Si pour $h = 1, \ldots, n$, on a pour des $a_h \in \mathrm{Z}^n$ $\nu(a_h) = h$, $|pj_h(a_h)| = 1$, on peut, par une transformation linéaire homogène laissant invariants globalement les points de Z^n et l'indice $\nu(x)$ de tous les $x \in \mathrm{R}^n$, donc laissant U invariant, se ramener au cas où $a_h = e_h$. D'autre part chaque point x de D est sur une demi-droite D_z bien définie. Nous noterons x^* le point primitif z de Z^n qui correspond ainsi à x. Remarquons que $pj_h(x) = 2^{\frac{1-\nu(x)}{n}} pj_h(x^*)$ donc $|pj_h(x)| > 2^{-1} |pj_h(x^*)|$ donc si $0 < |pj_h(x)| \leq 1$ on a

$$pj_h(x^*) = 1.$$

Soit G un réseau permis par rapport à U, G admet une base $b_1, \ldots, b_n$ telle que, pour tout h, $\nu(b_h) = h$. Nous poserons $b_h = \lambda_h b_h^*$. Par construction

$$\lambda_h \geq 2^{\frac{1-h}{n}} \qquad \text{et} \qquad m(\mathrm{G}) = \prod_h |pj_h(b_h)| = \prod_h \lambda_h |pj_h(b_h^*)|.$$

Lemme. — *Soit* k *le plus petit des indices* h, *s'il en existe, tels que* $|pj_h(b_h)| < 1$. *On a* $|pj_h(b_h)| = 2 |pj_h(b_k)|$ *pour tout indice* $h < k$, $|pj_h(b_h)| \geq |pj_k(b_k)|$ *pour tout indice* $h \geq k$.

Le choix de k entraine $|pj_k(b_k^*)| = 1$. On peut donc supposer qu'on s'est ramené au cas où $b_k^* = e_k$.

Considérons d'abord un indice $h<k$. Formons $c_h=b_h+b_h$, on a $|pj_k(c_h)|=\lambda_k$ et puisque par hypothèse $0<\lambda_k<1$, $|pj_k(c_h^*)|=1$. Comme d'autre part $pj_h(c_h)=pj_h(b_h)\neq 0$, $|pj_h(c_h^*)|$ est un entier $r_h\neq 0$. Les projections de c_h et c_h^* sont proportionnelles; on a donc $\lambda_h=r_h\lambda_k$. Par hypothèse $\lambda_h\geq 1$. $\lambda_k<1$ donc l'entier r_h est ≥ 2, d'où $|pj_h(b_h)|\geq 2|pj_k(b_k)|$.

Soit maintenant un indice $h>k$. Si $|pj_h(b_h)|<1$, alors $|pj_h(b_h^*)|=1$, $\lambda_h<1$, et l'on peut supposer $b_h^*=c_h$. Considérons $c_h=b_h+b_k$; on a alors $|pj_h(c_h)|=\lambda_h$, $|pj_k(c_h)|=\lambda_k$; comme $0<\lambda_h<1$, $0<\lambda_k<1$, on a $|pj_h(c_h^*)|=1=|pj_k(c_h^*)|$ d'où $\lambda_h=\lambda_k$ et $|pj_h(b_h)|=|pj_k(b_k)|$. Si $|pj_h(b_h)|\geq 1$, il n'y a rien à démontrer.
Il résulte donc du lemme que : ou

$$|pj_h(b_h)|\geq 1 \quad \text{pour tout } h \qquad \text{donc} \qquad \prod |pj_h(b_h)|\geq 1,$$

ou sinon il existe un plus petit indice k pour lequel $|pj_k(b_k)|<1$ et alors :

$$\prod |pj_h(b_h)|\geq 2^{k-1}\lambda_k^n\geq 2^{k-1}\left(2^{\frac{1-k}{n}}\right)^n=1.$$

Finalement on a démontré que $m(G)\geq 1$ pour tout réseau permis, donc $\gamma(U)\geq 1$, et comme Z^n est permis $\gamma(U)=1$.

Ensemble borné d'anomalie $2^{\frac{n-1}{2}}$. — Posons

$$\|x\|=\max|pj_h(x)|, \qquad P_r=\mathcal{E}(\|x\|<r) \qquad \text{et} \qquad V_r=U\cap P_r.$$

Quand la constante r est assez grande V_r a même γ que U [U est « réductible à un ensemble borné » au sens de Mahler ([15])] *et mêmes minima que U par rapport à Z^n et par conséquent une anomalie aussi égale à* $2^{\frac{n-1}{2}}$.

En effet prenons $r>n\,2^{2n}$. V_r contient le pavé $P_{\frac{1}{2}}$ de mesure 1. Soit G un réseau permis par rapport à V_r et de masse ≤ 1. Il existe donc un système de n éléments linéairement indépendants de G, $a_1, \ldots, a_n$, tels que

$$\|a_h\|\geq\frac{1}{2}, \qquad \prod\|a_h\|\leq 2^n$$

[d'après l'inégalité (II) de Minkowski ([16])] et par conséquent

$$\|a_h\|\leq 2^{2n-1} \qquad (h=1, 2, \ldots, n).$$

Il existe une base de G formée d'éléments $b_1, \ldots, b_n$ tels que leurs coordon-

([15]) MAHLER, *Kon. Ned. Akad. Wet.*, t. 49, p. 298-309.

([16]) On pourrait aussi bien, en prenant une valeur un peu plus grande de r, utiliser l'inégalité

$$\prod\|a_h\|\leq 2^{\frac{3n-1}{2}}$$

qui résulte du paragraphe V.

nées relatives à $a_1, \ldots, a_n$ soient comprises entre zéro et 1, donc $\|b_h\| \leq n 2^{2n-1}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$.

Les points a_h, b_h, $b_i + b_j$ appartiennent donc à $P_r \cap \complement V_r$ donc à $\complement U$, il en résulte que $b_i = \rho_i z_i$, $z_i \in Z^n$, et que les $\rho_i \rho_j^{-1}$ sont des nombres rationnels, G est donc homothétique à un réseau $H \subset Z^n$. En outre si $x \in G$, $\nu(x) = h$ et si $|pj_h(x)|$ (nécessairement $\neq 0$) est < 1, le point primitif de Z^n porté par la demi-droite joignant x à l'origine, soit x^*, est tel que $|pj_h(x^*)| = 1$. C'est évident si $\|x\| < r$. Sinon il existe $y \in G$ avec $\nu(y) < h$ tel que $\|y - x\| < r$ puisque P_r contient une base du sous-groupe de G formé des éléments $y \in G$ avec $\nu(y) < h$; on a alors $|pj_h((x-y)^*)| = 1$ donc $|pj_h(x^*)| = 1$.

Les remarques qui précèdent indiquent qu'on peut démontrer que $m(G) \geq 1$ (donc $= 1$) et par conséquent $\gamma(V_r) = 1$ par les mêmes raisonnements qui ont permis de démontrer $\gamma(U) = 1$ dans l'alinéa précédent. D'où le résultat annoncé puisque $\mu_h(V_r, Z^n) = \mu_h(U, Z^n)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$.

Ensemble étoilé régulier d'anomalie comprise entre 1 et $2^{\frac{n-1}{2}}$. — Nous appellerons ici ensemble étoilé *régulier* un ensemble étoilé dont l'indicatrice est une forme continue définie [$f(x) = 0$ pour $x = 0$ seulement]. Un tel ensemble est en particulier borné et contient un voisinage de l'origine. L'ensemble V_r défini ci-dessus a ces dernières propriétés mais n'est pas régulier car son indicatrice n'est évidemment pas continue.

Mais on peut aisément former *une famille d'ensembles étoilés* réguliers « tendant » vers U et *dont l'anomalie est arbitrairement voisine de* $2^{\frac{n-1}{2}}$; on peut s'arranger pour que l'anomalie des ensembles de cette famille *prenne toutes les valeurs* ≥ 1 et $< 2^{\frac{n-1}{2}}$.

Soient A une des demi-droites avec lesquelles on a construit D, s son origine, $k = \nu(s)$, soit $t \in [0, +\infty]$ et soit A_t le cône engendré par les demi-droites d'origine s qui percent l'hyperplan $pj_k(x) = 2pj_k(s)$ en des points y tels que $pj_j(y - 2s) \leq t$ pour tout $j \neq k$. Soit D_t la réunion de tous les ensembles A_t et $W_t = \complement D_t$. W_0 est identique à U, W_∞ est le pavé

$$|pj_h(x)| < 2^{\frac{1-h}{n}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Tous les W_t sont des ensembles étoilés ouverts, ils sont emboîtés ($t > t'$ entraîne $W_t \subset W_{t'}$, en particulier, pour tout t, $W_t \supset W_\infty$) et $U = \bigcup_t W_t$. Il en résulte ([17]) que $\lim_{t \to 0} \gamma(W_t) = \gamma(U)$. Comme pour tout t, $\mu_h(W_t, Z^n) = 2^{\frac{1-h}{n}}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ on voit donc que $\lim_{t \to 0} \alpha(W_t) = 2^{\frac{n-1}{2}}$.

([17]) D'après le « lemme d'approximation » du paragraphe VI.

Démontrons maintenant que W_t est un ensemble *étoilé régulier* pour tout $t > 0$. En effet adjoignons à R^n un hyperplan à l'infini F; les points à l'infini des A sont partout denses dans F. Les intérieurs $\mathring{A}_t$ des cônes A_t (t fixe > 0) ont pour traces sur F des ensembles ouverts dans F et non vides. Comme F est compact il suffit de prendre un nombre fini d'entre eux pour recouvrir F. Considérons les cônes correspondants A_{t_i}, $i \in I$ fini. $W'_t = \bigcap_{i \in I} \mathring{A}_{t_i}$ est un fermé dans $R^n \cup F$, qui ne rencontre pas F; c'est donc une partie bornée de R^n. W'_t contient l'adhérence $\overline{W}_t$ de W_t, $\overline{W}_t$ est donc borné et contient les sommets s d'un nombre fini de cônes A_t, D_t est donc identique à la réunion d'un nombre fini d'ensembles A_t et W_t est un domaine polyédral borné, limité par un nombre fini de faces hyperplanes qui ne passent pas par l'origine et même dont la distance à l'origine est pour $t \leq t_0 < +\infty$ supérieure à une constante > 0. Son indicatrice est bien une fonction finie, définie et continue.

Écrivons l'équation de la frontière de W_t ($t > 0$) en coordonnées « polaires » $\rho = f(\theta, t)$; on montre aisément que f est continu en t uniformément par rapport à 0. Donc à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\eta(t)$ tel que $|t' - t| \leq \eta$ entraîne $(1-\varepsilon)W_t \subset W_{t'} \subset (1+\varepsilon)W_t$; il en résulte que les minima de W_t par rapport à *tout* réseau fixe varient continûment avec t par conséquent l'anomalie de W_t est aussi fonction continue de t. Comme $\alpha(W_\infty) = 1$ et $\lim_{t \to 0} \alpha(W_t) = 2^{\frac{n-1}{2}}$, l'anomalie des W_t prend toutes les valeurs intermédiaires quand t parcourt l'intervalle $[\infty, 0]$.

Nous pouvons donc résumer les résultats sur l'anomalie de la façon suivante :

Théorème. — *Dans* R^n *tout ensemble étoilé a une anomalie* $\leq 2^{\frac{n-1}{2}}$; *il existe des ensembles étoilés bornés d'anomalie* $= 2^{\frac{n-1}{2}}$; *il existe des ensembles étoilés réguliers dont l'anomalie prend toute valeur* ≥ 1 *et* $< 2^{\frac{n-1}{2}}$.

IV. — Anomalie de certains ensembles.

Appelons *jauge* tout ensemble étoilé dont l'indicatrice f est une norme; elle sera dite *euclidienne* si la norme f est la racine carrée d'une forme quadratique définie positive. L'indicatrice étant alors continue nous pouvons nous borner dans les démonstrations a la considération des jauges *ouvertes*. Le résultat de Minkowski donné par la relation (II) du paragraphe I peut donc s'énoncer : *L'anomalie de toute jauge euclidienne* K *est égale à* 1.

Reproduisons la brève démonstration de Minkowski. On peut toujours se ramener au cas où le réseau considéré dans R^n est le réseau des points à coordonnées entières Z^n, les minima de f (ou de K), $\mu_h = \mu_h(f, Z^n) = \mu_h(K, Z^n)$

atteints pour des points p_h tels que $pj_h(p_h) \neq 0$, $pj_k(p_h) = 0$ pour tout $k > h$, et f^2 mise sous la forme $\sum X_i^2$ où les $X_i = \sum_j a_{ij} x_j$ sont des formes linéaires indépendantes avec $a_{ii} \neq 0$, $a_{ij} = 0 (j > i)$, de déterminant égal à 1. Posons $f'^2 = \sum X_h^2 \mu_h^{-2}$. On a, pour tout $x \in Z^n$ tel que $pj_h(x) \neq 0, pj_k(x) = 0$ pour tout $k > h$, $f(x) \geq \mu_h$ donc

$$f'^2(x) = \sum_{i=1}^{h} X_i^2 \mu_i^{-2} \geq \mu_h^{-2} \sum f^2(x) \geq 1.$$

Donc Z^n est permis par rapport à la jauge $\mathcal{E}(f'(x) < 1)$ qui se déduit de la première par une transformation linéaire homogène de déterminant $\prod \mu_h$.

Donc on a toujours

$$\prod \mu_h(K, Z^n) \leq (\gamma(K))^n \quad \text{donc } \alpha(K) = 1.$$

D'autre part le résultat suivant est probablement bien connu quoique nous ne lui connaissions pas de référence :

Pour toute jauge J *dans* R^2 *l'anomalie est égale à* 1.

Soient p_1, p_2 deux points réalisant les « minima » de J par rapport à un réseau G, i. e. p_1 (resp p_2) appartient à la frontière de $J_1 = \mu_1 J$ (resp $J_2 = \mu_2 J$), où $\mu_1 = \mu_1(J, G)$, $\mu_2 = \mu_2(J, G)$. Soit T une droite d'appui de J_2 parallèle à Op_1 et $t \in J_2 \cap T$. Soit $\mathcal{L}$ la transformation linéaire définie par $t \to t$, $\mu_2 \mu_1^{-1} p_1 \to p_1$ de déterminant $\mu_2^{-1} \mu_1$. Comme toute parallèle à Op_1 qui rencontre J_2 rencontre le segment joignant t à son symétrique par rapport à O, on voit aisément que la jauge $J' = \mathcal{L}(J_2)$ est contenue dans J_2 et que G est par conséquent un réseau permis par rapport à J', d'où

$$\mu_1 \mu_2 \delta(J) = \delta(J') \leq m(G),$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

Pour un nombre de dimensions $n > 2$ ce mode de démonstration ne semble pas se généraliser tel quel ([17 bis]). En utilisant outre des transformations linéaires des transformations continues non linéaires convenables on obtient ([18]) l'inégalité de Minkowski

$$\gamma(J) \leq 2^n (\text{mes}(J))^{-1}.$$

([17 bis]) Il nous a permis seulement de démontrer que l'anomalie des jauges de R^n est $\leq \psi'(n) < \psi(n)$, où $\psi'(n)$ est l'analogue de $\psi(n)$ relativement à des suites $x_1, \ldots, x_n$ avec $x_{n-1} = x_n$. Par exemple *l'anomalie des jauges de* R^3 est $\leq 2^{\frac{2}{3}}$, alors qu'il y a des ensembles étoilés de R^3 d'anomalie égale à 2.

([18]) *Cf.* la présentation géométrique très concise de DAVENPORT, *Quart. J. of Math. Oxford ser.*, vol. 10. 1939, p. 119-121.

Mais le théorème de Hlawka ([19]) montre que pour tout ensemble quarrable A, $\varepsilon(A) = \mathrm{mes}(A)(\dot{c}(A))^{-1}$ est toujours ≥ 1. Les améliorations de ce théorème pour une jauge générale ([20]) permettent seulement de remplacer 1 par une constante c plus grande ($c = 4{,}59$ pour n assez grand). On peut donc tirer de là une majoration de l'anomalie pour les jauges :

$$\alpha(J) \leq 2^n (\mathrm{mes}(J))^{-1} (\gamma(J))^{-n} \leq 2^n c^{-1},$$

mais elle est *moins forte que celle que nous avons établie pour l'ensemble étoilé le plus général.*

Évidemment les jauges pour lesquelles $\gamma(J) = 2(\mathrm{mes}(J))^{-\frac{1}{n}}$ ont d'après l'inégalité (II) de Minkowski une anomalie égale à 1. Ce sont comme on sait les jauges J telles qu'il existe un réseau G ayant la propriété suivante : les ensembles $J + g$, $g \in G$ « *pavent* » l'espace, c'est-à-dire forment une partition de R^n à un ensemble de mesure nulle près; exemple :

$$J = \mathcal{E}_x(|pj_h(x)| < 1).$$

Remarquons que les jauges particulières dont nous avons parlé : jauges euclidiennes et jauges de « pavage », qui ont l'anomalie 1, sont les seules dont on connaisse l'anomalie, et qu'*on ignore s'il existe des jauges d'anomalie* > 1.

On peut utiliser les résultats précédents pour majorer non trivialement (c'est-à-dire mieux que par $2^{\frac{n-1}{2}}$) l'anomalie de certaines jauges ou de certains ensembles étoilés S, par exemple quand l'ensemble est compris entre deux jauges euclidiennes « suffisamment voisines ». Soit $\pi(S)$ la borne inférieure des valeurs absolues des déterminants des transformations linéaires homogènes $\mathcal{C}$ telles que, K étant une jauge euclidienne.

$$K \subset S \subset \mathcal{C}(K),$$

alors on montre aisément que $\alpha(S) \leq \pi(S)$. (Dans le cas $n = 2$ on peut utiliser une jauge arbitraire à la place d'une jauge euclidienne.)

D'autre part si S contient une jauge euclidienne K (ou une jauge arbitraire dans le cas $n = 2$) on a évidemment la majoration

$$\alpha(S) \leq (\gamma(K))^n (\gamma(S))^{-n}$$

qui peut être non triviale.

Exemple : *forme cubique binaire à discriminant positif.* — On peut se ramener à la forme $x_1^3 + x_2^3$. Soit C le domaine plan défini par $|x_1^3 + x_2^3| \leq 1$. On sait

([19]) Hlawka, *Math. Zeits.*, t. 49, 1943, p. 285-312.

([20]) Mahler, *Duke Math. J.*, t. 13, 1946, p. 611-621; Davenport-Rogers, *Ibid.*, t. 14, 1947, p. 367-375.

[Mordell ([21])] que $(\gamma(C))^2 = \left(\frac{27}{23}\right)^{\frac{1}{6}}$. Or C contient la jauge J réunion de l'ensemble défini par $x_1x_2 \geq 0$, $x_1^2 + x_2^2 < 1$ et de l'ensemble défini par $x_1x_2 \leq 0$, $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$. Contentons-nous de la majoration

$$(\gamma(J))^2 \leq 4(\text{mes}(J))^{-1} = 8(\pi + 4)^{-1}$$

il en résulte

$$\alpha(C) \leq 8(23)^{\frac{1}{6}}((\pi + 4)\sqrt{3})^{-1} < 1,1.$$

Anomalie des ensembles automorphes. — Donnons maintenant un exemple d'ensemble étoilé *non borné* dont l'anomalie est égale à 1. Soit S un ensemble étoilé. Appelons *automorphisme* de S toute transformation linéaire homogène $\mathcal{L}$ de déterminant $\neq 0$ telle que $\mathcal{L}(S) = S$. On peut remarquer que si $0 < \hat{\delta}(S) < +\infty$ le déterminant de $\mathcal{L}$ est nécessairement ± 1, puisque

$$\delta(\mathcal{L}(S)) = |\det(\mathcal{L})|\,\delta(S) = \delta(S).$$

Appelons *automorphisme distingué* de S tout automorphisme de déterminant 1 ayant une valeur propre simple réelle et > 1 tandis que toutes les autres valeurs propres (dont certaines peuvent être complexes) sont en valeur absolue < 1. A un tel automorphisme distingué associons la droite portant le vecteur propre correspondant à la valeur propre simple > 1, que nous appellerons son *axe*. Si S admet un automorphisme distingué il est nécessairement non borné. Si S contient un voisinage de O il contient un segment I de l'axe A de tout automorphisme distingué $\mathcal{L}$, dont O est point interne, donc $S \supset \mathcal{L}^h(I)$ pour tout $h \in Z$ et par conséquent S contient l'axe A tout entier. On a alors le résultat suivant.

Si l'ensemble étoilé ouvert S *de* R^n, *contenant l'origine, admet n automorphismes distingués* $\mathcal{L}_h$ *dont les axes* A_h *sont linéairement indépendants, l'anomalie de* S *est égale à* 1 ;

comme corollaire du résultat plus précis :

Pour un tel ensemble S, *quel que soit le réseau* G *on a*

$$\mu_h(S, G) \leq \gamma(S)\,(m(G))^{\frac{1}{n}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

$\gamma(S)$ est > 0. Supposons le $< +\infty$, sinon le résultat à démontrer est trivial. Soit

$$S_t = \mathop{\mathcal{E}}_{x}\left(x \in S,\ \sum |x_h| < t\right).$$

Les $S_t (t > 1)$ sont des ensembles étoilés ouverts emboîtés ($t' > t$ entraine

([21]) MORDELL, *J. London Math. Soc.*, t. 29, 1944, p. 92-99.

$S_t \supset S_t$), leur réunion est l'ouvert S contenant l'origine. Il en résulte ([22]) que $\lim_{t \to \infty} \gamma(S_t) = \gamma(S)$ et par conséquent quel que soit $c > 0$ on peut choisir t de façon que pour $T = (1+c)S_t$ on ait $\gamma(T) < \gamma(S)$. Soit G un réseau de masse $m(G) = \delta(S) = (\gamma(S))^{-n}$. On a $m(G) < \delta(T) = (\gamma(T))^{-n}$. Il existe donc dans T un point $p \in G$ et $\neq 0$, et il en est de même pour $\mathcal{L}(T)$, $\mathcal{L}$ étant n'importe quel automorphisme de S. D'autre part, pour tout $c' > 0$ on peut trouver r entier positif, tel que pour tout $h = 1, 2, \ldots, n$ les points de $\mathcal{L}_h^r(T)$ satisfassent aux inégalités $|x_j| < c'$, $j \neq h$ (on suppose que les A_h sont pris pour axes de coordonnées). Donc ou bien A_h porte un point $\neq 0$ de G, ou bien il existe des points p de G avec $|pj_j(p)|$ arbitrairement petit $j \neq h$ et $|pj_h(p)|$ arbitrairement grand situés dans des transformés de T par des automorphismes de S. Finalement on obtient donc n points linéairement indépendants de G contenus dans $(1+c)S$. Par conséquent on a bien

$$\mu_h(S, G) \leq 1 = \gamma(S)(m(G))^{\frac{1}{n}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

On ramène l'étude d'un réseau quelconque à celle d'un réseau de masse $\delta(S)$ par une homothétie convenable, d'où le résultat annoncé.

Remarque. — Si l'indicatrice f de S est continue, S est équivalent à son intérieur; on peut donc alors dans l'énoncé supprimer la condition que S est un ouvert (on suppose toujours qu'il contient un voisinage de l'origine).

V. — Résultats faisant intervenir des coefficients de convexité.

Appelons *vectoriel* d'un ensemble $A \subset R^n$ et notons $\mathcal{V}(A)$ l'ensemble des $x \in R^n$ tels qu'il existe u et v dans A avec $u - v = x$. Si A est étoilé $\mathcal{V}(A)$ aussi, la réciproque n'étant pas toujours vraie.

Posons

$$\Delta(A) = \delta(\mathcal{V}(A)), \qquad \tau_1(A) = \text{mes int}(A)(\Delta(A))^{-1}$$

(*coefficient d'empilement* de A). On prendra conventionnellement $\tau_1 = 1$ si $\Delta(A) = 0$, $\text{mes int}(A) = 0$, et si $\Delta(A) = +\infty$, $\text{mes int}(A) = +\infty$. Appelons *réseau d'empilement* de A tout réseau G tel que les ensembles $A_g = A + g$ soient sans points communs deux à deux quand g parcourt G. On voit que $\Delta(A) = \inf m(G)$ pour tous les réseaux d'empilement de A.

Nous appellerons *lemme de Minkowski* ([23]) le résultat suivant : *Le coefficient d'empilement est toujours* ≤ 1.

([22]) D'après le « lemme d'approximation » du paragraphe VI.

([23]) Le résultat est implicite dans Minkowski quand il démontre son inégalité (1) ([3]). il est contenu dans un résultat plus général de Blichfeldt, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 15, 1914, p. 227-235.

Soit G un réseau d'empilement de A, B un ensemble fermé contenu dans A, P un domaine fondamental mesurable de R^n par rapport à G (par exemple un parallélotope fondamental) et posons $P_g = P + g$, $B_g = B + g$, $g \in G$. Les ensembles $C_g = B_g \cap P$ sont sans points communs deux à deux et si l'on pose $D_g = B \cap P_g$ on a $C_g = D_{-g} + g$. Les D_g forment une partition dénombrable de B en ensembles mesurables; on a donc

$$\text{mes}\, B = \sum \text{mes}\, D_g = \sum \text{mes}\, C_g \leq \text{mes}\, P = m(G).$$

Comme on peut prendre B tel que

$$\text{mes}\, B > (1 - \varepsilon)\, \text{mes int}(A) \qquad \text{et} \qquad m(G) < (1 + \varepsilon)\, \Delta(A),$$

pour tout $\varepsilon > 0$, on voit qu'en résulte la propriété annoncée.

Définissons un premier *coefficient de convexité* $\Omega(A)$ par $(\Omega(A))^n = \inf |\det(\mathcal{L})|$ pour toutes les transformations linéaires homogènes $\mathcal{L}$ telles que $\mathfrak{W}(A) \subset \mathcal{L}(A)$, en posant $\mathfrak{W}(A) = \frac{1}{2}\mathfrak{V}(A)$ ([24]).

Pour une jauge J, $\Omega(J) = 1$ car $\mathfrak{W}(J) = J$. Pour tout ensemble de mesure intérieure > 0 et $< +\infty$, on démontre aisément que $\Omega(A)$ est ≥ 1. Pour tout ensemble borné et contenant un voisinage de l'origine on a évidemment $1 \leq \Omega(A) < +\infty$.

Soit K un ensemble de mesure intérieure > 0 et $< +\infty$ tel que $\Omega(K) = 1$; on a nécessairement $\text{mesint}(K) = \text{mesint}(\mathfrak{W}(K))$. Si K est supposé ouvert, puisque deux ouverts emboîtés ayant même mesure coïncident, on voit que $K = \mathfrak{W}(K)$, ce qui montre que K est symétrique par rapport à O [car $\mathfrak{W}(A)$ est toujours symétrique] et convexe [si $u \in K$, $v \in K$ alors $-v \in K$ puisque K est symétrique, d'où $\frac{u+v}{2} \in K$ puisque $K = \mathfrak{W}(K)$]. Comme en outre K a une mesure > 0 et $< +\infty$, c'est une jauge. Nous avons démontré plus généralement que *tout ensemble* K *de mesure intérieure* > 0 *et* $< +\infty$ *avec* $\Omega(K) = 1$ *est une jauge*, mais la démonstration étant un peu longue nous l'omettrons.

La connaissance du coefficient de convexité d'un ensemble étoilé S permet de *majorer* $\gamma(S)$ *et par conséquent* $\rho(S)$ *en fonction de la mesure intérieure de* S. En effet pour un ensemble A arbitraire on a

$$|\det(\mathcal{L})|\, \hat{\delta}(A) = \hat{\delta}(\mathcal{L}(A)) \geq \hat{\delta}(\mathfrak{W}(A)) = 2^{-n}\hat{\delta}(\mathfrak{V}(A)) = 2^{-n}\Delta(A),$$

pour toutes les transformations $\mathcal{L}$ telles que $\mathfrak{W}(A) \subset \mathcal{L}(A)$. Il en résulte donc

$$(2\Omega(A))^n \hat{\delta}(A) \geq \Delta(A), \qquad i.e. \qquad \varepsilon(A) \leq 2\Omega(A)^n \eta(A).$$

([24]) *Cf.* Rado, *J. London Math. Soc.*, t. 21, 1946, p. 34-46. Généralisant une idée de Mordell et de Van der Corput, il considère des « $\mathfrak{T}$-ensembles » définis par la condition que $\mathfrak{W}(A) \subset \mathfrak{T}(A)$, $\mathfrak{T}$ étant une transformation linéaire.

Si S est un ensemble étoilé, on a donc

$$\gamma(S) \leq 2\Omega(S)(\eta(S))^{\frac{1}{n}}(\text{mes int}(S))^{-\frac{1}{n}} \tag{1}$$

et en appliquant le théorème de l'anomalie

$$\rho(S) \leq 2^{\frac{3n-1}{2}}(\Omega(S))^n \eta(S)(\text{mes int}(S))^{-1}. \tag{2}$$

En particulier s'il s'agit d'une jauge J

$$\rho(J) \leq 2^{\frac{3n-1}{2}} \eta(J)(\text{mes}(J))^{-1}, \tag{3}$$

(1) et (2) généralisent les inégalités (I) et (II) de Minkowski à un ensemble étoilé arbitraire [naturellement elles sont triviales si $\Omega(A) = +\infty$]. L'inégalité (3) où l'on remplace $\eta(A)$ par 1 est plus faible que l'inégalité (II) de Minkowski sur les jauges, mais plus forte que son inégalité affaiblie (II') et de démonstration plus facile.

Si l'on définit

$$\omega(A) = \inf \lambda \{\lambda > 0,\ \mathfrak{V}(A) \subset \lambda A\},$$

on a un *second coefficient de convexité* évidemment $\geq \Omega(A)$.

Dans le cas d'un ensemble *étoilé* S *symétrique* par rapport à O il coïncide avec le *coefficient de convexité de la forme* f [25] indicatrice de S, qu'on définira par

$$\omega(f) = \sup f(x+y)(f(x)+f(y))^{-1}, \qquad (x, y) \neq (0, 0).$$

D'après l'inégalité (3) ci-dessus pour tout $c > 0$ *on peut trouver dans chaque réseau* G *un système de n éléments linéairement indépendants* $p_1, \ldots, p_n$ *tels que* [S désignant $\mathfrak{E}_x(f(x) \leq 1)$]

$$\prod_h f(p_h) \leq (1+c)\, 2^{\frac{3n-1}{2}} (\omega(f))^n \eta(S)(\text{mes int}(S))^{-1} m(G), \tag{4}$$

nous supposerons les indices choisis de façon que $f(p_{h+1}) \geq f(p_h)$ $(h = 1, \ldots, n-1)$. Il existe donc une base $a_1, \ldots, a_n$ telle que pour $h = 1, \ldots, n$ on ait

$$a_h = t_{1h}p_1 + t_{2h}p_2 + \ldots + t_{hh}p_h \qquad \text{avec} \quad 0 < t_{ih} \leq 1 \quad (i = 1, \ldots, h).$$

Écrivons ω pour $\omega(f)$ et posons

$$\omega_h = \sup f(x_1 + \ldots + x_h)(f(x_1) + \ldots + f(x_h))^{-1},$$

on a $\omega_1 = \omega$ et l'on voit aisément [*cf.* [25]] que

$$\omega_h \leq (k\omega^r + (h-k)\omega^{r-1})h^{-1} \leq \omega^r,$$

---

[25] MAHLER, *Kon. Ned. Akad. Wet.*, t. 49, p. 298-309.

les entiers k et r étant définis en fonction de h par

$$2^{r-1} < h = 2^{r-1} + k \leq 2^r.$$

On a donc en particulier

$$\omega_h \leq \omega^{1+\log_2 h}.$$

Il en résulte pour les éléments de la base mise en évidence

$$f(a_h) \leq \omega_h (f(p_1) + \ldots + f(p_h)) \leq h\,\omega_h f(p_h),$$

$$\prod_h f(a_h) \leq n! \prod_h \omega_h \prod_h f(p_h).$$

Par conséquent *pour tout* $c > 0$ *on peut trouver dans chaque réseau* G *une base* $a_1, \ldots, a_n$ *telle que*

$$(5) \qquad \prod_h f(a_h) \leq (1+c)\, 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\, n!\, (\omega(f))^{2n+\log_2 n!}\, \eta_1(S)\, (\text{mes int}(S))^{-1}\, m(G).$$

Les inégalités établies dans ce paragraphe peuvent devenir triviales (le second membre étant infini ou indéterminé) dans certains cas. On est assuré qu'il n'en est pas ainsi quand les ensembles dont il est question sont bornés et contiennent un voisinage de l'origine puisque alors Ω, ω et mes int(S) sont > 0 et $< +\infty$, par exemple quand f est une forme continue et définie. Les quantités Ω et ω sont évidemment des invariants affines des ensembles, ou formes considérés.

Soit maintenant $f = |\varphi|^{\frac{1}{d}}$, où φ est une forme algébrique (polynome homogène) de degré d, à n variables, à coefficients réels, qui est supposée *définie* (toujours > 0 ou toujours < 0, en dehors de l'origine). Alors f est une forme régulière; son coefficient de convexité ω est donc > 0 et $< +\infty$. Nous désignerons par V la mesure (> 0 et $< +\infty$) de l'ensemble compact $\mathfrak{E}(|\varphi(x)| \leq 1)$. D'après ce qui précède il existe une transformation linéaire homogène $\mathfrak{T}$, à coefficients entiers et de déterminant 1 telle que pour $g = \mathfrak{T}(f)$

$$\prod_h g(e_h) \leq \mathrm{M}(n, d, \omega)\, \mathrm{V}^{-1}$$

où les e_h sont les vecteurs unitaires sur les axes.

Soit $a = \inf f(x)$ pour $x \in \mathrm{Z}^n$ $(x \neq 0)$; a est > 0 et par construction on a

$$a = g(e_1) = \inf g(x) \qquad \text{pour} \quad x \in \mathrm{Z}^n \quad (x \neq 0).$$

Donc

$$g(e_h) \leq a^{-n+1}\, \mathrm{M}(n, d, \omega)\, \mathrm{V}^{-1} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

et pour tout x tel que $|x_h| \leq 1$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$:

$$g(x) \leq \omega_n (g(e_1) + \ldots + g(e_n)) \leq a^{n+1}\, \mathrm{M}(n, d, \omega)\, \mathrm{V}^{-1}.$$

LEMME. — *Si un polynome ψ à n variables de degré d à coefficients réels, a sa valeur absolue majorée par une constante* K *sur le cube* $|x_h| \leq 1$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$, *ses coefficients sont bornés par une même constante ne dépendant que de* n, d *et* K.

En effet soient $p_1, \ldots, p_n$ les n premiers nombres premiers et $x^{(k)}$ le point de R^n de coordonnées $p_1^k, \ldots, p_n^k$ (k entier rationnel). Les monomes à n variables de degré $\leq d$ étant désignés par $X_1, \ldots, X_m$ $(m = m(n, d))$ à tout point x de R^n correspond dans R^m le point X dont les coordonnées sont les valeurs des monomes X_h quand les variables y ont pour valeurs les coordonnées de x. Aux points $x^{(k)}$ correspondent ainsi les points $X^{(k)}$ de R^m. On a

$$\psi(x) = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_m X_m.$$

Écrivons les égalités

$$\alpha_1 X_1^{(k)} + \ldots + \alpha_m X_m^{(k)} = \psi(x^k) \qquad (k = 0, -1, -2, \ldots, -m+1).$$

On peut les considérer comme un système de m équations linéaires à m inconnues $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (les coefficients de ψ). Le déterminant $\det(X_h^k) = D(n, d)$ des coefficients des inconnues est par construction un déterminant de Van der Monde, qui est $\neq 0$ car $X_h^{-1} \neq X_g^{-1}$ si $g \neq h$. D'où, par une majoration évidente, $|\alpha_h| \leq m! \, |D(n, d)|^{-1} K$.

Les résultats du début de ce paragraphe et le lemme montrent donc que φ *est arithmétiquement équivalente à une forme* ψ *dont les coefficients satisfont aux inégalités suivantes :* α_i^* désignant les coefficients des monomes à une seule variable dans ψ, avec $\alpha_1^* \leq \alpha_2^* \leq \alpha_3^* \leq \ldots$ et α_i les autres coefficients

$$\prod_i \alpha_i^* \leq A(n, d, \omega) V^{-d}, \tag{6}$$

$$\alpha_j (\alpha_1^*)^{n-1} \leq B(n, d, \omega) V^{-d}; \tag{7}$$

A et B étant des fonctions des *seules* quantités n, d et ω.

Si en outre les coefficients de φ sont supposés *entiers*, $|\varphi(x)| \geq 1$ pour $x \in Z^n$ $(x \neq 0)$ et l'on voit que φ est équivalente à une forme dont les coefficients sont bornés par une constante ne dépendant que de n, d, ω, V. En particulier *il n'y a qu'un nombre fini de formes algébriques définies à coefficients entiers inéquivalentes pour lesquelles* $n + d + \omega + V^{-1} <$ const., car A et B sont bornés si n, d et ω le sont.

C. Jordan ([25bis]) a démontré des résultats analogues, sans se restreindre aux formes définies, mais ses majorations sont moins simples.

([25bis]) C. JORDAN, *Journ. Éc. Polyt.*, t. 29, cahier 48, 1880, p. 111-150.

VI. — Applications.

Relation entre le « problème homogène » et le « problème non homogène » relatifs à une forme. — Soit f une forme symétrique. Nous supposerons le coefficient de convexité $\omega = \omega(f)$ fini et nous appellerons V la mesure intérieure de l'ensemble S associé, supposée > 0. Soit G un réseau; prenons encore n éléments linéairement indépendants $p_1, \ldots, p_n$ rendant $\prod f(p_h)$ voisin de sa borne inférieure.

Soit y un point quelconque de $\mathbf{R}^n$, $y = \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_n p_n$. Soit λ'_h l'entier le plus voisin de λ_h, de sorte que $|\lambda_h - \lambda'_h| \leq \frac{1}{2}$. Soit $x = \lambda'_1 p_1 + \ldots + \lambda'_n p_n$; c'est un élément de G et

$$f(x-y) \leq 2^{-1}\omega_n (f(p_1) + \ldots + f(p_n)) \leq 2^{-1} n \omega_n f(p_n).$$

Mais la majoration du produit des $f(p_h)$ donne

$$(f(p_1))^{n-1} f(p_n) \leq (1+\varepsilon)\, 2^{\frac{3n-1}{2}} \omega^n \mathrm{V}^{-1} m(\mathrm{G}).$$

Donc

$$f(x-y)\,(f(p_1))^{n-1} \leq (1+\varepsilon)\,\mathrm{L}(f, \mathrm{G})$$

où

$$\mathrm{L}(f, \mathrm{G}) = n\, 2^{\frac{3n-3}{2}} \omega^{n-1-\log_2 n} \mathrm{V}^{-1} m(\mathrm{G}).$$

En nous ramenant à $\mathrm{G} = \mathbf{Z}^n$ comme on peut toujours le faire nous avons le résultat suivant :

Théorème. — *Soit f une forme symétrique sur $\mathbf{R}^n$, ω son coefficient de convexité supposé fini et $\mathrm{V} = \operatorname{mes} \operatorname{int}\left(\mathcal{E}(f(x) \leq 1)\right)$ supposé > 0. Soit C n'importe quelle constante $> n\, 2^{\frac{3n-3}{2}} \omega^{n-1-\log_2 n} \mathrm{V}^{-1}$. S'il existe $y \in \mathbf{R}^n$ tel que l'équation $f(x-y) \leq k$ n'ait pas de solution en $x \in \mathbf{Z}^n$, alors l'équation $f(x) \leq (\mathrm{C}k^{-1})^{\frac{1}{n-1}}$ a une solution en $x \in \mathbf{Z}^n$ et $\neq 0$.*

Si l'équation $f(x) \leq m$ n'a pas de solution en $x \in \mathbf{Z}^n$ et $\neq 0$ alors pour tout $y \in \mathbf{R}^n$ l'équation $f(x-y) \leq \mathrm{C}m^{-n+1}$ a une solution en $x \in \mathbf{Z}^n$.

C'est une généralisation du théorème d'alternative de Kintchine ([26]) pour les formes linéaires et de Mahler ([26]) pour les normes. Dans le cas des normes, on peut en tenant compte de l'inégalité (II) de Minkowski, améliorer la constante figurant dans le théorème ci-dessus par le facteur $2^{-\frac{n-1}{2}}$. Cette constante est plus petite que celle qui figure dans l'énoncé de Mahler.

([26]) Références au paragraphe I ([8]) et ([9]).

Lemme de sélection et lemme d'approximation. — Nous avons utilisé dans les paragraphes III et V un résultat sur la limite du coefficient δ de certains ensembles, qui se déduit aisément du lemme de sélection de Mahler. Démontrons ces résultats *ab initio* grâce aux inégalités que nous avons établies au paragraphe précédent.

Étant donnés un réseau G et une *suite de réseaux* G_r dans R^n, nous dirons que la suite (G_r) *converge* vers le réseau G si l'on peut choisir une base $b_1, \ldots, b_n$ de G et des bases $b_{1r}, \ldots, b_{nr}$ des G_r de façon que $\lim_{r\to\infty} b_{hr} = b_h$ $(h = 1, \ldots, n)$. On a alors évidemment, $m(G) = \lim_{r\to\infty} m(G_r)$.

Du lemme de Bolzano-Weierstrass résulte alors facilement :

Si pour une suite (G_r) de réseaux, de bases $b_{1r}, \ldots, b_{nr}$, il existe $m > 0$ et $M < +\infty$ tels que $m(G_r) \geq m$, $|b_{hr}| \leq M$ pour tout r et h, on peut extraire de (G_r) une suite convergente.

On en déduit le :

Lemme de sélection de Mahler ([27]). — *Si (G_r) est une suite de réseaux permis par rapport à un même voisinage U de l'origine et de masses $m(G_r)$ uniformément bornées, on peut en extraire une suite convergente.*

En effet pour un $t > 0$ convenable $\mathfrak{S}(|x| < t)$ est contenu dans U. D'après les résultats du paragraphe précédent il existe pour chaque G_r une base $b_{1r}, \ldots, b_{nr}$ telle que

$$\prod_h |b_{hr}| \leq c\, m(G_r),$$

c étant une constante finie.

Par construction $|b_{hr}| \geq t$ pour tout r et tout h; donc puisque $m(G_r) \leq M < +\infty$, les $|b_{hr}|$ sont uniformément bornés et le lemme résulte de l'énoncé précédent.

Lemme d'approximation ([28]). — *Soient A_r $(r = 1, 2, \ldots)$ des ensembles ouverts emboîtés ($r' > r$ entraîne $A_{r'} \supset A_r$) dont la réunion A contient l'origine. Alors $\lim_{r\to\infty} \delta(A_r) = \delta(A)$.*

Pour toute paire d'ensembles B, C, avec $B \subset C$ on a $\delta(B) \leq \delta(C)$ donc $\delta(A_r)$ est une suite croissante qui a nécessairement une limite λ, finie ou infinie. Supposons $\delta(A) > 0$ (sinon le résultat annoncé est trivial) et $\lambda < \delta(A)$

([27]) Mahler, *Proc. Roy. Soc. London*, série A, t. 187, 1946, p. 151-187.

([28]) On trouve un énoncé analogue relatif aux ensembles étoilés d'indicatrice continue dans Mahler, *J. London Math. Soc.*, t. 18, 1943, p. 233-238.

(donc $\lambda < +\infty$) et soit θ un nombre $> \lambda$ et $< \delta(A)$. Pour chaque r il existe un réseau G_r permis pour A_r et de masse θ. Comme A contient l'origine, pour $r > r_0$ convenable, les A_r contiennent O, donc contiennent un même voisinage de l'origine. Les G_r, pour $r > r_0$ satisfont donc aux conditions du lemme précédent, et l'on peut en extraire une suite qui converge vers un réseau G, de masse θ. G est permis pour A. En effet si $p \in G$, on peut choisir dans chaque G_r un élément p_r de façon que $\lim p_r = p$; si p appartenait aussi à A il serait contenu dans A_r pour $r > r_1$, donc p_r serait aussi dans A_r pour r assez grand et serait donc identique à O. Or G permis pour A est en condradiction avec l'hypothèse $m(G) = \theta < \delta(A)$. Le lemme est donc démontré.

Remarques. — Si l'ouvert A n'était pas supposé contenir O la conclusion tomberait; exemple : dans R^2,

$$A = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(x_1 x_2 < 1,\ x_2 > 1), \qquad A_r = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in A,\ x_2 < r).$$

On montre aisément que $\delta(A_r) = 0$ pour tout r, et que $\delta(A) = \delta(\mathop{\mathcal{E}}_{x}(x_1 x_2 < 1)) > 0$ en utilisant le fait que $\mathop{\mathcal{E}}_{x}(x_1 x_2 < 1)$ est un ensemble automorphe au sens du paragraphe IV.

Si les ensembles emboîtés A_r, dont la réunion est A, n'étaient pas supposés ouverts, la conclusion tomberait (même si l'on supposait que les A_r contiennent un même voisinage de l'origine). Exemple : soient dans R, $A = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(|x| < 2)$;

$$A_r = \mathop{\mathcal{E}}_{x}\left(|x| \leq 1 \quad \text{ou} \quad 1 + \frac{1}{r} < |x| < 2\right)$$

On a

$$\delta(A) = 2, \qquad \delta(A_r) = 1 \quad \text{pour tout } r.$$

VII. — Quelques autres majorations.

Majoration relative aux k premiers minima. — Soit toujours S un ensemble étoilé dans R^n, G un réseau de masse $m(G)$ et soit k un entier $1 \leq k \leq n$. Supposons les $\mu_h(S, G) > 0$ et $< +\infty$. Soit c une constante > 0 et < 1; définissons la suite λ_h ($h = 1, 2, \ldots, n$) par $\lambda_k = (1 - c)\mu_k(S, G)$, $\lambda_h = \lambda_k$ pour $h > k$ et $\lambda_h = 2^{-r_h}\lambda_k$ pour $h < k$, r_h étant le plus petit entier $> \log_2(\lambda_k(\mu_h(S, G))^{-1})$. Les λ_h forment une suite de nombres > 0 tels que $\lambda_{h-1}\lambda_h^{-1}$ soit entier pour $h = 1, 2, \ldots, n-1$, et que $\lambda_h < \mu_h$ pour $h = 1, 2, \ldots, n$. En appliquant le lemme du paragraphe II comme dans le théorème du même paragraphe on a

$$\prod_{h=1}^{n} \lambda_h < (\gamma(S))^n m(G).$$

Par construction $\mu_h < 2\lambda_h$ $(h = 1, 2, \ldots, k-1)$, d'où

$$(\mu_k(S, G))^{n-k+1} \prod_{h=1}^{k-1} \mu_h(S, G) \leq 2^{k-1} \prod_{h=1}^{n} \lambda_h (1-c)^{n+k-1}.$$

On a donc en faisant tendre c vers zéro l'inégalité

$$(\mu_k(S, G))^{n-k+1} \prod_{h=1}^{k-1} \mu_h(S, G) \leq 2^{k-1} (\gamma(S))^n m(G).$$

Cette inégalité pourra être utile pour majorer l'invariant $\gamma(T)$ d'un ensemble étoilé T grâce à un ensemble étoilé auxiliaire $S \subset T$; on a trivialement $\gamma(T) \leq \gamma(S)$. Supposons mis en évidence un réseau G *critique* pour T, c'est-à-dire un réseau limite de réseaux permis pour T et de masse minima $m(G) = \delta(T) = (\gamma(T))^n$.

Si S a pour anomalie 1 on a

$$\gamma(T) = (m(G))^{-\frac{1}{n}} \leq \gamma(S) \left(\prod_{h=1}^{n} \mu_h(S, G) \right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Quand on ne sait pas majorer non trivialement l'anomalie de S on peut écrire seulement

$$\gamma(T) \leq 2^{\frac{n-1}{2n}} \gamma(S) \prod_{h=1}^{n} (\mu_h(S, G))^{-\frac{1}{n}}.$$

Mais il peut arriver que l'on ait des renseignements sur les k premiers μ_h, k étant un entier $< n$ et qu'il soit plus profitable d'utiliser la majoration de $\gamma(T)$ qui résulte de l'inégalité démontrée dans ce paragraphe

$$\gamma(T) \leq 2^{\frac{k-1}{n}} \gamma(S) (\mu_k(S, G))^{-\frac{n-k+1}{n}} \left(\prod_{h=1}^{k-1} \mu_h(S, G) \right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Supposons qu'on étudie une famille d'ensembles T_n définis pour chaque valeur de la dimension n, à l'aide des ensembles auxiliaires S_n et qu'on ait mis en évidence des réseaux G_n critiques pour le T_n correspondant, de façon que $\dim(G_n \cap \lambda S_n) \leq k(n)$, λ étant une constante > 1 et indépendante de n et $k(n)$ un entier tel que $\lim_{n \to \infty} n^{-1} k(n) = 0$; on aura alors

$$\gamma(T_n) \leq (1 + c(n)) \gamma(S_n) \lambda^{-n} \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to \infty} c(n) = 0,$$

majoration meilleure que la majoration triviale $\gamma(T_n) \leq \gamma(S_n)$ et presque aussi bonne que celle qu'on aurait si l'on avait pu affirmer que les S_n ont une anomalie égale à 1.

Nous avons utilisé ailleurs ([29]) ce principe pour majorer $\gamma(P_n)$ où

$$P_n = \mathop{\mathcal{E}}_{x}\left(\prod |x_i| < 1\right).$$

avec comme ensemble auxiliaire $S_n = \mathop{\mathcal{E}}_{x}\left(\sum |x_i| < n\right)$.

Généralisation à des ensembles non étoilés. — Soit maintenant A un ensemble *quelconque* dans R^n, G un réseau; la variété linéaire homogène engendrée par $G \cap \lambda A$ n'est plus fonction croissante de λ, non plus que sa dimension (quoi qu'il en soit encore ainsi quand on considère une suite λ_j de valeurs de λ telle que $\lambda_{j+1}\lambda_j^{-1}$ soit toujours un entier; c'est ce que nous avons fait pour démontrer le lemme du début du paragraphe II). On est donc amené à définir *deux* suites de nombres associés à A et G (qui sont confondues avec la suite des μ_h définie au paragraphe II quand A est étoilé) :

$$\overset{(+)}{\mu}_h = \sup \lambda \{\lambda \geq 0, (\dim(G \cap \lambda A) \leq h-1)\} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\overset{(-)}{\mu}_h = \inf \lambda \{\lambda \geq 0, (\dim(G \cap \lambda A) \geq h)\} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

On a évidemment

$$\overset{(-)}{\mu}_h \leq \overset{(-)}{\mu}_{h+1}, \qquad \overset{(+)}{\mu}_h \leq \overset{(+)}{\mu}_{h+1} \quad \text{et} \quad \overset{(-)}{\mu}_h \leq \overset{(+)}{\mu}_h$$

et

$$\sup_{G \in \Gamma} \overset{(+)}{\mu}_1(A, G)(m(G))^{-\frac{1}{n}} = (\delta(A))^{-\frac{1}{n}}.$$

Si les λ_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$ sont des nombres tels que $0 < \lambda_h < \overset{(-)}{\mu}_h$ et que $\lambda_{h+1}\lambda_h^{-1}$ soit entier $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$, la condition $\lambda_h < \overset{(-)}{\mu}_h$ entraîne que $\dim(G \cap \lambda_h A) \leq h-1$ et le lemme du début du paragraphe II montre alors que $\delta(A)\prod_{h=1}^{n} \lambda_h \leq 1$. Donc d'après l'étude de $\psi(n)$ on a

$$\delta(A)\prod_{h=1}^{n} \overset{(-)}{\mu}_h(A, G) \leq 2^{\frac{n-1}{2}} m(G).$$

On peut obtenir une inégalité analogue, où l'un des $\overset{(-)}{\mu}$ est remplacé par le $\overset{(+)}{\mu}$ de même indice. D'après la définition de $\overset{(+)}{\mu}_k$ pour tout $c > 0$ il existe λ_k tel

([29]) CHABAUTY. *C. R. Ac. Sc.*, t. 228, 1949, p. 1361.

que $\overset{(+)}{\mu}_k(1-c) \leqq \lambda_k \leqq \overset{(+)}{\mu}_k$ et que $\dim(G \cap \lambda_k A) \leqq k-1$. Définissons $\lambda_h = 2^{r(h)}\lambda_k$ avec

$$r(h) = \text{le plus grand entier} < \log_2(\max(\overset{(+)}{\mu}_k, \overset{(-)}{\mu}_h)(\overset{(+)}{\mu}_k)^{-1}) \qquad (h \geqq k),$$

$$-r(h) = \text{le plus petit entier} > \log_2(\overset{(+)}{\mu}_k(\overset{(-)}{\mu}_h)^{-1}) \qquad (h < k).$$

Alors par construction $\lambda_{h+1}\lambda_h^{-1}$ est entier pour $h = 1, 2, \ldots, n-1$ $\dim(G \cap \lambda_h A) \leqq h-1$ pour $h = 1, 2, \ldots, n$ et $\overset{(+)}{\mu}_k(\lambda_k)^{-1} < 1-c$, $\overset{(-)}{\mu}_h(\lambda_h)^{-1} < 2(1-c)^{-1}$, $h \neq k$ donc

$$\overset{(+)}{\mu}_k \prod_{h \neq k} \overset{(-)}{\mu}_h \leqq (1-c)^{-n} 2^{n-1} \prod_{h=1}^{n} \lambda_h$$

et par conséquent en vertu du lemme du paragraphe 2

$$\delta(A)\overset{(+)}{\mu}_k(A, G) \prod_{h \neq k} \overset{(-)}{\mu}_h(A, G) \leqq 2^{n-1} m(G).$$

Si nous écrivons ces inégalités pour les différentes valeurs de k et prenons la racine $n^{\text{ième}}$ du produit, il vient

$$\delta(A)\left(\prod_{h=1}^{n} \overset{(-)}{\mu}_h(A, G)\right)^{1-\frac{1}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} \overset{(+)}{\mu}_k(A, G)\right)^{\frac{1}{n}} \leqq 2^{n-1} m(G).$$

En introduisant le coefficient de convexité $\Omega(A)$ on a donc finalement les inégalités

$$\prod_{h=1}^{n} \overset{(-)}{\mu}_h(A, G) \leqq 2^{\frac{3n-1}{2}} (\Omega(A))^n \eta(A) (\text{mes int}(A))^{-1} m(G),$$

$$\overset{(+)}{\mu}_k(A, G) \prod_{h \neq k} \overset{(-)}{\mu}_h(A, G) \leqq 2^{2n-1} (\Omega(A))^n \eta(A) (\text{mes int}(A))^{-1} m(G),$$

$$\left(\prod_{h=1}^{n} \overset{(-)}{\mu}_h(A, G)\right)^{1-\frac{1}{n}} \left(\prod_{h=1}^{n} \overset{(+)}{\mu}_h(A, G)\right)^{\frac{1}{n}} \leqq 2^{2n-1} (\Omega(A))^n \eta(A) (\text{mes int}(A))^{-1} m(G).$$

Posons

$$\overset{(\pm)}{\gamma} = \sup \overset{(\pm)}{\mu}_1 (m(G))^{-\frac{1}{n}}, \qquad \overset{(\pm)}{\rho} = \sup \prod \overset{(\pm)}{\mu}_h (m(G))^{-1} \qquad \text{et} \qquad \overset{(\pm)}{\alpha} = \overset{(\pm)}{\rho}(\gamma)^{-n}.$$

L'étude faite pour les ensembles étoilés suggère d'étudier les valeurs prises

par $\overset{(-)}{\alpha}(A)$ et $\overset{(+)}{\alpha}(A)$, $A \subset R''$. En choisissant pour f une forme linéaire par morceaux convenable on peut aisément s'arranger pour que $\overset{(-)}{\alpha}(A) = +\infty$, si $A = \mathcal{E}(f(x) = 1)$. Pour $\overset{(+)}{\alpha}$ nous n'avons pas réussi à former un exemple analogue. Mais ces considérations semblent moins intéressantes que celles se rapportant directement aux ensembles étoilés et à la théorie des formes.

SUR

DES FORMULES D'INVERSION POUR LES TRANSFORMÉES DE STIELTJÈS

ET

CERTAINS THÉORÈMES TAUBÉRIENS

PAR M. ALBERT EDREI.

INTRODUCTION. — Soit $\psi(t)$ une fonction réelle, non décroissante (1), de la variable réelle t, définie pour $t \geq 0$.

Le plan de la variable complexe z, *privé de l'axe réel non positif*, est un domaine qui joue un rôle important dans la théorie de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(t)}{t+z} = f(z). \tag{1}$$

Dans tout ce Mémoire, ce domaine sera désigné par $\mathcal{S}$. On sait que, si l'intégrale (1) converge pour une valeur particulière $z = z_0$ de $\mathcal{S}$, elle converge pour tout point de $\mathcal{S}$. Cette intégrale est une branche, holomorphe dans $\mathcal{S}$, d'une fonction analytique $f(z)$, que l'on appelle transformée de Stieltjès de $\psi(t)$.

Dans le plan des z, considérons le cercle $z = re^{i\theta}[-\pi \leq \theta \leq \pi]$ et les deux arcs de ce cercle définis par $[-(\pi - \lambda) \leq \theta \leq (\pi - \mu)]$ et par $[(\pi - \mu) \leq \theta \leq (\pi + \lambda)]\left(0 < \lambda < \frac{\pi}{2};\ 0 < \mu < \frac{\pi}{2}\right)$. Décrits dans le sens positif, ce cercle et ces arcs constitueront trois contours d'intégration que nous désignerons respectivement par $C(r)$, $\Gamma(r; \lambda, \mu)$, $\Gamma'(r; \lambda, \mu)$.

(1) Écartons, comme peu intéressant, le cas où $\psi(t)$ se réduit à une constante.

Nous nous proposons de prouver que si toutes les discontinuités de $\psi(t)$ sont régulières (2) et si p désigne un entier, on a

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+0}^{\pi-0} \mathcal{R}[f(re^{i\theta})\, e^{i(p+1)\theta}]\, d\theta = \frac{(-1)^p}{r^{p+1}}\int_0^r t^p\, d\psi(t) \qquad (p \geq 0),$$

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+0}^{\pi-0} \mathcal{R}[f(re^{i\theta})\, e^{i(p+1)\theta}]\, d\theta = \frac{(-1)^{p+1}}{r^{p+1}}\int_r^\infty t^p\, d\psi(t) \qquad (p < 0).$$

Bien que fort élémentaires, ces formules ne nous paraissent pas avoir été remarquées. L'analogie avec la formule de Jensen est apparente. En effet, dans le cas $p = -1$, (3) devient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+0}^{\pi-0} \mathcal{R}[f(re^{i\theta})]\, d\theta = \int_r^\infty \frac{d\psi(t)}{t},$$

et, dans certaines conditions faciles à préciser, le second membre peut se mettre sous la forme

$$f(0) - \int_0^r \frac{d\psi(t)}{t}.$$

Les calculs qui conduisent à (2) et (3) se prêtent aisément à l'évaluation asymptotique (pour $r \to +\infty$) des seconds membres de ces formules. Au paragraphe 3, nous prouverons le

Théorème 1. — *Soit $f(z)$ la transformée de Stieltjès d'une fonction non décroissante $\psi(t)$, telle que $\int_0^\infty \frac{d\psi(t)}{t+z}$ converge pour quelque valeur $z = z_0$ de $\mathcal{S}$. En outre, $\psi(t)$ est soumise à la restriction suivante :*

(A) *A tout $\varepsilon(>0)$, on peut faire correspondre un nombre positif $\nu = \nu(\varepsilon)$ tel que*

$$\frac{\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)} \frac{d\psi(t)}{r+t}}{\int_0^\infty \frac{d\psi(t)}{r+t}} < \varepsilon \qquad (r > 0),$$

dès que $r > r_0(\nu)$.

Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné de $\mathcal{S}$, situé à distance non nulle de l'axe réel négatif.

Soit enfin $g(z)$ une branche de fonction analytique, holomorphe dans $\mathcal{S}$, et telle que

---

(2) On sait que les discontinuités de $\psi(t)$ sont toutes de première espèce, c'est-à-dire que $\psi(t+0)$ et $\psi(t-0)$ existent. Il apparaîtra bientôt que l'on ne restreint pas la généralité de nos résultats si l'on suppose que toutes les discontinuités de $\psi(t)$ ont été rendues régulières, c'est-à-dire que l'on a posé

$$\psi(t) = \frac{\psi(t-0) + \psi(t+0)}{2} \qquad (t > 0).$$

(a) pour tout Ω, *il existe une borne* $M(\Omega)$ *telle que pour* $z \in \Omega$ *et* $r > r_1(\Omega)$,

$$\left|\frac{g(zr)}{g(r)}\right| < M(\Omega) \qquad [g(r) > 0],$$

(b)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{g(r)} = 1.$$

Dans ces conditions, à tout $\varepsilon_1 (>0)$, *on peut faire correspondre un* $\eta_0(\varepsilon_1)$ *tel que, pour* $\eta_1 (>0)$ *fixe, inférieur à* $\eta_0(\varepsilon_1)$, *on ait*

$$\left|\frac{1}{2\pi g(r)} \int_{-\pi+\eta_1}^{\pi-\eta_1} \mathcal{R}\left[g(re^{i\theta})\, e^{i(p-1)\theta}\right] d\theta - \frac{(-1)^p}{r^{p+1} g(r)} \int_0^r t^p\, d\psi(t)\right| < \varepsilon_1 \qquad (p \geq 0),$$

$$\left|\frac{1}{2\pi g(r)} \int_{-\pi+\eta_1}^{\pi-\eta_1} \mathcal{R}\left[g(re^{i\theta})\, e^{i(p-1)\theta}\right] d\theta - \frac{(-1)^{p+1}}{r^{p+1} g(r)} \int_r^\infty t^p\, d\psi(t)\right| < \varepsilon_1 \qquad (p < 0),$$

dès que $r > r_2(\eta_1)$.

Il s'agit, on le voit, d'un résultat de la nature de ceux que Hardy et Littlewood ont nommés *taubériens*. Ces deux auteurs ont prouvé [3] une proposition que nous traduisons dans notre notation.

Théorème de Hardy et Littlewood. — *Si la fonction positive* $\Phi(t)$ *est intégrable sur tout intervalle fini* $(0, T)$ *et si*

1°

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{(t+x)^\rho}\, dt \qquad (\rho > 0)$$

converge pour quelque valeur positive de x;

2° *pour* $x \to \infty$,

$$f(x) \sim \frac{H}{x^\sigma} \qquad (H > 0;\ 0 < \sigma < \rho),$$

on aura

$$\int_0^x \Phi(t)\, dt \sim \frac{H\Gamma(\rho)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\rho - \sigma + 1)} x^{\rho-\sigma}.$$

Si dans ce théorème on prend $\rho = 1$, on obtient une proposition qui se trouve généralisée, dans une certaine mesure, par notre théorème I. En effet, nous ne sommes pas liés à un mode particulier de croissance et, de plus, nous ne supposons point que $d\psi(t)$ est de la forme particulière $\Phi(t)\,dt$. Par contre, notre énoncé a le défaut d'exiger la condition de régularité (A). Il n'est donc pas inutile de remarquer :

1° que cette condition est essentielle à la vérité du théorème. Nous verrons, au paragraphe 6, par un exemple très simple où elle n'est pas réalisée, que le théorème est en défaut;

---

[3] G. H. Hardy et J. E. Littlewood, *On Tauberian theorems* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), 30, 1930, p. 23-37].

2° que la condition (A) est automatiquement satisfaite dans certains cas. Par exemple, si $d\psi(t)$ est de la forme $\Phi(t)\,dt$ où

(α) *$\Phi(t)$ est une fonction positive, intégrable, pour laquelle il existe un nombre réel τ et une borne t_0 tels que $t^{\tau}\Phi(t)$ est monotone dès que $t > t_0$.*

Hardy et Littlewood ont montré que, dans le cas $\rho = 1$, leur théorème est équivalent à un théorème de Valiron (¹). Il apparaît donc naturel de chercher, dans le cadre de ce travail, un énoncé analogue. Cette tentative nous conduit à limiter la classe de fonctions de comparaison $g(z)$, par un groupe (B), de conditions destinées à assurer à $g(z)$ un comportement assez semblable à celui d'une puissance de z.

Posons

$$h_p(r;\eta_1) = \frac{1}{2\pi g(r)} \int_{-\pi+\eta_1}^{\pi-\eta_1} \mathcal{R}\left[\frac{g(re^{i\theta})}{e^{i(p+1)\theta}}\right] d\theta \qquad (\eta_1 > 0),$$

et énonçons les

CONDITIONS (B).

1° $$h_p(r) = \lim_{\eta_1 \to +0} h_p(r;\eta_1)$$

existe, pour des valeurs suffisamment grandes de r.

2° *A tout $\varepsilon_2 (> 0)$, on peut faire correspondre un $\eta_1(\varepsilon_2)$, tel que pour $\eta_1 < \eta_1(\varepsilon_2)$ on ait*

$$|h_p(r) - h_p(r;\eta_1)| < \varepsilon_2,$$

dès que $r > r_3(\eta_1)$.

3° $$\lim_{r\to\infty} h_p(r) = H_p.$$

4° $$-G = \lim_{r\to\infty} \frac{rg'(r)}{g(r)}.$$

5° $$r^2 g''(r) = O[g(r)].$$

Il n'est pas inutile d'observer que ces conditions sont satisfaites, non seulement pour $g(z) = z^3$, mais aussi pour des fonctions plus générales, par exemple pour $g(z) = z^3(\log z)^{\gamma}$.

Une combinaison très simple des conditions (B) et du théorème 1, nous donnera le

---

(¹) G. VALIRON, *Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul, et en particulier les fonctions à correspondance régulière* [*Annales de Toulouse*, (3), 5, 1914, p. 117-257].

Le résultat de M. Valiron fut redécouvert par E. C. TITCHMARSH, *On integral functions with real negative zeros* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), 26, 1927, p. 185-200].

Une démonstration élémentaire se trouve dans M. HEINS, *Entire functions with bounded minimum modulus; subharmonic function analogues* [*Annals of Math.*, 49, 1948, p. 200-213].

THÉORÈME 2. — *Si* $\Phi(t)$ *satisfait à la condition* (α) *et* $g(z)$ *aux conditions du théorème* 1 *et aux conditions* (B), *on a*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\Phi(r)}{g(r)}=(-1)^p(p+1-G)H_p.$$

M. Valiron a montré comment une proposition de ce genre, appliquée au logarithme d'un produit canonique, fournit d'intéressantes indications sur la densité de ses zéros supposés tous au voisinage de l'axe réel négatif.

1. Posons

$$R_K(z)=\int_K^\infty\frac{d\psi(t)}{t+z}\qquad \text{où}\quad K>2|z|.$$

En vertu des hypothèse, $\int_0^\infty\frac{d\psi(t)}{t+1}$ converge, d'où l'on conclut que $\int_1^\infty\frac{d\psi(t)}{t}$ converge aussi; on a donc

$$|R_K(z)|\leq\int_K^\infty\frac{d\psi(t)}{t}\frac{1}{\left|1+\frac{z}{t}\right|}\leq 2\int_K^\infty\frac{d\psi(t)}{t}.$$

Si p désigne un entier quelconque, et en écrivant Γ et Γ' au lieu de $\Gamma(r;\lambda,\mu)$ et $\Gamma'(r;\lambda,\mu)$,

$$\int_\Gamma f(z)z^p\,dz=\int_\Gamma z^p\left[\int_0^K\frac{d\psi(t)}{t+z}\right]dz+\int_\Gamma R_K(z)z^p\,dz.$$

En intervertissant l'ordre des intégrations, dans le premier terme du second membre,

$$\int_\Gamma f(z)z^p\,dz=\int_0^K d\psi(t)\int_\Gamma\frac{z^p}{t+z}dz+\int_\Gamma R_K(z)z^p\,dz. \tag{4}$$

Le module de la dernière intégrale écrite n'excède pas $4\pi r^{p+1}\int_K^\infty\frac{d\psi(t)}{t}$; on voit donc que, pour $K\to\infty$, (4) devient

$$\int_\Gamma f(z)z^p\,dz=\int_0^\infty d\psi(t)\int_\Gamma\frac{z^p}{z+t}dz. \tag{5}$$

Par des calculs élémentaires, nous évaluerons $\int_\Gamma\frac{z^p}{z+t}dz$ et le passage aux limites $\lambda\to 0$ et $\mu\to 0$ livrera les formules (2) et (3).

Considérons un nombre $\nu(0<\nu<1)$ et mettons (5) sous la forme

$$\int_\Gamma f(z)z^p\,dz=\left\{\int_0^{r(1-\nu)}+\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)}+\int_{r(1+\nu)}^{2r}+\int_{2r}^\infty\right\}\left[d\psi(t)\int_\Gamma\frac{z^p}{z+t}dz\right]. \tag{6}$$

Si λ et μ tendent vers zéro, indépendamment l'un de l'autre, seule la partie

imaginaire de $\int_\Gamma \frac{z^p}{z+t}dz$ a un comportement simple. Cette remarque conduit à ne considérer que la partie imaginaire de chaque membre de (6). Il y a lieu de distinguer entre $p \geqq 0$ et $p < 0$.

I. *Cas* $p \geqq 0$.

(*a*) Pour $t \leqq r(1-\nu)$,

$$\left|\int_\Gamma \frac{z^p}{z+t}dz - 2\pi i(-t)^p\right| = \left|-\int_{\Gamma'} \frac{z^p}{z+t}dz\right| \leqq \frac{\lambda+\mu}{\nu} r^p.$$

(*b*) Pour $r(1-\nu) \leqq t \leqq r(1+\nu)$,

$$\mathrm{J}\int_\Gamma \frac{z^p}{z+t}dz = \mathrm{J}\left\{\frac{z^p}{p} - \frac{z^{p-1}}{p-1}t + \frac{z^{p-2}}{p-2}t^2 + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{z}{1}t^{p-1}\right\}_\Gamma + (-t)^p\{\arg(z+t)\}_\Gamma;$$

l'expression $\mathrm{J}\int \frac{z^p}{z+t}dz$ est donc une fonction continue de t dont la valeur n'excède pas

$$2\left[\frac{r^p}{p} + \frac{r^{p-1}}{p-1}t + \ldots + \frac{r}{1}t^{p-1}\right] + 2\pi t^p,$$

et cette expression est majorée par Cr^p, où C est une constante convenable.

(*c*) Pour $r(1+\nu) \leqq t$,

$$\left|\int_\Gamma \frac{z^p}{z+t}dz\right| = \left|-\int_{\Gamma'} \frac{z^p}{z+t}dz\right| \leqq \frac{\lambda+\mu}{\nu} r^p.$$

(*d*) Pour $t \geqq 2r$,

$$\left|\int_\Gamma \frac{z^p}{z+t}dz\right| = \left|-\int_{\Gamma'} \frac{z^p}{z+t}dz\right| \leqq \frac{r^{p+1}}{t-r}(\lambda+\mu) \leqq \frac{2r^{p+1}}{t}(\lambda+\mu). \tag{7}$$

En utilisant, dans (6), toutes ces estimations, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{J}\int_\Gamma f(z)z^p\,dz - 2\pi(-1)^p\int_0^{r(1-\nu)} t^p\,d\psi(t)\right| &\leqq \frac{\lambda+\mu}{\nu}r^p\int_0^{r(1-\nu)} d\psi(t) + Cr^p\int_{c(1-\nu)}^{r(1+\nu)} d\psi(t) \\ &\quad + \frac{\lambda+\mu}{\nu}r^p\int_{r(1+\nu)}^{2r} d\psi(t) + 2(\lambda+\mu)r^{p+1}\int_{2r}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{t}.\end{aligned} \tag{8}$$

En groupant certains termes et en tenant compte de certaines inégalités évidentes

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{J}\int_\Gamma f(z)z^p\,dz - 2\pi(-1)^p\int_0^{r} t^p\,d\psi(t)\right| &\leqq \frac{\lambda+\mu}{\nu}r^p\int_0^{2r} d\psi(t) \\ &\quad + (C+2\pi)r^p\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)} d\psi(t) + 2(\lambda+\mu)r^{p+1}\int_{2r}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{t}.\end{aligned} \tag{9}$$

Supposons d'abord $\psi(t)$ continue au point $t=r$. Posons $\nu=\max(\sqrt{\lambda},\sqrt{\mu})$ et faisons $\lambda\to 0$, $\mu\to 0$; il vient

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \mu\to 0}} \mathrm{J}\left[\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(z)z^p\,dz\right]=(-1)^p\int_0^r t^p\,d\psi(t), \tag{10}$$

ce qui est équivalent à (2).

Au paragraphe suivant, nous lèverons la restriction relative à la continuité de $\psi(t)$ au point $t=r$.

II. *Cas* $p<0$.

(*a*) Pour $t\leq r(1-\nu)$,

$$\left|\int_\Gamma \frac{z^p}{z+t}\,dz\right|=\left|-\int_{\Gamma'}\frac{z^p}{z+t}\,dz\right|\leq\frac{\lambda+\mu}{\nu}r^p.$$

(*b*) Pour $r(1-\nu)\leq t\leq r(1+\nu)$,

$$\mathrm{J}\int_\Gamma\frac{z^p}{z+t}\,dz=\mathrm{J}\left[\frac{1}{p+1}\frac{z^{p+1}}{t}-\frac{1}{p+2}\frac{z^{p+2}}{t^2}+\ldots+(-1)^{p+1}\frac{z^{-1}}{t^{-p-1}}\right]_\Gamma$$
$$+(-1)^{p+1}t^p\{\arg z\}_\Gamma+(-1)^p t^p\{\arg(z+t)\}_\Gamma.$$

Le module de cette expression est majoré par une quantité de la forme Cr^p, où C est une constante convenable.

(*c*) Pour $t\geq r(1+\nu)$,

$$\left|\int_\Gamma\frac{z^p}{z+t}\,dz-2\pi i(-1)^{p+1}t^p\right|=\left|-\int_{\Gamma'}\frac{z^p}{z+t}\,dz\right|\leq\frac{\lambda+\mu}{\nu}r^p.$$

(*d*) Pour $t\geq 2r$,

$$\left|\int_\Gamma\frac{z^p}{z+t}\,dz-2\pi i(-1)^{p+1}t^p\right|=\left|-\int_{\Gamma'}\frac{z^p}{z+t}\,dz\right|\leq\frac{r^{p+1}}{t-r}(\lambda+\mu)\leq\frac{2r^{p+1}}{t}(\lambda+\mu).$$

L'inégalité (8) est à remplacer par

$$\left|\mathrm{J}\int_\Gamma f(z)z^p\,dz-2\pi(-1)^{p+1}\int_{r(1+\nu)}^{\infty}t^p\,d\psi(t)\right| \tag{13}$$
$$\leq\frac{\lambda+\mu}{\nu}r^p\int_0^{r(1-\nu)}d\psi(t)+Cr^p\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)}d\psi(t)$$
$$+\frac{\lambda+\mu}{\nu}r^p\int_{r(1+\nu)}^{2r}d\psi(t)+2(\lambda+\mu)r^{p+1}\int_{2r}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{t},$$

où il y a lieu d'observer que $\int_{r(1+\nu)}^{\infty}t^p\,d\psi(t)$ converge.

51.

Au lieu de (9), nous obtiendrons

$$(13)\qquad \left|\mathrm{J}\int_{\Gamma} f(z)\,z^p\,dz - 2\pi(-1)^{p+1}\int_r^{\infty} t^p\,d\psi(t)\right| \leq \frac{\lambda+\mu}{\nu}\,r^p\int_0^{2r} d\psi(t) + (\mathrm{C}+2\pi)\,r^p\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)} d\psi(t) + 2(\lambda+\mu)r^{p+1}\int_{2r}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{t}.$$

La démonstration s'achève comme pour le cas $p \geqq 0$.

2. *Modifications dans le cas où $\psi(t)$ est discontinue.* — Si $\psi(t)$ admet, pour $t=r$, un saut σ, on pourra définir une fonction $\psi^*(t)$, continue en $t=r$, et telle que

$$\psi^*(t)=\psi(t) \qquad \text{pour} \quad t<r,$$
$$\psi^*(t)=\psi(t)-\sigma \qquad \text{pour} \quad t>r.$$

On aura alors

$$f(z)=\int_0^{\infty}\frac{d\psi^*(t)}{z+t}+\frac{\sigma}{z+r},$$

et les modifications à apporter à (2) et (3) résultent simplement de l'évaluation de

$$\lim_{\substack{\lambda>0\\ \mu>0}} \mathrm{J}\left[\sigma\int_{\Gamma}\frac{z^p}{z+r}\,dz\right]=\mathrm{S}_p;$$

on trouve

$$\mathrm{S}_p=\sigma(-1)^p\,r^p\pi \qquad \text{pour} \quad p\geqq 0,$$
$$\mathrm{S}_p=\sigma(-1)^{p+1}r^p\pi \qquad \text{pour} \quad p<0.$$

La formule (10) devient, dans le cas général,

$$\lim_{\substack{\lambda>0\\ \mu>0}} \mathrm{J}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma(r;\lambda,\mu)} f(z)\,z^p\,dz\right]=(-1)^p\left\{\int_0^r t^p\,d\psi^*(t)+\frac{\sigma}{2}r^p\right\} \qquad (p\geqq 0).$$

Pour $p<0$, on trouve

$$\lim_{\substack{\lambda>0\\ \mu>0}} \mathrm{J}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma(r;\lambda,\mu)} f(z)\,z^p\,dz\right]=(-1)^{p+1}\left\{\int_r^{\infty} t^p\,d\psi^*(t)+\frac{\sigma}{2}r^p\right\}.$$

En revenant à la fonction $\psi(t)$, dont les discontinuités sont supposées régulières, on obtient de nouveau (2) et (3).

3. *Inégalités asymptotiques tirées des formules d'inversion.* — On reprendra les inégalités (9) et (13) et l'on remarquera que les seconds membres en sont identiques; on peut donc poser

$$\mathrm{L}_p(r)=\frac{(-1)^p}{r^{p+1}}\int_0^r t^p\,d\psi(t) \qquad (p>0)$$

et

$$L_p(r)=\frac{(-1)^{p+1}}{r^{p+1}}\int_r^\infty t^p\,d\psi(t)\qquad (p<0),$$

et ne plus distinguer deux cas.

Estimons les seconds membres de (9) et (13), *avant de passer aux limites* $\lambda\to 0$, $\mu\to 0$; en tenant compte des deux inégalités suivantes

$$(14)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2r} d\psi(t)\leq 3r\int_0^{2r}\frac{d\psi(t)}{t+r}\leq 3rf(r),\\ \displaystyle\int_{2r}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{t}=2\int_{2r}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{t+t}\leq 2\int_{2r}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{r+t}\leq 2f(r), \end{cases}$$

on obtient

$$(15)\qquad \left|\frac{r^{p+1}}{2\pi}\int_{-(\pi-\lambda)}^{(\pi-\mu)}\mathcal{R}\left[f(re^{i\theta})\,e^{i(p+1)\theta}\right]d\theta-r^{p+1}L_p(r)\right|$$
$$\leq\frac{3(\lambda+\mu)}{2\pi\nu}r^{p+1}f(r)+\frac{4(\lambda+\mu)}{2\pi}r^{p+1}f(r)+\frac{C+2\pi}{2\pi}r^p\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)}d\psi(t).$$

Étant donné $\varepsilon_1(>0)$, choisissons d'abord ν en sorte que

$$\frac{1}{3rf(r)}\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)}d\psi(t)\leq\frac{\displaystyle\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)}\frac{d\psi(t)}{t+r}}{\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{d\psi(t)}{t+r}}<\frac{\varepsilon_1\pi}{6(C+2\pi)}\qquad [r>r_0(\nu)].$$

Prenons ensuite $\eta_1=\lambda=\mu<\dfrac{\pi\varepsilon_1}{4\left(\dfrac{3}{\nu}+4\right)}$; pour $r>r_0(\nu)$, le second membre de (15) est inférieur à $\frac{\varepsilon_1}{2}r^{p+1}f(r)$. La démonstration s'achève en substituant aux intégrales

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\eta_1}^{\pi-\eta_1}\mathcal{R}\left[f(re^{i\theta})\,e^{i(p+1)\theta}\right]d\theta,$$

des intégrales approchées où $f(z)$ est remplacée par $g(z)$. Nous nous baserons sur les lemmes 1 et 2 que nous allons maintenant énoncer et prouver :

LEMME 1. — *Soient $f(z)$ la fonction définie par (1) et $\mathcal{D}$, un domaine borné de $\mathcal{S}$, dont la distance à l'axe réel négatif n'est pas nulle.*

Il existe alors deux bornes M *et* m *telles que, pour tout $r>0$, et tout z de $\mathcal{D}$*

$$m<\left|\frac{f(zr)}{f(r)}\right|<M.$$

Posons

$$U=\overline{\underset{z\in\mathcal{D}}{\text{borne}}}\,|z|,\qquad u=\overline{\underset{\substack{z\in\mathcal{D}\\ x>0}}{\text{borne}}}\,|z+x|.$$

On a

$$f(zr)=\left(\int_0^{2rU}+\int_{2rU}^{\infty}\right)\left[\frac{d\psi(t)}{t+r}\,\frac{t+r}{t+zr}\right]. \tag{16}$$

Pour $t\leq 2rU$,

$$\left|\frac{\frac{t}{r}+1}{\frac{t}{r}+z}\right|\leq\frac{1+2U}{u}, \tag{17}$$

pour $t\geq 2rU$,

$$\left|\frac{\frac{r}{t}+1}{\frac{rz}{t}+1}\right|\leq\frac{1+\frac{1}{2U}}{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

En utilisant (17) et (18), dans (16), on obtient

$$|f(zr)|\leq f(r)\max\left[\frac{1+2U}{u},\ 2+\frac{1}{U}\right]=f(r)\,M,$$

Observons maintenant que $f(z)>0$, pour des valeurs positives de z. Si z n'est pas réel, la partie imaginaire de $f(z)$ n'est pas nulle. On voit donc que, pour tout z de $\mathcal{D}$, et toute valeur positive du paramètre r, la famille de fonctions $\left\{\frac{f(r)}{f(zr)}\right\}$ est holomorphe dans $\mathcal{D}$ et bornée inférieurement par $\frac{1}{M}$. Si $\mathcal{D}$ ne contient pas le point $z=1$, on considérera un domaine $\mathcal{D}'$ contenant $\mathcal{D}$ et ce point, et situé à distance non nulle de l'axe réel négatif. Dans $\mathcal{D}'$, la famille $\left\{\frac{f(r)}{f(zr)}\right\}$ est normale et, pour $z=1$, elle est bornée. On sait alors qu'il existe une borne $\frac{1}{m}$ telle que

$$\left|\frac{f(r)}{f(zr)}\right|<\frac{1}{m},$$

pour $z\in\mathcal{D}'$ et $r>0$.

Lemme 2. — *Soit $g(z)$ une fonction holomorphe dans la portion de $\mathcal{S}$ où $|z|>\rho_0$. S'il existe une borne M' telle que, pour r suffisamment grand et $z\in\mathcal{D}$, on ait*

$$\left|\frac{g(zr)}{g(r)}\right|<M', \tag{19}$$

et si

$$\lim_{r\to\infty}\frac{g(r)}{f(r)}=1, \tag{20}$$

on aura, pour tout $\delta(>0)$,

$$\frac{f(zr)}{g(zr)}=1+\zeta(z;r),$$

où $|\zeta(z;r)|<\delta$, dès que $r>r_1(\delta)$.

En vertu du lemme 1, et de (19), la famille de fonctions $\left\{\frac{g(zr)}{g(r)}\frac{f(r)}{f(zr)}\right\}$ est bornée dans $\mathcal{D}$.

On peut évidemment, sans restreindre la généralité, supposer qu'il existe un segment de l'axe réel positif complètement intérieur à $\mathcal{D}$. Si z désigne un point quelconque de ce segment, on déduit de (20),

$$\lim_{r\to\infty}\frac{g(zr)}{f(zr)}\frac{f(r)}{g(r)}=1,$$

et, d'un théorème bien connu de Stieltjès, il résulte que cette limite existe uniformément, pour tout $z\in\mathcal{D}$.

Du lemme 2, on déduit que, pour $\eta>0$ fixe, l'égalité

$$ir^{p+1}\int_{-\pi+\eta_1}^{\pi-\eta_1} f(re^{i\theta})\,e^{i(p+1)\theta}\,d\theta - ir^{p+1}\int_{-\pi+\eta_1}^{\pi-\eta_1} g(re^{i\theta})\,e^{i(p+1)\theta}\,d\theta = ir^{p+1}\int_{-\pi+\eta_1}^{\pi-\eta_1} g(e^{i\theta})\zeta(e^{i\theta};r)\,e^{i(p+1)\theta}\,d\theta,$$

entraîne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\eta_1}^{\pi-\eta_1}\mathcal{R}[f(re^{i\theta})\,e^{i(p+1)\theta}]\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\eta_1}^{\pi-\eta_1}\mathcal{R}[g(re^{i\theta})\,e^{i(p+1)\theta}]\,d\theta=o[g(r)],$$

qui, rapprochée de (15), donne le théorème 1. [On voit que l'on peut prendre $\eta_0(\varepsilon_1)=\frac{\pi\varepsilon_1}{4\left(\frac{3}{\nu}+4\right)}$].

4. *Un corollaire du théorème* 1. — Le théorème 1 affirme que

$$\left|h_p(r;\eta)-\frac{L_p(r)}{g(r)}\right|<\varepsilon_1, \tag{21}$$

dès que $\eta<\eta_0(\varepsilon_1)$ et $r>r_2(\eta)$.

Les trois premières conditions (B) permettent de trouver un η_1 satisfaisant simultanément (21) et

$$|H_p-h_p(r;\eta)|<\varepsilon_1,$$

pour des valeurs suffisamment grandes de r. Donc, pour de telles valeurs de r,

$$\left|H_p-\frac{L_p(r)}{g(r)}\right|<2\varepsilon_1.$$

Si $H_p\neq 0$, ceci signifie

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^r t^p\,d\psi(t)\sim(-1)^p H_p r^{p+1}g(r) & (p\geq 0),\\ \displaystyle\int_r^\infty t^p\,d\psi(t)\sim(-1)^{p+1}H_p r^{p+1}g(r) & (p<0).\end{cases} \tag{22}$$

Le théorème 1 admet donc le corollaire suivant, analogue au théorème de Hardy-Littlewood :

COROLLAIRE. — *Avec les hypothèses du théorème* 1 *et les trois premières conditions* (B), *on a* (22), *si* $H_p \neq 0$.

5. *Démonstration du théorème* 2. — Nous vérifierons d'abord que la condition (A), du théorème 1, est satisfaite si $d\psi(t) = \Phi(t)\,dt$, où $\Phi(t)$ est assujettie à la condition (α) de la page 398.

Supposons, pour fixer les idées, que $t^{-\tau}\Phi(t)$ ($\tau > 0$) n'est pas décroissante pour $t > t_0$. En tenant compte de (14),

$$\int_{\frac{r}{2}}^{3\frac{r}{2}} \Phi(t)\,dt = \psi\left(\frac{3r}{2}\right) - \psi\left(\frac{r}{2}\right) \leq \psi(2r) - \psi(0) \leq 3rf(r);$$

et, pour $r > 2t_0$,

$$r\frac{\Phi\left(\frac{r}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right)^{\tau}}{\left(\frac{3r}{2}\right)^{\tau}} \leq \int_{\frac{r}{2}}^{\frac{3r}{2}} \Phi(t)\,dt \leq 3rf(r).$$

De cette inégalité, on tire

$$\Phi\left(\frac{r}{2}\right) \leq 3^{\tau+1} f(r),$$

ou

$$\Phi(r) \leq 3^{\tau+1} f(2r) \leq 3^{\tau+1} f(r). \tag{23}$$

Enfin, en combinant

$$\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)} \Phi(t)\,dt \leq 2\nu r\,\Phi[r(1+\nu)]\frac{r^{\tau}(1+\nu)^{\tau}}{r^{\tau}(1-\nu)^{\tau}}$$

et (23), on obtient

$$\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)} \Phi(t)\,dt \leq 2\nu r\frac{(1+\nu)^{\tau}}{(1-\nu)^{\tau}} 3^{\tau+1} f[r(1+\nu)] \leq 2.3^{\tau+1}\frac{(1+\nu)^{\tau}}{(1-\nu)^{\tau}}\nu r f(r).$$

Donc, en prenant ν suffisamment petit, la quantité $\frac{1}{rf(r)}\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)} \Phi(t)\,dt$ peut être rendue arbitrairement petite, indépendamment de r. Ceci entraîne, manifestement, la condition (A).

En utilisant les deux dernières conditions (B), nous obtiendrons aisément le théorème 2. Le cas $p = -1$ ne se distingue des autres que par des détails d'écriture. Nous ferons les calculs dans ce cas particulier, en continuant à supposer que $t^{-\tau}\Phi(t)$ ($\tau > 0$), ne décroît pas.

Du corollaire du théorème 1, il résulte que, pour $\xi(>0)$ donné,

$$(H_{-1}-\xi^2)g(r)\leq\int_r^\infty\frac{\Phi(t)}{t}\,dt\leq(H_{-1}+\xi^2)g(r),$$

dès que r est suffisamment grand. Donc,

$$(24)\qquad -H_{-1}\{g[r(1+\xi)]-g(r)\}-\xi^2\{g(r)+g[r(1+\xi)]\}$$
$$\leq\int_r^{r(1+\xi)}\frac{\Phi(t)}{t}\,dt\leq-H_{-1}\{g[r(1+\xi)]-g(r)\}+\xi^2\{g(r)+g[r(1+\xi)]\}.$$

En appliquant le théorème de la moyenne au membre central et la formule de Taylor, au troisième membre,

$$\xi r\frac{\Phi(r)r^\tau}{r^{\tau+1}(1+\xi)^{\tau+1}}=\frac{\xi\Phi(r)}{(1+\xi)^{\tau+1}}$$
$$\leq-H_{-1}\left\{\xi rg'(r)+\frac{\xi^2r^2}{2}g''[r(1+\theta\xi)]\right\}+\xi^2\{g(r)+g[r(1+\xi)]\}.$$

En tenant compte de l'hypothèse (a) du théorème 1, et deux dernières conditions (B); en gardant ξ fixe et en passant à la limite $r\to\infty$, il vient

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\Phi(r)}{g(r)}\leq(1+\xi)^{\tau+1}[H_{-1}G+\xi V],$$

où V est une constante convenable. Puis en faisant $\xi\to 0$,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\Phi(r)}{g(r)}\leq H_{-1}G.$$

En traitant de même le premier et le deuxième membre de (24),

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\Phi(r)}{g(r)}\geq H_{-1}G.$$

Donc

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\Phi(r)}{g(r)}=H_{-1}G.\qquad\text{C. Q. F. D.}$$

6. Nous terminerons ce travail en montrant la nécessité d'une condition telle que (A), pour $\psi(t)$.

Prenons pour $\psi(t)$, une fonction constante quand

$$3^n\leq t<3^{n+1}\qquad(n=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

nulle pour $0\leq t<1$, et telle que

$$\int_0^\infty\frac{d\psi(t)}{t+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{x+3^n}=f(x).$$

Il est clair que l'on peut prendre $g(z)=f(z)$ et la condition (a) est satisfaite en vertu du lemme 1. D'autre part, pour tout $\gamma_1(>0)$, l'expression $h_p(r;\gamma_1)$

est manifestement une fonction continue de r. Le théorème 1 se trouvera en défaut dès que l'on aura vérifié que $\frac{1}{rf(r)}\int_0^r d\psi(t)$ admet aux points $r=3^n$, des sauts tous supérieurs à une borne positive. Il suffit, pour cela, d'observer que $f(3^n)\leq 4\frac{2^n}{3^n}$ et que, par conséquent, les sauts en question sont tous supérieurs à $\frac{1}{4}$.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTE-SIXIÈME.

Pages.

Courbes algébriques de classe p dont une p-sectrice de chaque système de tangentes concourantes passe par un point fixe, par M. *Bertrand Gambier*..... 1

Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications à quelques problèmes d'approximation, par M. *M. Zamansky*..... 19

Le problème d'Ossian Bonnet et la théorie de l'immersion d'un ds^2, par M. *Victor Lalan*..... 95

Étude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace, par M^me^ *Jacqueline Lelong-Ferrand*..... 125

Sur les valeurs algébriques d'une fonction algébroïde et les intégrales pseudo-abéliennes, par M. *Nicolas Baganas*..... 161

Les anneaux d'opérateurs de classe finie, par M. *J. Dixmier*..... 209

Sur les séries de Dirichlet, par M. *Shmuel Agmon*..... 263

Sur les séries d'interpolation, par M. *Yves Martin*..... 311

Sur les minima arithmétiques des formes, par M. *Claude Chabauty*..... 367

Sur des formules d'inversion pour les transformées de Stieltjès et certains théorèmes taubériens, par M. *Albert Edrei*..... 395

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
131817 Quai des Grands-Augustins, 55.